SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI
IN NAPOLI

RENDICONTO

DELL'ACCADEMIA

DELLE

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV. — VOL. XVII. — (Anno LXXXIX)

gennaio - dicembre 1950

NAPOLI
STABILIMENTO TIPOGRAFICO G. GENOVESE
Pallonetto S. Chiara, 22 - Telef. 22.568
1950

Pubblicato il 23 febbraio 1951

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI
IN NAPOLI

RENDICONTO

DELL'ACCADEMIA

DELLE

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV. — VOL. XVII. — (Anno LXXXIX)

gennaio - dicembre 1950

NAPOLI
STABILIMENTO TIPOGRAFICO G. GENOVESE
Pallonetto S. Chiara, 22 - Telef. 22.568
1950

INDICE

G. D' Erasmo — Relazione sui lavori compiuti dall'Accademia delle Sc. fisiche e matematiche durante gli anni 1943 a 1949 . . Pag. 1

G. De Lorenzo — Le teorie di Einstein . . . . . » 16

A. Fadini — La prima rappresentazione degli S_4 proiettivi legati a due algebre doppie definite nel corpo C [2] . . . . . » 35

N. Spampinato — Nozioni introduttive alla teoria delle ipersuperficie algebriche di indice n dell' S_r proiettivo complesso . . . » 41

R. Sersale — Indagini intorno ad un caolino proveniente dal tenimento di Serrenti (Cagliari) . . . . . » 47

F. Cafiero — Sul fenomeno di Peano nelle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine . . . . . » 51

B. de Lerma e G. Arpino — Ricerche di spettrofotometria di fluorescenza sul siero di sangue umano normale . . . . » 62

R. Sersale — Gli esami metallografico e termodilatometrico nella valutazione della qualità dei tubi di ghisa centrifugati . . » 68

M. Giovanardi — Il metodo della proiezione isometrica . . . » 73

G. Imbò — Manifestazioni effusive subterminali della primavera del 1942 e fenomeni termici attuali interessanti la medesima zona del versante meridionale vesuviano . . . . . » 103

N. Spampinato — Corpovarietà e varietà algebriche ed iperalgebriche di un S_r ipercomplesso . . . . . » 114

A. Fadini — Le corpoproiettività dell' S_4 proiettivo legato all'algebra A » 118

F. Cafiero — Sul fenomeno di Peano nelle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine . . . . . » 123

F. Cafiero — Sulla classe delle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine, i cui punti di Peano costituiscono un insieme di misura lebesguiana nulla . . . . . » 127

G. Fichera — Sulla maggiorazione dell'errore di approssimazione nei procedimenti di integrazione numerica delle equazioni della Fisica matematica . . . . . » 138

C. Mennella — Sulla scelta della distribuzione udometrica annuale per Napoli Capodimonte . . . . . » 146

R. Sersale — Indagini sulla dilatazione reversibile di alcune rocce silicee » 152

R. Sersale — Sull' attivazione termica delle bauxiti . . . . » 157

D. Greco — Sulla convergenza degli sviluppi in serie di autosoluzioni associati ad un problema ai limiti relativo ad un' equazione differenziale ordinaria del secondo ordine . . . . » 171

M. Moncharmont Zei — Sopra una nuova specie di *Eurhinodelphis* della pietra leccese . . . . . Pag. 190
V. Minieri — La terrazza della Starza nei Campi Flegrei . . . » 201
P. Balsimelli — Le corpoproiettività dell' S_4 biduale nelle tre rappresentazioni complesse . . . . . » 213
G. De Lorenzo — Le Mosche in descrizioni antiche e moderne . . » 219
E. Guerrieri — Catalogo di 750 stelle zenitali per Capodimonte da osservazioni meridiane al Cerchio di Repsold *(Sunto della memoria inserita nel vol. III, serie 3ª, degli Atti)* . . . . » 229
N. Spampinato — Sulle rappresentazioni complesse di una corpo-varietà algebrica o iperalgebrica e delle trasformazioni corpobirazionali di un S_r legato ad una qualunque algebra complessa . » 230
G. De Lorenzo — L' India nelle lettere di Pietro Della Valle . . » 239
G. D' Erasmo — Sopra un teschio di *Bos taurus primigenius* Bojanus recentemente rinvenuto a Pignataro Interamna . . . . » 259
V. Franciosi — Sulla caduta di spinta per sforzo normale negli archi sottili ribassati . . . . . » 263
E. Giangreco — Instabilità nell'equilibrio delle strutture scatolari . » 276
E. Giangreco — Vibrazioni libere e forzate di un corpo rigido in un mezzo elastico con un' applicazione all' asismica . . . » 291
A. Fadini — La riemanniana del piano triduale . . . . . » 300
A. Russo Spena — Su alcune proprietà caratteristiche delle reti . . » 310
M. Bernabini — Sull' integrazione delle equazioni dell' elasticità piana in coordinate curvilinee . . . . . » 322
G. Zappa — Sui gruppi p-supersolubili . . . . . » 328
A. Fadini — La prima rappresentazione dell' S_4 proiettivo legato ad un' algebra doppia definita nel corpo C [3] . . . . » 340
A. Scherillo — Petrografia chimica dei tufi flegrei: 1) il tufo giallo. Nota prima (con 14 nuove analisi) . . . . . » 343
Processi verbali delle adunanze del dì 7 gennaio, 4 febbraio, 4 marzo, 1° aprile, 6 maggio, 3 giugno, 4 novembre e 2 dicembre 1950 » 357

RELAZIONE

SUI LAVORI COMPIUTI

DALL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

DURANTE GLI ANNI 1943 A 1949

letta nell'adunanza plenaria del dì 30 gennaio 1950

dal socio segretario **Geremia D'Erasmo**

La consueta relazione, che il Segretario dell'Accademia di Scienze fisiche e matematiche soleva esporre al principio di ciascun anno sopra l'attività svolta dalla propria Classe nell'anno precedente, non è stata più presentata dall'anno 1943: da quando cioè il cataclisma della guerra, che sconvolse e distrusse la nostra sede e la nostra biblioteca, e la trasformazione della nostra Società, che portò alla elaborazione ed approvazione di un nuovo Statuto, determinarono prima un breve arresto e poi una faticosa ripresa di quest'attività, ormai decisamente avviata verso la piena normalità. Per effetto delle medesime disposizioni statutarie, tale relazione, che dal 1931 al 1942 era letta ai colleghi di ciascuna Classe in una delle tornate ordinarie, è ora presentata, col ritorno alle antiche norme che regolarono la vita del Sodalizio nel settantennio pre-fascista, in apposita adunanza plenaria ai soci delle quattro Accademie.

Chi vi parla sente perciò il dovere di chiedervi anzitutto scusa, se l'adempimento di quest'obbligo dovrà necessariamente rendere lungo e noioso il suo dire: lungo, perchè pur riducendo alla scheletrica e disadorna esposizione dei soli titoli l'elenco delle note presentate e pubblicate in ben sette anni di attività, egli dovrà abusare della benigna pazienza dei Colleghi; noioso, perchè con le molteplici ramificazioni moderne delle scienze, delle lettere e delle arti, che trovano fra i presenti i loro peculiari esimi cultori, è fatalmente inevitabile che non tutti possano, per il loro abito mentale o per l'indirizzo dei propri studi, provare interesse o diletto a sentir ragionare di argomenti specifici di scienze matematiche, o fisiche, o chimiche, o biologiche, o geologiche.

L'attività dell'Accademia di Scienze fisiche e matematiche dall'anno 1943 all'anno 1949 è comprovata dalle pubblicazioni appresso indicate:

1) completamento del secondo volume della III serie degli *Atti*, distribuito nel luglio 1946;

2) stampa dei seguenti quattro volumi del *Rendiconto*: *a)* un volume per il periodo novembre 1942 - dicembre 1945 (pubblicato nel marzo 1946); *b)* un volume per gli anni 1946 e 1947 (pubblicato nel febbraio 1948); *c)* un volume per il 1948 (pubblicato nel maggio 1949); *d)* un volume per il 1949 (pubblicato nel gennaio 1950).

Il volume degli Atti, di cui si era iniziata la stampa nel 1941 con una memoria del prof. Arturo Palombi e nel quale erano state successivamente accolte altre quattro memorie, venne mandato a termine — non ostante le gravi difficoltà tecniche e finanziarie dell'ultimo anno di guerra e di quello immediatamente successivo — con la stampa di una memoria della prof. Anna Rocco Boselli su *Le serie di potenze nelle 16 algebre complesse del 4° ordine dotate di modulo*, di un'altra dell'ing. Ulderico Bencivenga *Sulla rappresentazione geometrica delle algebre doppie dotate di modulo*, e di una del socio Geremia D'Erasmo sopra *L'ittiofauna cretacea dei dintorni di Comeno nel Carso triestino*. Si è aggiunto così alla pregevole collezione delle nostre memorie in 4° grande, che nulla hanno da invidiare alle più decorose pubblicazioni similari straniere, un altro volume, ricco di 60 fogli di stampa, di 99 figure intercalate e di 10 tavole fuori testo.

Se la stampa di simili grossi volumi ci fu consentita, fino al periodo bellico, sopratutto per merito degli aiuti finanziari che, con spirito altamente comprensivo dei nostri bisogni e dei fini che perseguiamo, ci venivano largiti dalla benemerita Direzione generale del Banco di Napoli, il costo enormemente accresciuto della carta, della composizione e stampa, nonchè delle illustrazioni, ha reso estremamente più difficile, in questi ultimi anni, il problema della continuazione di tale periodico. Difficile, ma non disperato: chè, utilizzando con parsimonia il nuovo contributo ordinario che alla nostra Società è stato provvidamente concesso dal Ministero della Pubblica Istruzione a cominciare dal 1948-49 e fidando nella continuazione degli aiuti del precitato benemerito Ente, e di altri della nostra città, ai quali non dovrebbe sfuggire il vantaggio, non soltanto teorico ma anche tecnico e pratico, d'incrementare le pubblicazioni scientifiche nel Mezzogiorno d'Italia, contiamo d'iniziare entro quest'anno 1950, sia pure con ritmo un po' meno rapido, la stampa di un nuovo volume.

Passando ora in rapida rassegna i lavori accolti nei quattro volumi del Rendiconto, comincerò, come già feci per gli anni precedenti, con i contributi astronomici. E segnalerò anzitutto sette lavori del consocio Carnera, il quale, continuando ad esporre i risultati delle osservazioni internazionali di latitudine, ha, in una prima nota (giugno 1944), riferito sul lavoro compiuto negli ultimi tre anni di guerra, in cui, essendo state interrotte le comunicazioni con le stazioni extra-europee, si dovettero limitare i còmpiti abituali tendenti a dedurre la polodia provvisoria; mentre in cinque note successive (dal giugno 1947 al giugno 1949), servendosi delle osservazioni

di latitudine fatte nelle Stazioni internazionali dell'emisfero boreale a lui comunicate dopo la fine delle ostilità, e riprendendo così gradatamente i delicati calcoli secondo i metodi usati negli anni precedenti, ha potuto determinare le coordinate istantanee del Polo di rotazione della Terra, la conseguente traiettoria, e le *variazioni di latitudine* per le diverse longitudini, durante il corso degli anni 1941 a 1948. Si è in tal modo conclusa, da parte del nostro infaticabile consocio, la serie delle comunicazioni annuali sulle variazioni della latitudine e sul movimento del polo di rotazione terrestre, essendo dal 1949 passato l'incarico di tali calcoli dall'Ufficio Centrale di Capodimonte all'Osservatorio di Pino Torinese.

Allo stesso socio Carnera è dovuta pure una nota (novembre 1942), la quale riferisce le osservazioni compiute all'Osservatorio astronomico di Capodimonte in occasione dell'*ecclissi totale di Luna del 26 agosto 1942* e di *quella parziale di Sole del 10 settembre dello stesso anno.*

In un vicino campo di ricerche, l'astronomo Nicolini ha trattato di *Un tipo di curva a curvatura distribuita come la densità della probabilità nella legge normale* (marzo 1943), ottenendo un'altra rappresentazione geometrica della legge normale, costruibile per punti per mezzo delle tavole dell'integrale di Gauss. Ed il dott. M. Castellano ha fornito *il nuovo valore del passo del micrometro della Stazione astronomica di Carloforte* (novembre 1946), da usare nelle riduzioni delle latitudini, in seguito alla interruzione del servizio nel periodo bellico e al rimontaggio e revisione del telescopio zenitale.

Passando agli studi delle matematiche pure, vanno anzitutto ricordati nove lavori del socio Nicolò Spampinato, riguardanti *Le Riemanniane degli* S_r *ipercomplessi* (novembre 1942), *La varietà* W_4^6 *dell'* S_8 *complesso Riemanniana del piano biduale* (maggio 1943), *Nozioni introduttive alla teoria delle ipersuperficie algebriche di indice n. dell'* S_r *proiettivo complesso* (cinque note: febbraio 1946, gennaio 1947, gennaio 1948, maggio 1948, febbraio 1949), *Le catene t-dimensionali e la geometria corpoproiettiva nell'* S_r *ipercomplesso di prima specie sinistro o destro, legato ad un'algebra dotata di modulo e definita in un qualunque corpo numerico* (febbraio 1949), *Le geometrie fondamentali che generalizzano le geometrie non euclidee in* S_r *ipercomplesso* (novembre 1949). E, fra i contributi dovuti a studiosi non soci, si possono qui citare, in ordine cronologico, due lavori del defunto prof. Federico Amodeo riguardanti i *Caratteri delle diverse serie canoniche delle curve algebriche e serie residue relative* (febbraio 1943) e la ricerca *se è possibile estendere il teorema di Cremona sulle curve iperellittiche alle curve di gonalità diversa da due* (marzo 1943); cinque note dell'ing. Ulderigo Bencivenga *Su di un tipo di algebra di ordine n* (febbr. e mag. 1946), *Su di un altro tipo di algebra di ordine n* (marzo 1947), su *Di alcuni sistemi metrici nello spazio a tre dimensioni* (marzo 1948), e *Sulla rappresentazione geometrica di alcune algebre reali del terzo ordine* (giugno 1948); un lavoro

del dott. O. Sorace *Su di una particolare curva di cui siano assegnate la curvatura e la torsione in funzione dell'arco* (marzo 1947); un altro della dott. Anna Rocco Boselli riguardante le *Algebre complesse d'ordine 5 dotate di modulo* (maggio 1947); due note della dott. Maria Teresa Riccio sopra *La varietà* W_3^5 *dell'* S_7 *Riemanniana dell'* S_4 *di prima specie legato all'algebra di Study* (maggio 1947) e sopra *Il sistema* ∞^6 *di* V_3^3 *di* S_5 *rappresentante le catene unidimensionali dell'* S_4 *di 1ª specie di Study* (maggio 1948); una nota del dott. Pio Balsimelli su *La varietà* W'^{20}_6 *dell'* S_{15} *Riemanniana dell'* S_8 *biduale* (giugno 1947); tre studi del prof. Mario Giovanardi *Sulla prospettiva di una superficie di rotazione e della sua separatrice di ombra* (giugno 1947), *Sulla restituzione prospettica col quadro inclinato* (giugno 1948) e sopra *Il metodo della tripla proiezione ortogonale e sua applicazione alla prospettiva lineare cilindrica* (maggio 1949); una nota della dott. Anna Fiore su *Elementi della teoria delle coniche e delle polarità piane biduali nella prima rappresentazione complessa* (giugno 1948); ed infine un lavoro della prof. C. Marletta Carbonaro su *I sistemi omaloidici di ipersuperficie dell'* S_4, *legati alle algebre complesse d'ordine 4 dotate di modulo* (novembre 1948) ed un altro della dott. Emilia Tosques sulla *Caratterizzazione del sistema lineare di ipersuperficie cubiche dell'* S_5 *immagine complessa delle catene bidimensionali dell'* S_4 *triduale e suo grado* (maggio 1949).

Di un nuovo metodo in uso presso l'Istituto Nazionale per le applicazioni del calcolo ha dato, in una nota, una minuta esposizione la dott. Maria Laura Ettorre, sviluppando il *Calcolo della frequenza più bassa di una membrana vibrante con contorno fisso avente la forma di ellisse* (aprile 1942)

Ad indagini di meccanica razionale si riferisce una nota del prof. Carlo Tolotti riguardante *Le equazioni lagrangiane della meccanica dei sistemi continui in coordinate generali* (novembre 1942).

Diversi lavori riguardano la scienza delle costruzioni. Uno, dovuto all'ing. Mario Turra, *Sulla previsione delle tensioni in alcuni recipienti cilindrici* (novembre 1942), illustra un procedimento di calcolo destinato allo studio del comportamento elastico di taluni collettori di caldaie a vapore, aventi la figura di recipienti cilindrici, a profilo interno circolare, con mantello costituito da due falde aventi spessori differenti. Un altro, spettante al prof. Franco Jossa, sopra *La statica dei prismi non seguenti la legge di Hooke* (maggio 1943), studia le sollecitazioni di flessione e sforzo normale, taglio e torsione, ponendo in luce le differenze rispetto alla teoria statica abituale, determinando le deformazioni e dando la teoria per la ricerca delle incognite iperstatiche. Un terzo, dell'ing. Franco Mazzarella, si riferisce alla *Determinazione del carico critico di un cilindro caricato di punta soggetto a vincoli elastici* (maggio 1943), stabilendo un'equazione, la quale permette di conoscere la lunghezza libera di flessione del solido, e di applicare quindi le consuete formule per la verifica di stabilità.

Quest'ultimo autore ha esposto pure, in altra nota dal titolo *Semplificazione alla soluzione di un sistema di equazioni lineari* (maggio 1943), un metodo per la determinazione della soluzione di un sistema di n equazioni lineari algebriche: metodo, che, eliminando le laboriose sostituzioni volute dagli altri criteri in uso, consente una maggiore speditezza e possibilità di controllo, giovando in molti casi applicativi della matematica all'ingegneria.

Nel campo della matematica applicata all'idraulica, una nota dell'ing. Michele Viparelli tratta di *Un problema di foronomia alla luce della teoria del potenziale* (giugno 1948). In questo lavoro, trasformando opportunamente un corollario del teorema di Green sulla funzione potenziale, si pone in evidenza l'influenza delle condizioni di installazione sui fenomeni di efflusso in foronomia.

Passando alle scienze fisiche, sono da ricordare anzitutto due note del consocio Antonio Carrelli. Nella prima di esse, *Sulla deduzione del secondo principio della Termodinamica da un principio variazionale* (maggio 1943), si dimostra come seguendo un ragionamento di Helmoltz anche il secondo principio della Termodinamica può ricondursi ad un principio variazionale. Nella seconda, su *La moderna concezione delle particelle elementari* (dicembre 1945), vengono sinteticamente esposte le considerazioni che portano alla descrizione mediante onde quantizzate delle proprietà che si attribuiscono alle particelle elementari, e si osserva che in tal modo si giunge in prima approssimazione alla spiegazione da un punto di vista unitario della fenomenologia finora nota, senza che peraltro si possa pervenire ad alcuna spiegazione sulla natura delle particelle elementari, le quali sono tuttora da considerare come «dati empirici». È ancora da segnalare un lavoro della dott. Lina Rescigno, *Misure dell'intensità della luce diffusa dal cielo* (dicembre 1946), che è ad un tempo calcolo teorico e verifica sperimentale della intensità della luce diffusa per punti situati nel piano del Sole. Studiata la percentuale di polarizzazione per punti situati nel piano suddetto, si osservò pure la variazione nel corso di un giorno di detta percentuale per un punto situato a 90° dal Sole.

Non sono mancate le indagini statistiche applicate alla geofisica e neppure i contributi di meteorologia. In una nota, *Caratterizzazioni statistiche della pioggia totale annua di Napoli pel periodo 1866-1925* (genn. 1945), il prof. Tito Nicolini si propone un esame della distribuzione di frequenza della pioggia annuale nella nostra città, non solo per caratterizzare adeguatamente la statistica considerata, ma anche per cercare una valutazione delle probabilità di importi annui di pioggia compresi tra determinati limiti. In un'altra nota, sopra *Il termine di Chandler nelle variazioni di livello del lago Victoria* (aprile 1946), lo stesso autore considera i livelli mensili di quel lago, che oltre al ciclo annuale esibiscono chiaramente una periodicità corrispondente al ciclo undecennale solare, e, classificandoli per intervalli corrispondenti ai successivi cicli di Chandler della polodia, trova

una oscillazione sensibile, di periodo prossimo a 14 mesi, che è il periodo di oscillazione naturale delle masse atmosferiche. — Su *La previsione delle disponibilità idriche estive nel Napoletano* ha pubblicato una nota il dott. Cristofaro Mennella (giugno 1949), nella quale, partendo dalla distribuzione dei totali mensili della pioggia per un periodo ultrasecolare registrati all'Osservatorio astronomico di Capodimonte, si ricava un criterio pratico per la previsione, con alcuni mesi di anticipo, delle forti deficienze di acqua durante i mesi estivi.

Sempre a proposito di precipitazioni nell'Italia meridionale è da ricordare ancora una nota del consocio Colamonico, il quale, riscontrando nel Tavoliere di Puglia e nel litorale appulo-lucano del mare Ionio *Le zone di più bassa piovosità nell' Italia peninsulare* (giugno 1945), ha voluto precisare i limiti di minore piovosità ivi raggiunti: limiti che secondo i dati più attendibili non dovrebbero essere inferiori ai 400 mm. annui. La precisazione era necessaria per correggere alcuni errori apparsi in recenti pubblicazioni, nelle quali si assegnava ad un' area della penisola salentina un totale annuo inferiore ai 300 mm. di pioggia.

Parecchi sono stati i contributi nel campo della chimica, sia teorica che applicata.

Non ostante la perdita, per ragioni belliche, di molti dati bibliografici e documenti analitici riguardanti le ricerche in corso *Sugli stereoisomeri della serie cinnamica (acidi fenil-nitrocinnamici)*, la nostra consocia Maria Bakunin ha potuto render noti, nel giugno 1944, i risultati delle sue esperienze sistematiche, compiute con la collaborazione della dott. A. Accurso, sopra le condizioni più opportune per ottenere le massime rese per le tre coppie di isomeri degli acidi fenilnitrocinnamici preparati con la sintesi di Perkin-Oglialoro e presentanti l'isomeria etilenica. Preparati i sali di sodio e di magnesio (e anche quelli di litio e di cesio) di detti acidi, fu studiata la trasformazione degli isomeri trans- nei cis-, quando acidi e sali venivano sottoposti a trattamenti termici e a irradiazione al sole o alla lampada di mercurio.

In un lavoro *Sulle caratteristiche tecniche e costituzionali del gesso da presa* (novembre 1942), il dott. Luigi Santarelli illustra i metodi messi a punto per la preparazione delle forme anidre e idrate del solfato di calcio (anidrite I^a, semiidrato, biidrato), ne riporta i röntgenogrammi ed indica le modalità analitiche per la loro determinazione quantitativa.

In continuazione delle ricerche sulla costituzione dei materiali silico-alluminosi nazionali, che si vanno compiendo da vari anni nell'Istituto di Chimica industriale della nostra Università, sono state studiate, in una nota della dott. Olimpia Amati, le caratteristiche strutturali de *Il caolino del territorio di Capalbio (Grosseto)*, che rivelano il tipo halloysitico del materiale.

Delle molteplici note dovute al prof. Vittorio Cirilli, quattro (giugno 1945, novembre 1946, giugno 1947) studiano la *Reagibilità allo stato solido*

fra silico-alluminati alcalini e ossidi alcalino-terrosi, esaminando rispettivamente il comportamento delle miscele leucite-calce, leucite-calce-fluorite, nefelina-calce, ed i risultati della reazione fra lo sterile della roccia leucitica e la calce ad alta temperatura: argomento di grande interesse, sia per l'aspetto tecnico, sia per quanto riguarda il piano economico, data la crescente richiesta di allumina da parte del mercato. Altre ricerche del medesimo autore in campo affine sono quelle *Sulle proprietà magnetiche delle soluzioni solide fra ferriti e alluminati di calcio* (novembre 1946), *Intorno all'esistenza di un silico-alluminato di calcio idrato, identificato da Strätling* (giugno 1947), lo *Studio della riduzione, con ossido di carbonio, degli ossidi di ferro in presenza di silice e di allumina* (giugno 1947), *Il sistema* CaO-Fe_2O_3 (novembre 1947), ed infine le *Ricerche sull'azione catalitica delle soluzioni solide tra sesquiossidi nella decomposizione termica del protossido di azoto* (maggio 1948).

Di particolari *Indagini sulla magnesia elettrofusa*, materiale refrattario di alto valore, si sono occupati, in una nota, i dott. Luciano Vighi e Riccardo Sersale (giugno 1948), studiando la costituzione mineralogica di quattro campioni di materiale ottenuto per fusione al forno ad arco partendo da magnesiti toscane.

Per affinità è il caso di citare ora i contributi mineralogici e petrografici, fra i quali si devono anzitutto segnalare le indagini analitiche, a cui il consocio Scherillo ha sottoposto le recenti lave del Vesuvio, pubblicando le composizioni quantitative di quelle del novembre 1941 e del febbraio 1942 e dandoci i risultati preliminari sopra quelle del marzo 1944. Delle investigazioni eseguite per vari anni lungo il litorale campano, da Gaeta ad Agropoli, e lungo le spiaggie delle isole flegree per la ricerca e la genesi delle sabbie magnetiche, ha dato una breve ma chiara rassegna il prof. Antonio Parascandola, al quale sono pure dovute le prime notizie (maggio 1944) sui fenomeni verificatisi durante l'eruzione vesuviana del marzo 1944, da lui studiata tanto sotto l'aspetto dinamico che dal lato descrittivo dei prodotti piroclastici.

Siamo così entrati nel settore più propriamente vulcanologico, che si svariati problemi da risolvere offre non soltanto al mineralista e al petrografo e al chimico, ma altresì al fisico, al sismologo e al geologo. È facile perciò comprendere come una stessa serie di fenomeni possa essere studiata da diversi punti di vista e promuovere ricerche di vario ordine, che si completano a vicenda. Del *parossismo vesuviano del marzo 1944* ha dato una minuziosa ed efficace descrizione il consocio Giuseppe Imbò (dicembre 1944), che, avendo potuto seguire a breve distanza dal vulcano con l'ausilio degli opportuni strumenti, nell'Osservatorio da lui diretto, le vicende eruttive e sismiche di quella conflagrazione, è riuscito a mettere in evidenza i fenomeni più svariati per natura ed intensità, che gli fu consentito di osservare e studiare nelle loro particolari caratteristiche. Allo stesso collega spettano

altre due note, una delle quali riassume i risultati delle ricerche relative alla determinazione della *Conduttività termica approssimata per lave fluenti vesuviane* (febbraio 1948); mentre l'altra tratta *Di un'analisi termica relativa a lava etnea del 1947*, indicando come temperatura di irrigidimento di quella lava i 660° - 680° e facendo interessanti considerazioni sul diverso comportamento, da questo punto di vista, delle lave etnee e vesuviane.

Tali rapporti, ancora in gran parte oscuri, tra coefficiente di viscosità magmatica e modalità eruttive richiamano altri studi teorici, sviluppati in una nota di Alfredo Rittmann, i quali, pur riguardando un distinto campo di indagini, cercano di mettere in relazione i dati forniti dalla geofisica e dalla geologia, ed elaborandoli in base alle leggi della chimica-fisica, tendono a stabilire l'andamento delle temperature nella crosta terrestre fino ad una profondità di circa 100 km., ed a ricercare l'influenza che tale comportamento termico può avere nella genesi dei movimenti geotettonici, provocando correnti magmatiche subcrostali (dicembre 1944).

Di queste recenti ipotesi del Rittmann sull'interno della terra, sul plutonismo e vulcanismo, sull'origine del *Sial* e sulla orogenesi, ha fornito un'esposizione critica, in due successive note (dicembre 1944 e giugno 1945), il prof. Felice Ippolito, osservando come la nuova teoria dello scienziato svizzero, riuscendo a spiegare, meglio di altre precedenti, il maggior numero di fatti geologici, petrografici e geofisici, possa essere utilizzata quale ipotesi di lavoro nel difficile e sempre problematico campo delle teorie orogenetiche, anche se altri ricercatori, quali ad esempio Umbgrove, hanno in questi ultimi anni formulato non poche obbiezioni contro di essa.

Un chiaro riassunto delle questioni tuttora esistenti sul parallelismo delle *Divisioni del Quaternario europeo* è stato esposto, in una nota (giugno 1946), dal compianto prof. Federico Sacco, il quale, dopo aver esaminato sinteticamente la grande varietà dei depositi marini, fluviali, glaciali e vulcanici di tale èra, nonchè i rispettivi fossili principali, le distinzioni archeologiche e la successione degli Ominidi, ha condensato le sue vedute sull'argomento in un quadro sintetico comparativo, che tiene conto dei diversi depositi e delle suddivisioni cronologiche che si possono introdurre per ciascun tipo di essi con un certo grado di attendibilità, quando non manchino dati di comparazione.

Allo stesso geologo, che per un sessantennio percorse instancabilmente la nostra penisola, sottoponendo a minuta analisi specialmente i terreni ed i fossili terziari e quaternari, dobbiamo un altro lavoro di sintesi sopra *Le facies e le oscillazioni batimetriche del Terziario italiano* (maggio 1947), nel quale, esaminate le oscillazioni ritmiche a cui fu soggetto il nostro Appennino e che sono oggi dimostrate dall'alternanza di depositi batiali con altri neritici e litoranei, si cerca di spiegarne la causa con successivi corrugamenti per contrazione del globo terrestre.

Passando dalle visioni geologiche sintetiche alle ricerche analitiche

di dettaglio, cade qui acconcio ricordare lo studio dei materiali piroclastici e lavici incontrati nello scavo di ventidue *Nuovi pozzi trivellati per l'alimentazione di Napoli*, fatto dalla dott. Maria Zei (dicembre 1946), e la descrizione di tre affioramenti di lava, interpretati nel loro insieme come *La cupola lavica del monte Spina, nei Campi Flegrei*, dell'ing. Luciano Vighi, che in base ai risultati dell'analisi chimica e microscopica ha definito la roccia come una « fonolite nefelinica con tendenza verso una alcalitrachite » (dicembre 1946). Alla conoscenza di un importante anfiteatro morenico dell'epoca glaciale, situato nella valle di Campoluongo del monte Cervati, a 1200 m. sul mare, hanno contribuito i proff. Luigi D'Errico e Luigi Maraglia, descrivendo l'*Anfiteatro morenico delle Grottelle* (novembre 194.), depositato in quattro cordoni successivi dalle oscillazioni dei ghiacciai, che scendevano dal bacino di raccoglimento del Mèrcore, tra 1500 e 1600 m. sul mare, a nord-ovest della cima del Cervati, alta 1899 m.

Non sono mancate, infine, ricerche di paleontologia, tanto riguardanti invertebrati, come ad es. la nota del prof. Felice Ippolito sopra *La malacofauna delle ligniti di Colle dell'Oro presso Terni*, che descrive alcune forme salmastre di *Melanopsis*, *Potamides* e *Cerastoderma* (dicembre 1947), quanto su vertebrati, come ad es. le due note del socio D'Erasmo riflettenti pachidermi fossili. Nella prima di esse, *I proboscidati fossili nello stato attuale della scienza* (marzo 1948), vengono esposte le più recenti cognizioni sull'origine, evoluzione e migrazione delle numerose famiglie terziarie e quaternarie di Proboscidati, e sono segnalati alcuni altri ritrovamenti di avanzi di elefanti fossili in Italia; nella seconda, *Nuovi rinvenimenti di pachidermi quaternari nella valle del Liri* (agosto 1949), è data notizia della recentissima scoperta, nel podere Tiseo di Pignataro Interamna presso Cassino, di nuovi avanzi di elefante e di ippopotamo, fra cui particolarmente interessante appare un cranio giovanile di *Elephas antiquus italicus* di minori dimensioni rispetto a quelli precedentemente rinvenuti nel medesimo giacimento quaternario.

Siamo così passati, attraverso la paleontologia, dal campo delle scienze geologiche a quello della biologia e delle sue molteplici ramificazioni, campo ugualmente rappresentato nei nostri Rendiconti da lavori molteplici.

Fra i contributi d'istologia e fisiologia, desidero anzitutto ricordare due note del consocio Diamare, la prima delle quali, *Miofibrille e loro bande* (giugno 1945), espone considerazioni critiche sopra alcuni recenti lavori riguardanti la fine struttura e la costituzione delle fibre muscolari striate; mentre la seconda, *Cellule tiazinofile e leucociti eosinofili* (gennaio 1949), serve di illustrazione e commento a due più ampi scritti dell'autore sulla interpretazione da darsi alle *Mastzellen* di Ehrlich, le quali, mal definite nel nome e nel significato, devono più opportunamente chiamarsi cellule « tiazinofile » e considerarsi, analogamente ai leucociti eosinofili, quali elementi difensivi ed integrativi dei tessuti, e non già quali cellule

distributrici di derrate alimentari, come da molti era stato erroneamente ritenuto. Altre ricerche istologiche, compiute dal dott. Bernardo Terio, sono quelle riguardanti *Le espansioni nervose della vescica natatoria del Cipriníde dorato* e formano oggetto di una nota (marzo 1946), nella quale, accertata la presenza di numerose cellule nervose bipolari e multipolari, si insiste sulla esistenza di un enorme sviluppo di reticoli espansionali diffusi, di natura simpatica e parasimpatica.

Continuando la serie delle sue importanti scoperte sugli *Stafilinidi termitofili dell'America meridionale*, il nostro compianto consocio Filippo Silvestri ha pubblicato una nota (giugno 1946), nella quale ha descritto quattro generi e dodici specie nuove di questi insetti viventi con le Termiti.

A particolari studi sul sistema nervoso degli insetti si riferisce una nota del prof. Marcello La Greca, *I nervi motori e sensori degli organi di volo degli Acrididi* (giugno 1948); mentre altre due note dello stesso autore riguardano speciali osservazioni su anellidi policheti, trattando più precisamente l'una della *autotomia e rigenerazione di* Salmacina incrustans (giugno 1946) e l'altra di *Un caso di duplicazione in* Syllis gracilis (aprile 1949).

Al consocio D'Erasmo è infine dovuta pure una nota d'interesse prevalentemente zoologico e sistematico, tendente a precisare *Le date di pubblicazione della « Fauna del Regno di Napoli » di Oronzio Gabriele Costa e di Achille Costa*, allo scopo di eliminare le numerose controversie e difficoltà incontrate da zoologi e paleontologi circa la priorità di numerose specie costiane (marzo 1949).

Quattro lavori si riferiscono a ricerche antropologiche. Uno di essi, dovuto al nostro socio straniero George Robert Gayre ed esposto sotto forma di conferenza nell'adunanza plenaria di questa Società del 19 febbraio 1944 (*Le tre primitive specie umane*), tende a stabilire un parallelo tra i gruppi sanguigni ed i caratteri antropologici degli individui ed i punti della terra percorsi dai loro progenitori, per formulare quindi una affascinante teoria che permette di risalire alle origini delle razze umane. Due altre note, spettanti al dott. Antonio De Rosa, trattano della *Craniologia della necropoli preromana di Alfedena* (dicembre 1946 e giugno 1947), nella quale vennero differenziati cinque gruppi principali con caratteri etnici diversi. Finalmente uno studio del prof. Alfredo Sacchetti, *Su di una « soglia » di equilibrio instabile dell'individuo considerato come « unità demogenetica »* (aprile 1949), si occupa della funzione di dipendenza delle variazioni individuali dei caratteri, misurabili linearmente, dalla loro grandezza media; e, provatala sperimentalmente su materiale umano, la estende anche all'accrescimento individuale e ad altre specie animali.

Avremmo così finito la nostra breve rassegna se non ci rimanessero ancora da ricordare i contributi del nostro presidente De Lorenzo, il quale, con la straordinaria lucidezza di pensiero che gli è propria, ci ha tenuti

avvinti e soggiogati, elevandoci quasi in un ambiente più luminoso e sereno, tanto allorchè ci ha tradotto e commentato *Lo scritto di Emanuele Kant su La fine di tutte le cose* (aprile 1944), nel quale sono concisamente contenute le ultime conclusioni della filosofia teoretica e pratica del sommo filosofo di Königsberg e della loro applicazione alla vita, quanto allorchè ci ha acutamente spiegato l'influsso, che le concezioni cosmologiche di Galileo e di Keplero ebbero sulle opere antropologiche e sociologiche di Hobbes e di Kant (giugno 1947); ed ancora quando ci ha esposto le osservazioni, pratiche e scientifiche, fatte un secolo fa sopra i cetacei da Herman Melville, in un libro, *Moby Dick*, poco inteso dai contemporanei e successori ma giustamente considerato oggi come un capolavoro, per potenza di espressione artistica e di intuizione filosofica.

Tale, in brevi linee, è il contenuto dei volumi degli Atti e del Rendiconto, che si riferiscono agli anni dal 1943 a 1949. Ma è doveroso ancora ricordare altre manifestazioni di operosità: giacchè la nostra Accademia ha continuato a seguire con particolare interesse le questioni scientifiche più importanti e non ha mancato di farsi rappresentare a convegni o celebrazioni di notevole significato. Essa ha, tra l'altro, partecipato, mediante propri delegati, al Convegno Internazionale dei Matematici (Roma, novembre 1942), al II Centenario della Società Svizzera di Scienze naturali (Zurigo, settembre 1946), al I Centenario dell'Accademia Austriaca delle Scienze (Vienna, maggio 1947), al II Congresso sud-americano di Botanica (Tucuman, ottobre 1948), al Congresso della Società Italiana di Fisica (Lecco, novembre 1948) ecc.; ha espresso voti per il funzionamento dell'Orto Botanico di Napoli e dell'annessa stazione sperimentale per le piante officinali dopo i danni delle occupazioni militari; si è occupata del progetto di riforma relativo alla divisione decimale del grado di angolo e dell'unità fondamentale di massa; si è associata al voto dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna perchè venga abolito, per il nostro Paese, il divieto di svolgere qualsiasi studio o realizzazione avente attinenze con l'energia atomica; si è interessata ai recenti progressi della fisica nucleare (comunicazione verbale del socio Carrelli, gennaio 1948), ai risultati analitici ottenuti dal socio Scherillo sulle ultime lave vesuviane (febbraio 1948), al ricordo del centenario della morte di Leopoldo Pilla, geologo e patriota (De Lorenzo, giugno 1948).

Avendo già avuto, dalla consorella Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Palermo, l'incarico di giudicare il concorso triennale a premio della fondazione «Sensales» su tema di Chimica, la nostra Classe ha sottoposto al giudizio di apposita Commissione i tre lavori inediti presentati dall'unico concorrente, e, non avendoli ritenuti meritevoli del premio, questo non è stato assegnato.

Se da un lato ci soffermiamo con un senso di compiacimento a considerare queste svariate forme di attività, che testimoniano i contributi offerti dal nostro Sodalizio al progresso dell'alta cultura italiana, dall'altro ci sentiamo stretti da indicibile pena, allorchè rivolgiamo il pensiero ai numerosi e gravi lutti che ci hanno colpiti.

Dopo la pubblicazione dell'ultimo annuario, avvenuta all'inizio dell'anno accademico 1942-43, ben quattordici soci — tra ordinari, corrispondenti nazionali e stranieri — sono scomparsi dalle nostre file, lasciando vuoti spesso non facilmente colmabili. Ricordo solo fuggevolmente in ordine cronologico, sia per non abusare più a lungo della cortese attenzione degli ascoltatori, sia perchè l'Accademia non ha mancato, o non mancherà, di rievocarne più degnamente, in particolari commemorazioni, la nobile figura di scienziati e di maestri, queste dolorose perdite di Colleghi noti e stimati, che hanno indissolubilmente legato il loro nome alle discipline con tanto amore professate, e che hanno pur dato, per la massima parte, alle nostre pubblicazioni il pregevole contributo delle loro personali ricerche:

John Joseph Thomson, l'eminente scienziato inglese, premio Nobel per la fisica, noto in tutto il mondo per le sue classiche ricerche sulla conduzione elettrica nei gas rarefatti, e per gli studi che portarono alla scoperta degli elettroni ed alla teoria della diffusione dei raggi X da parte della materia, decano dei nostri soci stranieri, avendo fatto parte fin dal 1911 della Sezione di Scienze naturali;

Federico Millosevich, allievo e successore di Giovanni Strüver nella cattedra di Mineralogia dell'Università di Roma, nobilissima figura di scienziato e di maestro, altamente rappresentativa anche per molteplici meriti civili, nostro socio ordinario dal novembre 1938, mineralogista veramente completo, essendosi occupato, nelle sue numerose pubblicazioni, di cristallografia, di mineralogia descrittiva, di geochimica, di giacimenti minerari, di minerogenesi, di petrografia, tanto dal punto di vista teorico che da quello applicativo;

Gabriele Mammana, professore di analisi superiore nell'Università di Napoli e socio corrispondente nella Sezione di Scienze matematiche dal 25 luglio 1941, spentosi immaturamente a soli 49 anni il 15 dicembre 1942, che ha legato il suo nome alla teoria delle equazioni differenziali ordinarie, ad un geniale metodo di risoluzione numerica dei più generali sistemi di equazioni non lineari, ad acute osservazioni su classici problemi di calcolo delle variazioni, sui metodi di sommazione delle serie e sui fondamenti dell'analisi;

Roberto Marcolongo, professore di meccanica razionale e di meccanica superiore nel nostro Ateneo per quasi un ventennio, studioso e ricercatore ed insegnante di altissimo valore, noto per aver trattato svariate questioni di meccanica analitica, di cinematica, di dinamica, di statica classica ed

elastica, per aver perfezionato e diffuso il calcolo vettoriale ed omografico, per aver contribuito alle ricerche storiche sulla meccanica esaminando l'opera scientifica di Leonardo da Vinci e quella dei discepoli di Galileo. Nostro socio corrispondente dal 1910, ordinario residente dal 1920, contribuì attivamente, per più di un cinquantennio, alle pubblicazioni accademiche con lavori suoi e dei suoi allievi, uno dei quali, Mario Pascal — purtroppo immaturamente scomparso — ne lesse, nel gennaio 1948, una efficace e commossa commemorazione;

Carlo Luigi Ricci, professore di Scienza delle costruzioni nella nostra Facoltà d'Ingegneria e socio ordinario nella Sezione di Scienze matematiche dal 1938, noto per gli studi sulle relazioni tra forze e spostamenti per un sistema rigido soggetto a legami elastici, sulla torsione e sul taglio e sulla flessione composta, sulla trattazione del calcolo statico di coazioni elastiche nelle travi e negli archi, ed inoltre anche per le originali ricerche sul problema dell'equilibramento delle masse rotanti, sugli involucri dei dirigibili e sull'azione dinamica di fluidi di pareti;

Giuseppe Zirpolo, incaricato di Zoologia generale e Parassitologia nell'Università di Napoli e nostro socio corrispondente dal 1938, affermatosi nel campo della biologia per i suoi studi sulle metamorfosi degli anfibi, sulle rigenerazioni degli echinodermi, dei ctenofori e dei briozoi, sui batteri luminosi, sulle radiazioni mitogenetiche e sull'azione dell'acqua pesante sugli organismi, spentosi immaturamente, il 25 dicembre 1943, a Napoli, dove aveva svolto tutta la sua attività d'insegnante e di ricercatore;

Giovan Battista Rizzo, successo a Ciro Chistoni nella cattedra di Fisica terrestre del nostro Ateneo dopo aver tenuto per molti anni quella dell'Università di Messina, e nostro socio corrispondente dal 1932, scienziato noto per i suoi molteplici studi di meteorologia generale e di climatologia della città di Torino, per le ricerche sulla radiazione solare, per quelle sismologiche sui terremoti calabri del 1905 e del 1907 e calabro-siculo del 1908, ed anche per le indagini di elettricità atmosferica compiute a Napoli e delle quali pubblicò i risultati nei nostri Atti e Rendiconti;

Gian Domenico Mattioli, socio ordinario residente nella Sezione di Scienze matematiche dal dì 8 agosto 1942, tragicamente scomparso per mano assassina il 15 marzo 1946: successo a Roberto Marcolongo nella cattedra di Meccanica razionale del nostro Ateneo, si era già affermato — non ostante la ancor giovane età — con una seria ed importante produzione scientifica, comprendente tanto lavori sulla dinamica dei sistemi continui e sulla riduzione delle equazioni canoniche, quanto pubblicazioni di fisica moderna, di cosmogonia, e specialmente di idrodinamica, con particolare riguardo al regime della turbolenza;

Pietro Enrico Brunelli, già ufficiale del genio navale e professore di macchine termiche al nostro Politecnico, passato poi a quello di Torino, studioso noto per le numerose pubblicazioni, specialmente riflettenti i per-

turbamenti dinamici delle macchine, le velocità critiche degli alberi ed i condensatori di vapore, nostro socio corrispondente dal 1932;

Michele Cipolla, ordinario di analisi algebrica nell'Università di Palermo ed autore di numerose memorie di analisi matematica, specialmente sulle teorie dei numeri, dei gruppi di ordine finito, delle sostituzioni lineari dei limiti, delle serie ecc. Era il decano dei nostri soci corrispondenti per la sezione di Scienze matematiche, alla quale apparteneva dal 1918, ed aveva dato, fin dagli anni giovanili, ai nostri Rendiconti ed Atti, contributi pregevoli e numerosi del suo vivido ingegno;

Giuseppe Checchia Rispoli, corrispondente nella Sezione di Scienze naturali dal 16 dicembre 1938 e titolare, per molti anni, degli insegnamenti di geologia e di paleontologia nell'Università di Roma, commemorato dal socio D'Erasmo nell'adunanza del dicembre 1947. Fu sopratutto un paleontologo, ed uno specialista può definirsi nel campo dell'echinologia fossile, in cui lascia una vastissima produzione di prim'ordine; ma ha contribuito altresì, con ben condotte ricerche, al rilevamento geologico della Capitanata ed alla migliore conoscenza dei terreni delle nostre colonie africane;

Alfredo Lacroix, nostro socio straniero dal 1931, mineralogista e petrografo di fama internazionale, segretario perpetuo dell'Accademia delle Scienze di Parigi per più di un trentennio, con vastissima produzione scientifica, principalmente rivolta alla conoscenza di minerali e rocce della Francia e delle sue colonie, alla illustrazione di particolari parossismi vulcanici (fra cui quello vesuviano del 1906) e allo studio degli inclusi delle rocce vulcaniche;

Filippo Silvestri, eccezionale tempra di studioso e di ricercatore, che per quasi mezzo secolo ha tenuto la cattedra di Zoologia generale ed agraria a Portici, e lascia circa cinquecento pubblicazioni e monografie vertenti sopratutto sulla morfologia, sviluppo, biologia e sistematica degli Insetti e dei Miriapodi, oltre a notevoli contributi sulla lotta biologica contro i parassiti e le malattie delle piante e a un grande trattato di Entomologia applicata;

Ed infine Mario Pascal, figlio di Ernesto e continuatore delle nobili tradizioni paterne nella passione per l'indagine matematica e nell'attaccamento al nostro Sodalizio, al quale apparteneva, in qualità di corrispondente, dal 1932, studioso dapprima di questioni di analisi, e più tardi di problemi di meccanica e di fisica matematica, ordinario di Meccanica razionale nell'Accademia Aeronautica di Caserta, immaturamente strappato, a 53 anni, da lungo e insidioso male, alla famiglia, alla scuola ed alla scienza, che ancor molto s'attendevano da lui.

Mentre alla venerata memoria dei Colleghi che ci furono cari mandiamo oggi il doveroso omaggio del nostro mesto e sempre vivo rimpianto, salutiamo con compiacimento le nuove forze, con le quali l'Accademia ha

iniziato — appena l'approvazione del nuovo Statuto gliene ha offerto la possibilità — l'indispensabile opera destinata a potenziarne l'attività, colmando gradatamente i vuoti, che la morte ha accresciuti nelle nostre file. I colleghi Giuseppe Imbò, Mario Salfi ed Antonio Scherillo sono stati nominati soci ordinari residenti nella Sezione di Scienze naturali; e Vittorio Nobile e Carlo Miranda soci ordinari residenti nella Sezione di Scienze matematiche. A questi nomi cari e stimati — la massima parte dei quali, appartenendo da anni al nostro sodalizio nella categoria dei soci corrispondenti, ci aveva già offerto non pochi contributi per le nostre pubblicazioni — è da aggiungere ancora quello del prof. George Robert Gayre, già direttore dell'Istituto di Antropologia di Edinburgh ed autore di numerosi lavori di antropologia concernenti in modo speciale le questioni razziali europee, il quale venne nel 1944 eletto socio straniero nella Sezione delle Scienze naturali.

È stato infine provveduto alle nuove cariche sociali, eleggendo presidente per il 1950 Giuseppe De Lorenzo, vice-presidente per lo stesso anno Francesco Giordani, segretario per il triennio 1950-52 Geremia D'Erasmo, e tesoriere per il medesimo periodo Umberto Pierantoni.

Risorta dalle fumanti rovine del settembre 1943, l'Accademia ha ben presto ripreso la sua missione, e tende, con rinnovellata lena, verso le antiche e nuove mete. *Post fata resurget!*

Le teorie di Einstein

Nota del socio **Giuseppe De Lorenzo**

(Adunanza del dì 4 febbraio 1950)

Sunto. — In questa Nota si vuole indicare, che le teorie di Einstein hanno puramente e semplicemente un valore scientifico, fisico-matematico, e non, come invece comunemente si crede, un valore filosofico, nel senso che esse risolvano l'insolubile problema dell'universo.

Comincio col dichiarare, che Albert Einstein è un grande fisico-matematico: tale lo rivelano i suoi lavori; tale lo ritengono, tranne poche eccezioni, quasi tutti i maestri ed i discepoli della scienza, da lui professata. Ciò premesso, senza entrare affatto nel valore delle sue teorie fisico-matematiche, in cui io sono assolutamente incompetente, sì da potermi far dire: *ne sutor supra crepidam*; oso solo esprimere qualche dubbio sull'enorme valore filosofico, ad esse attribuito dal mondo profano, e forse anche dal loro stesso autore: nel senso, che esse siano finalmente venute, in questa età felice, a svelare il mistero dell'universo, intorno a cui da secoli e da millenni si sono indarno affaticati i più grandi geni umani.

In questa nostra età felice, appunto, nella quale il rapidissimo progresso delle scienze applicate, che ogni giorno ci largiscono una nuova scoperta od invenzione nei campi della meccanica, della luce, dell'elettricità, del magnetismo, dell'energia nucleare, della medicina, etc., gli uomini seguono con ansia ogni annunzio di nuove scoperte ed invenzioni e, come si entusiasmano per i divi e le dive del cinema e dello sport e per i promotori di movimenti politici, così si esaltano per i grandi scopritori ed inventori, e tanto più, quanto più sono per essi incomprensibili le ideazioni e le espressioni di quelle scoperte ed invenzioni: in conformità di quanto aveva già scritto Lucrezio in *De rerum natura*, I, 640-41:

> Omnia enim stolidi magis admirantur amantque,
> inversis quae sub verbis latitantia cernunt.

Nel caso nostro gli *inversa verba* sarebbero le formule matematiche delle teorie di Einstein, le quali sono a volte poco comprensibili, od addirittura incomprensibili anche per i matematici specialisti: quasi come le misteriose foglie scritte dalla Sibilla cumana e forse, come quelle, destinate

ad essere disperse dal vento del tempo. Non c'è da stupirsi, quindi, se il volgo profano ne resti affascinato.

Ne dò qualche esempio. Un settimanale illustrato, *L'Europeo*, dell'8 gennaio 1950, pubblica in prima pagina due grandi fotografie, una accanto all'altra e nella stessa prospettiva, della testa di EINSTEIN e di quella del *Mosè* di MICHELANGELO, per mostrarne la simiglianza, che non c'è affatto, e forse l'equipollenza tra il moderno professore di fisica matematica e l'antichissimo legislatore del popolo d'Israele. Le fotografie sono accompagnate da un lungo articolo su *La suprema scoperta di Einstein* (un altro settimanale, *Il Mondo* del 14 gennaio 1950, la chiama *La chiave dell'Universo*) in cui è scritto, tra altro, quanto segue.

New York, *gennaio*.

"Dopo trentatre anni di studi, di lavoro, speranze e delusioni, divise solo da pochi compagni, dato che la maggioranza dei fisici l'ha lasciato solo per seguire la teoria quantistica di PLANCK, Albert EINSTEIN ha annunziato la scorsa settimana di essere arrivato alla conclusione: quattro equazioni che nessuno finora ha capito, ma che i grandi fisici e matematici guardano con timore. Le quattro equazioni capaci di sconvolgere il mondo sono:

$$G^{ik}_{+-}\, il = 0 \qquad \Gamma i = 0 \qquad Rik = 0 \qquad gis = 0$$

« Per avere un'idea di cosa potrebbero voler dire questi simboli basti pensare che la teoria speciale della relatività che risale al 1905 con $E = Mc^2$ distrusse, 40 anni dopo, Iroscima. Le nuove formule potrebbero fare di peggio, potrebbero, secondo le prime impressioni degli scienziati americani convenuti in questi giorni al congresso dell'Accademia americana per il progresso scientifico, dare agli uomini anche la possibilità di capovolgere o modificare la gravitazione terrestre, planetaria e stellare. Se l'energia atomica semplicemente disintegrando qualche grammo d'uranio, ossia cambiando corso a invisibili elettroni, ha provocato un'espansione misurabile a milioni di gradi di calore, chissà come si misurerà l'energia cosmica. E le applicazioni pratiche, come la bomba atomica di Iroscima, saranno sempre una minima parte delle applicazioni teoriche.

« Potremo tornare indietro nel tempo? Nella teoria di EINSTEIN questo non è più possibile, dato che tempo e spazio, materia ed energia non sono più oggetti separati ma sono la stessa cosa sotto diversi punti di vista. Potremo fabbricare dei chilometri o degli anni-luce più corti per il nostro comodo? Potremo modificare le stagioni? Se lo domandate ad EINSTEIN, dall'alto delle sue cognizioni scientifiche vi può rispondere sì. Ai reporters che hanno tentato di intervistarlo a Princeton, ha sorriso e ha chiuso la porta in faccia. Ed il sorriso di EINSTEIN può significare tutto per due

miliardi di uomini, e si ha questa impressione guardando il suo volto circondato di capelli argentei che sembrano elettrizzati, un volto fiabesco come l'apparizione di un mago. La porta si è poi riaperta ma ne è uscita solo la sua segretaria, che ha detto ai giornalisti: « Il dottor EINSTEIN ha detto di ripassare fra vent'anni ». Fra vent'anni forse sapremo anche noi che cosa significa $\Gamma i = 0$; per ora neanche i cinquecento matematici riuniti alla Columbia University per il 56° congresso dell'American Matematical Society lo sanno. Tutti leggevano relazioni sulla « teoria generalizzata della gravitazione », ma nessuno ne voleva discutere. « Che cosa significa »? fu chiesto al dottor Temple HOLLCROFT, segretario dell'Associazione. Il dottor HOLLCROFT ha risposto: « Io non ne ho saputo niente finchè non ho visto la notizia sui giornali. Ora mi pare di saperne meno di prima. Credo che la maggior parte dei miei colleghi presenti a questo congresso pensino la medesima cosa ».„

Innanzi a questi tentativi di mitificazione e di quasi divinizzazione di uno scienziato, che vive pacifico tra le sue formule ed il suo violino, si resta perplessi e ci si chiede: è vera gloria? Perchè da un lato ci si compiace, che il mondo sappia oggi ammirare ed esaltare il valore di un uomo vivente, e dall'altro si pensa a tanti spiriti magni dell'umanità, della cui parola e del cui pensiero noi oggi viviamo; i quali vissero ai loro tempi in triboli ed affanni, misconosciuti o perseguitati, e miseramente perirono, come dice GOETHE per bocca di *Faust,* accomunando SOCRATE e CRISTO con GIORDANO BRUNO e gli altri eroi e martiri del pensiero: « Quei pochi, che sono stati abbastanza ingenui, da non trattenere la piena del loro cuore e hanno rivelato al volgo il loro sentire ed il loro vedere, li si sono sempre crocifissi e bruciati... *Hat man von je gekreuzigt und verbrannt.* » E non vediamo oggi ancora alcuni, in contrasto col detto popolare, che oltre il rogo non vive ira nemica, pretendere, dopo trecentocinquanta anni da che GIORDANO BRUNO fu arso vivo, che anche la sua statua di bronzo sia rimossa da Campo di fiore, dove il rogo arse? Di fronte a questi terribili esempi si resta perplessi, innanzi alla glorificazione attuale di EINSTEIN vivente.

A questa glorificazione ha contribuito, inconsapevolmente ed in buona fede, lo stesso EINSTEIN col valore apocalittico, che egli ha dato e dà alle sue teorie. Benedetto CROCE, che lo conobbe a Berlino nel 1931, ne riportò l'impressione di un onesto scienziato, sinceramente convinto, che l'astrazione matematica possa svelare il mistero dell'universo. Di tali sue ingenue convinzioni dà prova anche nella lettera, che egli scrisse al CROCE il 7 giugno 1944 (pubblicata da LATERZA a Bari insieme con la risposta di CROCE), in cui dice: « Se l'antico PLATONE potesse in qualche guisa vedere quello che ora accade si sentirebbe come in casa sua, perchè, dopo lungo corso di secoli, vedrebbe ciò che di rado aveva visto, che si viene in certo modo adempiendo il suo sogno di un governo retto da filosofi ». Vedrebbe ben altro, il povero PLATONE, e sentirebbe anche lo scoppio delle bombe

atomiche e superatomiche, alla cui produzione hanno contribuito anche le formule di fisica matematica dell'Einstein.

Le quali formule matematiche sono, sì, la quintessenza astratta del processo logico e concettuale del pensiero, elaborato dal cervello umano, e possono, quindi, definire e spiegare con la massima precisione lo svolgersi ed il concatenarsi delle forme e dei fenomeni del mondo empirico, oggetto dei nostri sensi, attraverso la materia, la quale non è altro che causalità di imponderabili energie, e nello spazio e nel tempo, che sono, come ci ha dimostrato Kant, categorie inerenti all'appercezione generale dell'umana ragione. Perciò l'Einstein con le sue nuove equazioni e con la sua teoria della relatività generale, del 1916, può spiegare l'accelerazione secolare dei perieli dei pianeti, la deflessione dei raggi luminosi in un campo gravitazionale, lo spostamento delle righe dello spettro verso il rosso, ed altri problemi nel campo della gravità e dell'elettromagnetismo e dell'energia nucleare; ma non potrà mai, anche con la più fina analisi differenziale, uscire dal mondo empirico, che è una pura rappresentazione della nostra mente, per penetrare nell'inconoscibile e misteriosa essenza dell'universo. L'infallibilità della matematica riposa soltanto sulla apriorità dello spazio e del tempo nella nostra mente, di cui il mondo empirico è semplicemente la rappresentazione.

Ma l'Einstein è convinto, che la matematica sia la chiave, per disserrare le infrangibili porte di bronzo del mondo transcendente, e non pensa, che tutti gli spiriti magni, i quali hanno meditato sul mistero dell'universo e ne hanno intuito qualche barlume, sono stati tutti, tranne qualche rara eccezione, ignari di matematica: a cominciare dai fondatori delle tre grandi religioni universali, Buddha, Cristo e Maometto, e dagli antichissimi vati vedici e poi dai primi pensatori della Grecia antica, dell'India e della Cina, a finire ai filosofi moderni; l'ultimo dei quali, vicino a noi nel tempo e nello spazio, Benedetto Croce, conosce appena le prime quattro operazioni dell'aritmetica. E non solo i pensatori, ma anche i sommi geni dell'arte, che ci illuminano e ci riscaldano perennemente col fulgore e col fuoco delle loro visioni del mondo, da Omero a Shakespeare, da Pindaro a Leopardi, da Fidia a Michelangelo, da Palestrina a Beethoven, sono stati tutt'altro che matematici. Il perchè ce lo dice Leopardi in quel che scrisse il 7 ottobre 1821 nel suo *Zibaldone*: « Quante grandi illusioni concepite in un momento di entusiasmo, o di disperazione, o insomma di esaltamento, sono in effetto più reali e sublimi verità, o precursore di queste, e rivelano all'uomo, come per un lampo improvviso, i misteri più nascosti, gli abissi più cupi della natura, i rapporti più lontani e segreti, le cagioni più inaspettate e remote, le astrazioni le più sublimi, dietro alle quali cose lo scienziato esatto, paziente, geometrico, si affatica indarno tutta la vita a forza di analisi e di sintesi. Chi non sa quali altissime verità sia capace di scoprire e manifestare il vero poeta lirico, vale a dire l'uomo infiam-

mato dal più pazzo fuoco, l'uomo la cui anima è in totale disordine, l'uomo posto in uno stato di vigor febbrile e straordinario e quasi di ubbriachezza?». Cinque secoli prima di LEOPARDI, e più concisamente di lui, diceva in fondo lo stesso un contemporaneo di DANTE, il grande mistico Meister ECKHART: «Niente impedisce tanto l'anima nella conoscenza di Dio, quanto il tempo e lo spazio: tempo e spazio sono pezzi, e Dio è uno. E sappiate che v'è nell'anima una forza, che è più vasta del vasto cielo, il quale è infinitamente vasto e così vasto, da non potersi esprimere, e quella forza dell'anima è ancora molto più vasta. E fino a quando l'uomo porta in sè tempo e numero ed opinione, egli non è nel giusto, e Dio gli resta lontano ed estraneo». Sostituite al *Dio* cristiano il *Tao* cinese e troverete in queste parole di Meister ECKHART gli stessi pensieri di LAO-TSE: tanto si identificano, fuori del tempo e dello spazio, le concezioni del mondo dei grandi spiriti dell'umanità. E quando (sia detto qui incidentalmente, come un *curiosum*) EINSTEIN s'illude di aver scoperto, che il tempo è la quarta dimensione dello spazio, può trovare uno strano precursore in Riccardo WAGNER; il quale fa dire da *Gurnemanz* a *Parsifal*, che crede di procedere velocemente verso il Gral, mentre appena si muove: «Tu vedi, o mio figlio, qui il tempo diviene spazio: «*Du siehst, mein Sohn, zum Raum wird hier die Zeit*».

D'altra parte vi sono stati grandi matematici, non meno grandi, certo, di EINSTEIN, i quali ci hanno largito grandi scoperte nel campo del mondo sensibile, senza perciò illudersi, di avere strappato il velo ad Iside ed essere penetrati nel mistero dell'universo. Primo tra essi COPERNICO, risuscitando le idee del pitagorico FILOLAO, osò sostituire il sistema planetario eliocentrico a quello geocentrico tolemaico. Poi i due amici, KEPLER e GALILEO, questo con le sue osservazioni ed i suoi ragionamenti, quello con le sue famose tre leggi del moto dei corpi celesti, confermarono e precisarono il sistema copernicano; mentre contemporaneamente Giordano BRUNO, infiammato di eroico furore, ne proclamava l'eccellenza nel suo dialogo de *La cena delle ceneri* e ne estendeva l'applicazione a tutto l'universo nell'altro dialogo *De l'infinito universo e mondi* e nel poema *De immenso et innumeralibus*. BRUNO pagò tanto ardimento col rogo; dal quale GALILEO scampò, per la sua fama e le sue alte protezioni, subendo però l'abiura e l'esilio. Venne poi NEWTON, che, prendendo l'idea intuita dal suo collega Robert HOOKE, della Royal Society, stabilì matematicamente la legge di gravità e della gravitazione universale. Infine LAPLACE, il quale, avendo appreso dalle lettere di LAMBERT la grande concezione cosmologica e cosmogonica, esposta nel 1755 da KANT nella sua *Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels*, la fece sua e la convalidò matematicamente nella sua *Exposition du système du monde*. Ma LAPLACE, col suo lucido intelletto francese, reso anche più chiaro dall'illuminismo e dal razionalismo del settecento, si guardò bene dal dichiarare, di avere con ciò scoperto il se-

greto dell' universo; che anzi, nel primo capitolo della sua opera egli stabilì esattamente quali sono, nell' umana conoscenza, i limiti della scienza e degli scienziati: « En interrogeant ainsi la nature et soumettant ses réponses à l'analyse, nous pouvons, par une suite d'inductions bien ménagées, nous élever aux phénomènes généraux, dont tous les faits particuliers dérivent. C'est a découvrir ces grands phénomènes et à les réduire au plus petit nombre possibles, que doivent tendre nos efforts; *car les causes premières et la nature intime des êtres nous seront éternellement inconnues* ». Si sente in queste parole la modestia del vero grande scienziato.

Invece EINSTEIN ha una fede inconcussa nel progresso della scienza e crede, che essa sia non solo in grado di scoprire tutti gli arcani del mondo, ma ci metta anche, con i suoi ultimi, attuali risultati, in tale situazione, da poter considerare i nostri predecessori quasi come bambini ignari ed ignoranti. Di tale credenza egli dà prova nell' introduzione, da lui premessa alla traduzione tedesca di Hermann DIELS del poema di LUCREZIO, *T. Lucretius Carus, De rerum natura*, lateinisch und deutsch von Hermann DIELS, Berlin 1924,, Bd. II, S. VI a; nella quale egli scrive, che solo chi non sta nello spirito del nostro tempo, *im Geiste unserer Zeit*, e si mantiene come spettatore di fronte alla posizione spirituale dei contemporanei, *der geistigen Einstellung der Zeitgenossen*, può trovare incanto nell' opera di LUCREZIO; il quale era dotato, sì, di interesse scientifico e speculativo, ma rappresenta il mondo come uno, che non ha la minima idea di quei risultati della scienza attuale, che a noi vengono inculcati fin dall' infanzia: *der auch von denjenigen Ergebnissen der heutigen Naturwissenschaft keine Ahnung hat, die uns im Kindesalter beigebracht werden.* In queste parole si sente, punto per punto, l'eco di quelle, che WAGNER, l'ingenuo ed onesto assistente del *Faust* di GOETHE, dice al suo fantastico ed impetuoso maestro: « Perdonate! è un grande godimento, trasferirsi nello spirito dei tempi, vedere come prima di noi un sapiente ha pensato, e come poi noi infine l'abbiamo portato così magnificamente lontano:

Verzeiht! es ist ein gross Ergetzen,
Sich in den Geist der Zeit zu Versetzen,
Zu schauen, wie vor uns ein weiser Mann gedacht,
Und wie wir's dann zuletzt so herrlich weit gebracht ».

E *Faust* replica: « Oh sì, fino alle stelle lontano! *O ja bis an die Sterne weit!* » E soggiunge, per conto suo: « Misteriosa alla luce del giorno Natura non si lascia spogliare del suo velo: *Geheimnissvoll am lichten Tag, lässt sich Natur des Schleiers nicht berauben* ». L'ironia di GOETHE sul presunto progresso della scienza attuale, rivelatrice di misteri ignoti agli antichi, trova riscontro nei versi della *Palinodia* di LEOPARDI:

E di che tratto innanzi,
Se al moderno si opponga il tempo antico,
Filosofando il saper nostro è scorso!

Perchè tale presunto progresso non fa che ampliare e moltiplicare la conoscenza dei singoli fenomeni del mondo empirico, quelli che Meister ECKHART chiamava *i pezzi*, *die Stücke*, ma non ci fa penetrare nell'unica essenza, nell'*Uno* del mondo transcendente, e non contribuisce ad annullare la legge eterna del dolore della vita e del mondo:

Questa legge in pria
Scrisser natura e il fato in adamante
E co' fulmini suoi Volta ne Davy
Lei non cancellerà, non Anglia tutta
Con le macchine sue, nè con un Gange
Di politici scritti il secol novo.

Invece, proprio sulle rive del Gange e sulle sponde del Mediterraneo, fiorirono, tra il sesto ed il quinto secolo avanti Cristo, quelle scuole di sommi pensatori; i quali con le loro intuizioni fondarono le basi incrollabili, su cui ancor oggi riposano e s'innalzano le nostre concenzioni sulla conoscibilità del mondo immanente fisico ed etico, e sulla inconoscibilità del mondo transcendente metafisico. Sulla sponda jonica dell'Italia meridionale fioriva la scuola di PITAGORA; il quale, secondo la tradizione, era stato a scuola in Egitto e nell'India, come ne fa fede la sua dottrina della metempsicosi, ed insegnava, che il numero ed il tempo sono le manifestazioni del mondo fenomenico; desumendone quei moti dei corpi celesti, che dovevano poi dare origine al sistema copernicano ed a tutta l'astronomia moderna; ed immaginando quelle armonie celesti, che dovevano trovare poi un'eco, pel tramite di OVIDIO, nei versi di SHAKESPEARE e nella *nona sinfonia* di BEETHOVEN. Ma sotto la molteplicicità numerica e le manifestazioni armoniche del mondo fenomenico v'era, anche per PITAGORA, l'ignota ed inconoscibile cosa in sè, l'immobile *nunc stans*, il tutto ed uno, ἕν καὶ πᾶν; che doveva, invece, ad Elea, sulla sponda tirrena della stessa Italia meridionale, formare la base della filosofia di PARMENIDE; il quale, anticipando di due millenni il *cogito ergo sum* di CARTESIO, annunziava anche l'intellettualità del mondo: τὸ γὰρ αὐτὸ νοεῖν ἐστὶ τέ καὶ εἶναι: *nam intelligere et esse idem est*. Contemporaneamente sulla sponda meridionale della Sicilia l'agrigentino EMPEDOCLE proclamava, che l'amore e l'odio, φιλία καὶ νεῖκος, ossia l'attrazione e la repulsione di noi moderni, sono i motori del mondo. E sulla opposta sponda egea ERACLITO riconosceva che nel mondo fenomenico πάντα ῥεῖ, tutto scorre, tutto si muta, tutto diviene; mentre nell'universo in se, il cosmo, lo stesso di tutti, che nessun dio

nè uomo creò, fu sempre ed è e sarà, fuoco sempre vivente, ora divampante, ora covante: Κόσμον, τόν αὐτὸν ἁπάντων, οὔτε τις θεῶν οὔτε ἀνθρώπων ἐποίησεν, ἀλλ' ἦν αἰεὶ καὶ ἔσται, πῦρ αἰειζωον, απτόμενον μέτρα καὶ ἀποσβεννύμενον μέτρα. Il che corrisponde alle antichissime concezioni indiane sulle aggregazioni e disgregazioni cicliche dei mondi dell' universo, ed alle modernissime speculazioni astronomiche sull' espansione e la contrazione dell'universo stellare. Vennero poi Democrito, che il mondo a caso pone, ed Epicuro, col suo discepolo Lucrezio, a gettare le basi, con il loro atomismo ed ateismo, del moderno materialismo e positivismo. Sorse infine Socrate, definito da Platone il migliore e più giusto degli uomini, e perciò appunto, come dice Marco Aurelio, ucciso dai pidocchi uomini; il quale, col principio di conoscere sè stesso, rivolse tutto il suo pensiero alla parte etica, o morale, dell' umana conoscenza, la sola accessibile e praticabile, e proclamò per tutto il resto il suo scetticismo con la famosa frase: so di non saper nulla; che anch' essa, dopo due millenni, doveva rinverdire nel *que suis je?* di Montaigne. Ma lo scolaro Platone ritornò verso il mondo metafisico e col suo principio delle idee eterne, di cui le forme ed i fenomeni sono le ombre, *umbrae idearum*, come le ombre degli uomini illuminati alle spalle nel suo famoso paragone della caverna, segnò il principio occidentale di quell' idealismo transcendentale, che, attraverso Cartesio, Berkeley e Hume doveva poi culminare nel sommo fastigio della *Critica della ragion pura* di Kant. Come si vede, *nihil sub sole novum*, come ci predica il *Koheleth*, che possa giustificare la pretesa delle magnifiche sorti e progressive della scienza, secondo le teorie di Einstein e dei suoi seguaci.

Ma, già più di mille anni prima che tali concezioni dell' universo sbocciassero nel Mediterraneo, erano spuntate nelle valli dell' Indo e del Gange le grandiosi intuizioni indiane del mondo: prima nel *Veda*, in forma mitica e lirica, come nei famosi inni 90, a *Puruscia*, e 129, sulla creazione, del X libro del *Rigveda*; poi nei numerosi trattati delle scuole brâhmaniche, confluite poi tutte nel Hinduismo; quindi nelle riproduzioni delle sedute esoteriche delle *Upanisciade*, le quali, conosciute da Schopenhaner nella traduzione latina, *Oupnekhat*, di Anquetil du Perron, gli fecero scrivere: «Come spira dall' *Oupnekhat* il santo spirito dei *Veda*! Come ogni suo rigo è pieno di fermo, definito e concorde significato! E da ogni pagina ci vengono incontro pensieri profondi, originali, sublimi, mentre un' elevata e santa serietà ondeggia sul tutto. Tutto qui spira aria indiana ed esistenza naturale, originaria. È la lettura più remunerante e sollevante che vi sia al mondo: essa è stata la consolazione della mia vita e lo sarà della mia morte.»; ed infine il Buddhismo, che, dopo esser nato nell' India nel sesto secolo avanti Cristo ed avervi prosperato per più di un millennio, quale il suo simbolico, possente albero della *Ficus religiosa*, lasciò anch' esso cadere i suoi semi nel suolo patrio del Hinduismo e si trapiantò in tutta l' Asia centrale, orientale e meridionale.

Tutte queste concezioni religiose e filosofiche dell'India cominciano dallo scrutare e rappresentare il mondo fenomenale empirico, cercano poi d'intuire il mondo transcendente, metafisico e, studiando la connessione tra lo spirito universale e quello individuale, tra il macrocosmo ed il microcosmo, finiscono col ritrarsi nello spirito dell'uomo, quale principio e fine del mondo.

Nella rappresentazione del mondo esterno, nello esprimere l'infinità dello spazio e l'eternità del tempo esse hanno voli di fantasia, che sorpassano di gran lunga tutte le espressioni astronomiche e matematiche moderne, comprese quelle delle teorie di Einstein. Le durate delle rivoluzioni cicliche dei mondi, rotanti nello spazio immenso, indicate come ere cosmiche, *kalpa*, ed età telluriche, *yuga*, sono calcolate in centinaia di milioni e di miliardi di anni solari od umani. I matematici moderni diranno, che queste sono pure fantasticherie. Ad essi bisogna, però, ricordare, che il calcolo, di cui essi vanno giustamente superbi, ci è pervenuto, pel tramite degli arabi, proprio dall'India. Mentre nel bacino del Mediterraneo la matematica s'era polarizzata verso l'indirizzo sintetico, geometrico, ed aveva finito col cristallizzarsi nella geometria di Euclide, nell'India invece s'era svolta per la via analitica, algebrica e differenziale, sì da permettere agli Indiani di risolvere anche equazioni a più incognite di diverso grado. Ciò era stato riconosciuto anche da Laplace, che nella sua *Exposition du système du monde* scriveva: « Lorsque les Grecs et les Arabes commencèrent à se livrer aux sciences, ils allèrent en puiser chez les Indiens les premiers élements. C'est de l'Inde que nous vient l'ingénieuse méthode d'exprimer tous le nombres avec dix caractères, en leur donnant à la fois une valeur absolue et une valeur de position, idée fine et importante, qui nous parait maintenant si simple, que nous en sentons à peine le mérite. Mais cette simplicité même et l'extrême facilité, qui en résulte pour tous les calculs, placent notre système d'Arithmétique au premier rang des inventions utiles, et l'on appréciera la difficulté d'y parvenir, si l'on considère, qu'il a echappè au genie d'Archimède et d'Apoltonius, deux des plus grands hommes, dont l'antiquité s'honore ». Queste parole di Laplace sono state appieno confermate, malgrado le obiezioni di Kaye e di Bubnow, dalle estese ricerche sull'antica matematica ed astronomia indiana del Tibhaut; il quale nota con quale sorprendente facilità gli antichi Indiani calcolassero i grandi numeri e le minimissime frazioni, sì da avere espressioni speciali per le potenze superiori a 10 fino a 100.000 bilioni.

Come spiegazione di tutto ciò, nel senso di Pascal, si può dire, che gli antichi Indiani con lo stesso segno, il circolo od il punto, indicarono il *sûnya*, ossia il vuoto, in cui convergono i raggi della ruota, e il vuoto, in cui si svolge il *samsâro*: il giro dell'universo, senza principio nè fine. Il *sunya* indiano è divenuto il nostro *zero*; come suffisso indica la moltiplicazione decimale, come moltiplicatore dà per prodotto il nulla o zero,

e come divisore dà il quoziente *infinito*. La parola italiana *zero*, derivata dal basso latino, del sesto secolo dell'era volgare, *zephyrum*, che traduceva così foneticamente l'arabo *sifr*, la cifra per eccellenza, si trova per la prima volta in un trattato d'aritmetica di tal mastro Jacopo, del 1307, in cui è scritto «*chel zeuero per se solo significa nulla, ma è potenza di farlo significare*» cioè può significare tutto. I tedeschi lo chiamano, invece, *Null*, e gli inglesi *Nil*: dal latino, *nil, nihil, nihilum*; il quale, come faceva notare Leopardi, il 30 dicembre 1821, nel suo *Zibaldone*, sarebbe *ne-hilum*, con *hilum* eguale al greco ὕλη = materia, cosa: quindi *nihil* o *nil* vorrebbe dire non materia, non cosa, ossia Nulla. E per i pensatori indiani il Tutto sarebbe, in conclusione, il Nulla.

Ma, se gli antichi pensatori indiani brâhmanici si divertivano a calcolare con cifre sbalorditive le durate dei cicli cosmici, i buddhisti invece, che avevano più tendenze di rappresentazione artistica, preferivano esprimerle in immagini e paragoni, tratti dalla visione reale del mondo, anzichè dall'astrazione concettuale matematica. Ne dò un esempio, tratto dal libro XV del *Samyuttanikâyo*, in cui Buddha dice ai suoi discepoli: «Così come quasi, o mendicanti, se vi fosse una montagna di roccia compatta, lunga una lega, larga una lega ed alta una lega, senza fratture, spaccature o caverne, ed ogni cento anni venisse un uomo e la sfregasse una volta con una pezza di seta; quella grande montagna di roccia, o mendicanti, si consumerebbe più presto e finirebbe prima di un ciclo mondiale: tale è la lunga durata di un ciclo mondiale. E molti di tali cicli hanno girato: molte centinaia di cicli, molte migliaia di cicli, molte centinaia di migliaia di cicli. E perchè dico ciò? Perchè, o mendicanti, senza conoscibile principio e fine e il giro dell'esistenza, lungo il quale gli esseri, ciechi per ignoranza e tratti dalla sete di esistenza, passano, attraverso l'agitazione delle forme e dei fenomeni, da morte a vita e da vita a morte». Come si vede, la grandiosità del paragone geologico dà della durata del tempo e dell'immensità dello spazio un'impressione forse anche più potente, e certo più accessibile, delle smisurate cifre matematiche dei *kalpa* e dei *yuga* dell'antica astronomia indiana e degli anni-luce della nostra moderna astronomia.

Ma l'eternità del tempo e l'infinità dello spazio del mondo empirico svanirono, quando gli Indiani scoprirono, più di duemila anni prima di Kant, l'apriorità del tempo e dello spazio, insita nel cervello umano. Karl Eugen Neumann in una sua nota alla traduzione del XXVI *sutta* del *Dîghanikâyo* osserva, che Voltaire ne vide un barlume nella sua novella indiana *Le Blanc et le Noir*, in cui scrisse, che Brahma potrebbe facilmente contrarre in un'ora tutti gli avvenimenti della storia umana della durata di circa un milione di anni, così come appunto noi in un'ora possiamo con la mente leggerne il sunto. «Il est clair que tous les événemets, depuis le commencemet du monde jusqa'à sa fin, peuvent arriver successivement en

beaucoup moins de temps que la cente millième partie d'une seconde; et en peut dire méme que la chose est ainsi ». E così, conclude NEUMANN, la dottrina kantiana dell'idealità del tempo aveva già 17 anni prima mostrato qui la sua ombra possente.

Ma, assai prima di VOLTAIRE questa idealità del tempo era stata intravista da Aurelio AGOSTINO, che l'aveva certo appresa dai manichei e dalle *Enneadi* di PLOTINO; il quale a sua volta l'aveva desunta dalla antica sapienza indiana, di cui anch'egli era imbevuto. Ecco, infatti, quel che sant'AGOSTINO, nelle sue *Confessioni*, scrive, tra l'altro, sul tempo: « Che è dunque il tempo? Chi potrà dirlo spedito e chiaro? Chi potrà coglierlo col pensiero, per tradurlo in parole? Eppure, che cosa è più familiare nei nostri discorsi e più chiaro del tempo? E sì che parlando sappiamo bene ciò che diciamo, e bene intendiamo ciò che altri dice quando ne parla. Dunque, che è il tempo? Se non me ne domandi, lo so; ma poi se avessi a dirlo, non ne so nulla. Pure dico sicuramente che, se nulla passasse, non ci sarebbe tempo passato; se nulla avesse a venire, non ci sarebbe tempo futuro; e se nulla esistesse, non ci sarebbe tempo presente. Ma quei due tempi, passato e futuro, come può dirsi che sono, poichè il passato non è più, ed il futuro non è ancora? Il presente poi, se fosse sempre presente e mai trascorresse nel passato, non sarebbe più tempo, ma eternità. Se dunque il presente, perchè sia tempo, è necessario che se ne vada nel passato, come possiamo noi dire che esista ciò, che ha per causa dell'esser suo il non dover essere? Cioè, che non possa dirsi con verità, che il tempo esiste, se non in quanto esso corre a non esistere? »

Dal che si vede, che sant'AGOSTINO, pur non essendo soccorso dalla *Critica della ragion pura* di KANT, vede con la sua grande mente in questo campo più a fondo di quanto sia formulato nelle teorie di EINSTEIN.

Queste considerazioni sul tempo si possono egualmente applicare allo spazio, che è l'altro modo, con cui il nostro cervello vede, *a priori*, il mondo empirico. Lo stesso KARL EUGEN NEUMANN in un'altra nota alla sua traduzione del *Dîghanikâyo*, osserva, come già i veggenti delle più antiche *Upanisciade*, quale la *Brihadâranyakopanisat*, III. 8, 7, avessero già proclamato, che tutte le cose della terra e del cielo sono tessute e tramate nello spazio, *âkâsa eva tad otam ca potam ca*, e sono infuse dello stesso *âtmâ*, lo spirito cosmico od universale. Il che corrisponde alle parole, con cui SCHOPENHAUER inizia il secondo volume del suo *Mondo come volontà e rappresentazione*: « Nello spazio infinito innumerevoli globi lucenti, intorno a ciascuno dei quali ne gira una dozzina di minori ed illuminati, internamente caldi, coperti di una crosta irrigidita e fredda, sulla quale un rivestimento di muffa ha prodotto esseri viventi e conoscenti: questa è la verità empirica, il reale, il mondo». Questo sguardo nell'infinito dello spazio celeste dischiuso da COPERNICO, KEPLER, GALILEO e GIORDANO BRUNO, guidò CARTESIO, il gran matematico, a formularne il principio, *Principiorum*

philosophiae pars II, 21 : « Cognoscimus praeterea hunc mundum, sive substantiae corporeae universitatem, nullos extensionis suae fines habere. Ubicumque enim fines illos esse fingamus, semper ultra ipsos aliqua spatia indefinite extensa, non modo imaginamur, sed etiam vere imaginabilia, hoc est realia esse precipimus; ac proinde etiam substantiam corpoream indefinite extensam in iis contineri ». E questa credo che sia una confutazione irrefutabile di quei moderni astronomi, che si sono fatti matematicamente sostenitori dell' universo finito.

Naturalmente, il mondo empirico, obiettivo, determinato dalle forme *a priori* del nostro cervello, o soggetto della conoscenza: tempo, spazio e causalità, o materia; tale mondo è soggetto alle leggi fisiche, che noi stessi edifichiamo col rigore della matematica, di cui la infallibilità è dovuta, come ci insegna Kant, all' apriorità appunto del tempo, dello spazio e della causalità. Ma, l' essenza occulta di tale mondo empirico, la quale non può essere svelata con leggi fisico-matematiche, è quella, che lo stesso Kant dichiarò inconoscibile *Ding an sich*; che può solo identificarsi col morale, col cuore dell' uomo. I cristiani la chiamano Dio, gli hindu Brahma, neutro, l' essere in sè del mondo transcendente, che si rivela a noi con la *máya*, la magia, l' illusione del mondo immanente. La liberazione, la salvezza dell' anima umana è il suo congiungimento con Dio, secondo i mistici e santi cristiani; il suo dissolversi e ritornare di nuovo in Brahma, secondo gli asceti brahmanici e hinduisti. Solo che per i cristiani le anime individuali, singolarmente da Dio create, possono per una volta sola vivere e poi dannarsi, o salvarsi nella Luce eterna, in cui, come dice Dante, s' interna

> **Legato con amore in un volume**
> **Ciò che per l' universo si squaderna.**

Mentre che per gli indiani, come per gli antichi egiziani, le anime, emanate da Brahma, girano all' infinito per le infinite forme dell' universo sensibile, fino a quando non riescono, purificandosi, a riassorbirsi in Brahma. Di qui il profondo mito della metempsicosi o, meglio, palingenesi o rinascita, che faceva ancora scrivere a Voltaire, nel suo *Dictionnaire philosophique*: « N'est-il pas bien naturel, que toutes le métamorphoses, dont la terre est couverte, aient fait imaginer dans l' Orient, où on a imaginé tout, que nos âmes passaient d' un corps à un autre? Un point presque imperceptible devient un ver, ce ver devient papillon; un gland se transforme en chêne, un oeuf en oiseau; l' eau devient nuage et tonnerre; le bois se change en feu et en cendre; tout parait enfin métamorphose dans la nature. On attribua bientôt aux âmes, qu' on regardait comme des figures légères, ce qu' on voyait sensiblement dans des corps plus grossiers. L' idée de la métempsychose est peut-être le plus ancien dogme de l' univers connu, et il règne encore dans une grande partie de l' Inde et de la Chine ». Le caste sacer-

dotali alterarono, però, anche questo dogma, facendo del Brahma neutro, immobile essere in sè del mondo, un Brahman o Brahmâ maschile, creatore attivo; al quale si dovettero aggiungere il potere trasformativo di Visnu e quello distruttivo di Siva, a costituire la triade, o *trimurti* indiana, produttrice, trasformatrice e distruttrice delle forme e dei fenomeni empirici.

Ma gli antichi Indiani creatori delle *Upanisciade*, i quali si rivolgevano prevalentemente ai nobili della casta guerriera, o *xattriya*, abbandonarono ai brâhmani della casta sacerdotale il loro Brahma, Brahman o Brahmâ, e preferirono parlare dell'*âtmâ*, o spirito universale, in un senso ed in una forma, che ricordano stupefacentemente l'esposizione, che della propria fede fece Giordano Bruno innanzi al tribunale del Sant'Uffizio in Venezia il 26 maggio 1592: « Quanto allo spirito divino per una terza persona, non ho possuto capire secondo il modo che si deve credere; ma, secondo il modo pitagorico, conforme a quel modo che mostra Salomone, ho inteso come anima dell'universo, ovvero assistente all'universo, iuxta illum dictum sapientiae Salomonis: Spiritus Domini replevit orbem terrarum et hoc quod continet omnia; che tutto conforme pare alla dottrina pitagorica, esplicata da Virgilio nel sesto dell'*Eneide*:

> Principio coelum et terras camposque liquentes
> lucentemque globum Lunae Titaniaque astra
> spiritus intus alit totamque infusa per artus
> mens agitat molem ....

e quel che seguita. Da questo spirito poi, che è detto vita dell'universo, intendo nella mia filosofia provenire la vita e l'anima a ciascuna cosa che have anima e vita; la quale però intendo essere immortale, come anche alli corpi. Quanto alla loro substantia, tutti sono immortali, non essendo altro morte che divisione e congregazione; la qual dottrina pare espressa nell'*Ecclesiaste*, dove dice: Nihil sub sole novum. Quid est quod fuit? Ipsum quod est. Quid est quod est? Ipsum quod fuit ». Ora basta paragonare queste parole del Bruno con alcuni pezzi delle *Upanisciade*, per vederne, facendo astrazione dai riferimenti biblici e cristiani, la perfetta identità di contenuto e di forma.

Ne dò un esempio. Nella *Chandogyopanisat* un padre manda il figlio Svetaketu, di dodici anni, ad istruirsi in una scuola brâhmanica. Il figlio ne ritorna all'età di ventiquattro anni, impettito e saputo ed orgoglioso della sua sapienza. Ma il padre, interrogandolo, non si convince della bontà di quel sapere scolastico e lo istruisce mostrandogli in molti modi l'identità del proprio Sè, od *âtmâ* o spirito individuale, con l'*âtman* o spirito universale. Ecco uno di tali modi. Padre e figlio stanno all'ombra di un grande albero di *Ficus religiosa*: tra essi si svolge questo dialogo. « Prendi e portami un fico, Svetaketu ». — « Eccolo, signore ». — « Dividilo ». — « É di-

viso, signore». — «Che vi vedi?» — «Questi piccoli semi, signore». — «Fà il piacere di dividerne uno». — «È diviso, signore». — «Che vi vedi?» — «Nulla, signore». — «Veramente, da quel nulla, che tu non vedi, da quella fine essenza invisibile, mio caro, è sorto questo grande albero. Credimi, mio caro, questa fine essenza invisibile è lo spirito, che anima tutto il mondo. Questo è la realtà. Questo è l'*âtman*. Questo sei tu, Svetaketu».

Questo sei tu, *tat tvam asi*, è la formula upanisciadica dell'identità dell'Io col Non Io, del soggetto con l'oggetto, dello spirito individuale con lo spirito universale: ed è, certo, una formula assai più comprensiva del mondo, che non siano le formule delle teorie di Einstein.

Ma lo stesso *âtmâ* o spirito individuale, come principio datore di vita ed informatore dell'esistenza universale, è analizzato e distinto dal mondo empirico, oggetto dei nostri sensi, i quali sono essi stessi un prodotto dell'*âtmâ*. Tale distinzione si trova adombrata in una narrazione, che ricorda stranamente, ma solo per la forma, il famoso apologo di Menenio Agrippa, raccontato da Tito Livio, ripetuto da Plutarco e ricreato e drammatizzato da Shakespeare nel *Coriolano*. La scoprì per primo il più grande orientalista francese ed il più geniale di tutti gli orientalisti, Eugène Burnouf (1801-1852); lo scopritore e decifratore della lingua di Zarathustra, coi suoi studi sullo zendo; l'analizzatore, col suo *Essai sur le pâli*, del 1826, della lingua di Buddha; il fondatore, con la sua *Introduction à l'histoire du Buddhisme indien*, del 1844, e con *Le lotus de la bonne Loi*, del 1852, della base granitica, su cui s'è poi elevato ogni ulteriore studio sul Buddhismo; ed infine lo stupendo interprete degli antichi testi sanscriti, dei quali potè compiere, malgrado la vita inferma e la morte precoce, la grandiosa edizione e traduzione del *Bhâgavata-Purâna*.

Nel primo volume appunto del *Bhâgavata-Purâna*, Paris, Imprimerie Royale, 1840, pp. 134-138, Eugène Burnouf, dopo avere ricordato la narrazione, contenuta nella *Brihadâranyakopanisat*, da lui già scoperta e pubblicata, e quella della *Chândogyopanisat*, già raccolta nell'*Oupnekhat* di Anquetil du Perron, espone la nuova scoperta, da lui fatta nell'*Aitareya-brâhmana*, e la descrive con parole del più vivo entusiasmo: «C'est, sous une forme plus profonde et plus grand à la fois, la fable célèbre des Membres et de l'Estomac; mais, entre l'hymne du Brâhmane et l'apologue de Ménénius Agrippa il y a, qu'on me permette cette comparaison, la difference de l'Himâlaya aux Sept Collines». Queste parole di Burnouf potranno sembrare esagerate a chi non sia avvezzo alle misure himâlayane dell'India, ma riescono perfettamente naturali per chi sa a quali superbe altezze giungano i voli mentali degli Indiani nelle concezioni filosofiche e nella pratica delle applicazioni etiche.

L'apologo indiano, infatti, non si occupa già, come quello di Menenio Agrippa, dei rapporti materiali tra il ventre e gli altri membri, per para-

gonarli ai rapporti tra le diverse classi sociali ed ai loro contingenti, troppo contingenti valori, ma affronta immediatamente l'arduo ed eterno problema della vita, di tutta la vita e di ogni sua manifestazione, sciogliendolo secondo il principio panteistico, da cui si può poi ricavare una morale ascetica. Questa è la traduzione dell'apologo brâhmanico:

« Le funzioni disputavano tra loro: Io sono la prima, io sono la prima! Esse dissero: Usciamo da questo corpo; quella di noi, per la cui uscita il corpo cadrà, quella è la prima. La parola uscì: il corpo non parlava; ma beveva, mangiava e stava. La vista uscì; il corpo non vedeva; ma beveva, mangiava e stava. L'udito uscì: il corpo non udiva, ma beveva, mangiava e stava. La mente uscì: l'intelligenza s'addormentò nel corpo; ma questo beveva, mangiava e stava. Lo spirito uscì: appena uscito lo spirito, il corpo cadde, si sciolse, si decompose. Perciò il corpo si chiama decomposizione. Le funzioni disputavano ancora: Io sono la prima, io sono la prima! Esse dissero: Rientriamo in questo nostro corpo; quella di noi, per la cui entrata il corpo si alzerà, quella è la prima. La parola rientrò: esso giaceva. La vista rientrò: esso giaceva. L'udito rientrò: esso giaceva. La mente rientrò: esso giaceva. Lo spirito rientrò: appena entrato lo spirito, il corpo si sollevò. Quello fu il primo. Il soffio della vita infatti è il primo. Si sappia, che la vita è la prima delle funzioni. Gli dei dissero allo spirito: Tu sei il primo; tu sei quest'universo intero; tu sei noi e noi siamo te. Ciò è stato anche espresso dal vate che disse: Tu sei noi e noi siamo te ».

Come si vede, dunque, in questo apologo il vate indiano, partendo dalla disputa della preminenza delle varie funzioni del corpo, giunge alla identificazione, che culmina nella formula famosa: Questo sei tu, *tat tvam asi*. Ma questa identificazione teorica serve all'indiano solo di base alla sopraelevazione della pratica ascetica: si riconosce la vita, per rinunziare alla vita. Quindi nella pratica del *yoga* l'asceta domina con la sua volontà i sensi e le funzioni del corpo, fino alla soppressione della respirazione; e così, distaccandosi successivamente dalla parola, dalla vista, dall'udito, dal pensiero e dal respiro, finisce col dissolversi nella consumazione, nell'estinzione, nel nirvana.

Quando il pensiero indiano, brâhmanico ed upanisciadico, era già giunto a tali superbe altezze, sorse nell'India, ad un'altezza anche maggiore, la voce del fondatore del Buddhismo, il Buddha Gotamo Sakyamuni. Il sapiente della nobile stirpe guerriera dei Sakya aveva lungamente studiato nelle scuole brâhmaniche e s'era anche strenuamente esercitato nell'ascesi del *yoga*; quindi conosceva tutto il conoscibile del *Veda*, quando trovò e proclamò la sua nuova dottrina di liberazione umana, a fondo puramente morale ed individuale. Perciò egli lasciò sussistere per il popolo, o svanire in simboli evanescenti, le divinità della antica mitologia indiana: come poi fece Epicuro con quelle della mitologia greca. Ed usò le più alte concezioni, fisiche e metafisiche, raggiunte nelle *Upanisciade*, come quella

dell'*âtmâ*, per condensarle nel soggetto della conoscenza, nell'Uomo, che era l'oggetto della sua istruzione e della sua educazione. Perciò, come SCHOPENHAUER cercò di rendere intuibile la *Cosa in sè* di KANT, identificandola col *Wille*, con la volontà di esistere, insita in ogni manifestazione, inorganica ed organica, del mondo: così il BUDDHA, con rigore veramente kantiano, identificò l'*âtmâ* upanisciadico con la sete di vivere, *tanhâ* in pâli, *trsna* in sanscrito; la *sitis aequa* di LUCREZIO, il *thirsty evil* di SHAKESPEARE, insito in ciascuno di noi; per cui, come dice appunto SHAKESPEARE, quando beviamo, moriamo. L'uomo, come ogni altro essere, non è un singolo, ma un multiplo, ed è, specificamente, un quintuplo fascio, in cui si intrecciano i cinque tronchi, *pañcakkhanda*, i cinque nessi causali: la corporeità, la sensibilità, la percepibilità, la concepibilità e la conscienza; determinati volta per volta dal *karma*, ossia dalla somma di azioni di ogni essere, ed eternamente mossi dalla sete d'esistenza, o, meglio, non conoscenza, *avijjâ*, cieca per ignoranza. Quando l'uomo si desta dal sonno e dal sogno della vita e, svegliato, riesce a sciogliere questo intrinsico nodo della vita, *this knot intrisicate of life at once untie*, a spegnere la *tanhâ*, o la sete di esistenza, allora raggiunge già in vita la beatitudine del *nirvâna*, o estinzione della sete, ed in morte quella del *parinirvâna*, o estinzione completa: *a consummation devoutly to be wish'd*.

Tutto questo procedimento è concentrato nella volontà e nella conoscenza dell'uomo, o soggetto della conoscenza; nel quale, secondo la gnoseologia buddhista, la conoscenza stessa è determinata dal contatto, materiale od immateriale, della sede dei sei sensi subiettivi, *salayatana*, ossia del cervello, mediante le sei funzioni della vista, dell'udito, dell'odorato, del gusto, del tatto e della mente, o pensiero, con i corrispondenti oggetti del mondo esterno, empirico, obiettivo. E siccome nella mente sono insite, *a priori*, le forme di spazio, tempo e causalità, o materia, è perfettamente vano, tanto per la dottrina buddhista che per la critica di KANT, voler spiegare il mistero dell'universo, sia dell'infinitamente piccolo che dell'infinitamente grande, sia dei mondi chiusi negli atomi che di quelli sparsi nelle galassie e nelle nebulose, con microscopi, telescopi e calcoli matematici, come pretendono di spiegarlo gli scienziati del tipo di EINSTEIN. « Senza principio ne fine » dice BUDDHA nel *Samyuttakanikâgo*, II, 15 « è questo mondo, *samsâro*; inconoscibili sono principio e fine degli esseri, che, ciechi per ignoranza, *avijjâ*, e tratti dalla sete d'esistenza, *tanhâ*, passano, attraverso il dolore, da vita a morte e da morte a vita ». Però nello stesso *Samyuttakanikâyo*, II, 3, BUDDHA annunzia: « Ma io vi dico che proprio in questo corpo alto otto spanne, dotato di percezione e di conscienza, sono contenuti il mondo, il principio del mondo, la fine del mondo e la via, che porta alla fine del mondo ». Quindi, come Cristo, il Figlio dell'Uomo, rigetta e rifiuta questo mondo (*il mio regno non è di questo mondo*) e vede la salvezza dell'uomo, a simiglianza dei santi brâhma-

nici, nell' ascensione al cielo e nel ricongimento con l' Eterno Padre celeste, così Buddha vede la stessa salvezza nell' annullamento della sete di vivere e nella estinzione del *Nirvâna*.

Ora, come Kant nella *Critica della ragion pura* ha dimostrato, che gli scienziati ed i filosofi, i quali pretendono (come fanno ai nostri dì l' Einstein ed i suoi colleghi e seguaci) di spiegare il mistero del mondo e dar fondo all' universo, partono da un falso punto di partenza, dall' ipotesi, cioè, di un mondo obiettivo, dotato di proprietà, le quali esistono solo nel nostro intelletto, e da cui è assolutamente impossibile estrinsecarsi; che perciò il porre tali problemi, che superano le nostre facoltà mentali, non solo è futile, ma anche assurdo, e quindi la trattazione di tali questioni transcendenti non è che un' inutile perdita di tempo, e la si deve completamente abbandonare, per rivolgere ogni attenzione al soggetto stesso della conoscenza, ed a quella parte immanente di sè e del mondo, che può essere oggetto di possibile esperienza: così Buddha un giorno, alle falde del Himâlaya, espose (discorso LXIII del *Majjhimanikâyo*) lo stesso ordine di pensieri al suo discepolo Mâlunkyâputto; al quale durante le ore di meditazione erano sorti alcuni dubbi, che s'era affrettato ad esporre al Maestro:

" Mentr' io là, o signore, ritirato e solitario meditavo, mi venne in mente il seguente pensiero: Vi sono parecchie opinioni, che il Sublime non ha partecipato, ma ha evitato, rigettato, come per esempio: « Il mondo è eterno » od « Il mondo è temporaneo »; od « Il mondo è finito » od « Il mondo è infinito »; « Vita e corpo sono una sola e medesima cosa » o « Altro è la vita ed altro è il corpo »; « Il Compiuto esiste dopo la morte » od « Il Compiuto non esiste dopo la morte » o « Il Compiuto esiste e non esiste dopo la morte » o « Ne esiste nè non esiste il Compiuto dopo la morte ». Ciò il Sublime non mi ha partecipato. E che il Sublime non me lo abbia partecipato, ciò non mi piace, ciò non mi soddisfa. Così io voglio dunque andare dal Sublime e interrogarlo su ciò. Se il Sublime me lo può partecipare, allora io voglio menare presso di lui la vita ascetica: ma se il Sublime non me lo può partecipaee, allora io tornerò alla vita ordinaria Se il Sublime sa, se il mondo è eterno o temporaneo, se è infinito o finito, e così via, allora deve parteciparmelo; e se non lo sa, allora gli conviene di dire onestamente: Non lo so „.

Così continua Mâlunkyàputto ad esporre le sue lagnanze, per non essere stato istruito in tali questioni cosmologiche ed escatologiche, finchè, avendo finito, il Maestro gli risponde, che nè Egli lo ha mai invitato a seguire presso di lui tali corsi di insegnamenti metafisici, nè il discepolo glielo ha mai chiesto: del che il discepolo stesso deve convenire. Ed allora il Maestro continua:

" Così tu confessi, dunque, Mâlunkyâputto, che ne io ho detto tali cose a te, e che neanche tu hai detto tali cose a me. Se è così, o vano, che vuoi tu e chi accusi tu? — Chi, Mâlunkyârutto, parlasse così: « Non vo-

glio menare vita ascetica presso il Sublime, finchè il Sublime non mi avrà partecipato, se il mondo è eterno od è temporaneo, se il mondo è finito od è infinito, se vita e corpo sono una sola e medesima cosa, od altro è la vita ed altro il corpo, se il Compiuto dopo la morte esiste o non esiste, od esiste e non esiste, o nè esiste nè non esiste »: il Compiuto, Mâlunkyaputto, non giungerebbe a partecipargli abbastanza, che quegli se ne morirebbe.

" Così come quasi, Mâlunkyâputto, se un uomo fosse colpito da una freccia, di cui la punta era spalmata di veleno, ed i suoi amici e compagni, congiunti e parenti gli conducessero un esperto chirurgo; ma egli dicesse: « Non voglio fare estrarre questa freccia, se prima non so, chi è quell' uomo che mi ha colpito, se un guerriero od un sacerdote, un borghese od un servo »; e dicesse: « Non voglio fare estrarre questa freccia, se prima non so, chi è quell' uomo che mi ha colpito, come si chiama, da chi discende od a chi appartiene »; e dicesse: « Non voglio fare estrarre questa freccia se prima non so, chi è quell' uomo che mi ha colpito, se è di grande o di piccola o di media statura »; e dicesse: « Non voglio far estrarre questa freccia, se prima non so chi è quell' uomo che mi ha colpito, se il colore della sua pelle è nero o bruno o giallo »; e dicesse: « Non voglio far estrarre questa freccia, se prima non conosco la natura e la forma dell' arco, della corda dell' arco, della cocca della corda, dell' asta della freccia, e della punta della freccia, che mi ha colpito; non giungerebbe, o Mâlunkyâputto, quest' uomo a saperne abbastanza, che prima se ne morirebbe. Or così anche appunto, se uno qui dice: « Io non voglio menare vita ascetica presso il Sublime, se prima il Sublime non mi avrà partecipato, se il mondo è eterno o temporaneo, se il mondo è finito od infinito, se vita e corpo sono una sola e medesima cosa, od altro è la vita ed altro e il corpo, se il Compiuto dopo la morte esiste o non esiste, o esiste e non esiste, o nè esiste nè non esiste »: il Compiuto, Mâlunkyaputto, non arriverebbe a partecipargli abbastanza, che costui morirebbe „.

Prosegue quindi Gotamo a dimostrare, come da tali questioni transcendenti non si possa far dipendere un fatto di vita pratica immanente qual' è l' ascesi; la quale deve invece derivarsi dalla pura e semplice osservazione ed esperienza della vita e del mondo. Giacchè, egli dice, che il mondo sia eterno o temporaneo, finito od infinito, che la vita ed il corpo siano una sola e medesima cosa od altro sia la vita ed altro il corpo, che il Compiuto dopo la morte esista o non esista, « certo sempre esiste nascere, esiste invecchiare, esiste morire, esistono guai, pene, dolori, strazi e disperazione, la cui distruzione io insegno già a conoscere durante la vita » E finalmente conchiude:

" Perciò dunque, Mâlunkyâputto, vogliate ritenere per non partecipato ciò che non ho partecipato, e per partecipato ciò che ho partecipato.

" Ma che cosa, Mâlunkyâputto, io non ho partecipato? « Il mondo è eterno ». Mâlunkyâputto, io non ho partecipato »; il mondo è temporaneo »

io non ho partecipato; « Il mondo è finito » io non ho partecipato; « Il mondo è infinito » io non ho partecipato; « Vita e corpo sono una sola e medesima cosa » io non ho partecipato; « Altro è la vita ed altro il corpo » io non ho partecipato; « Il Compiuto esiste dopo la morte » io non ho partecipato; « Il Compiuto non esiste dopo la morte » io non ho partecipato; « Il Compiuto esiste e non esiste dopo la morte » io non ho partecipato; « Il Compiuto nè esiste nè non esiste dopo la morte » io non ho partecipato. E perchè, Mâlunkyâputto, io non ho partecipato ciò? Perchè ciò, Mâlunkyâputto, non è salutare, non è arciascetico, non mena al distacco, non al rivolgimento, non alla dissoluzione, non al sollievo, non alla contemplazione, non al risveglio, non all' estinzione: perciò io non l' ho partecipato.

" Ma che cosa Mâlunkyâputto, io ho partecipato? « Questo è il dolore », Mâlunkyâputto, io ho partecipato; « Questa è l' origine del dolore » io ho partecipato; « Questo è l' annientamento del dolore » io ho partecipato; « Questa è la via che mena all' annientamento del dolore » io ho partecipato. E perchè, Mâlunkyâputto, io ho partecipato ciò? Perchè ciò, Mâlunkyâputto, è salutare, è arciascetico, perchè ciò mena al distacco, al rivolgimento, alla dissoluzione, al sollievo, alla contemplazione, al risveglio, all' estinzione: perciò io l' ho partecipato.

" Perciò dunque, Mâlunkyâputto, vogliate ritenere per non partecipato ciò che non ho partecipato, e per partecipato ciò che ho partecipato „. Così parlò il Sublime. Contento si allegrò Mâlunkyâputto sulla parola del Sublime.

In conclusione, tutta la parte conoscitiva, senza l'applicazione pratica, della dottrina di Buddha, come di quella di Kant, di Schopenhauer e di altri veri sapienti, in contrasto con le pretese di molti scienziati, è che l' unico *ens realissimum* e conoscibile del mondo è il dolore; ed in tale dottrina può essere incastonata, come una gemma, l' espressione dell' *Ultimo canto di Saffo* di Leopardi:

Arcano è tutto
Fuor che il nostro dolor.

La prima rappresentazione degli S_3 proiettivi legati a due algebre doppie definite nel corpo C[2]

Nota di **Angelo Fadini**. *presentata dal socio* **N. Spampinato**

(Adunanza del dì 4 Febbraio 1950)

Sunto. — In questa nota determino le congruenze di rette dell'S_3 proiettivo, definite nel corpo numerico finito $C[2]$, costituenti la 1° rappresentazione dei due S_1 proiettivi legate alle due algebre, di ordine 2, dotate di modulo, definite nel corpo numerico finito $C[2]$, con le tabelle di moltiplicazione identiche a quelle delle algebre dei numeri bireali e duali o bicomplessi e biduali, definite rispettivamente nel corpo reale o complesso.

Costruisco tali congruenze seguendo entrambi i due metodi generali indicati dal prof. Spampinato nella teoria degli S_r proiettivi ipercomplessi legati ad una algebra di ordine n qualunque, dotate di modulo, definite in un qualunque corpo numerico; spazi introdotti dallo Spampinato, e che generalizzano l'ordinario S_r proiettivo legato ad un corpo numerico, ma che ne differiscono essenzialmente per la presenza nell'algebra dei divisori dello zero, quando si tratta di un'algebra non primitiva, come le due algebre che si considerano in questa nota.

1. *L'*S_3 *lineare finito sul corpo* C[2]. — È noto che l'S_3 lineare finito sul corpo $C[2]$ contiene 15 punti, 35 rette e 15 piani; su ogni retta giacciono 3 punti e su ogni piano ne giacciono 7; per ogni punto passano 7 piani e 7 rette e per ogni retta passano 3 piani. I 15 punti dell'S_3 si possono individuare mediante i valori (mod. 2) delle coordinate ponendo:

$P_1(1000)$, $P_2(0100)$, $P_3(0010)$, $P_4(0001)$, $P_5(1100)$, $P_6(1010)$, $P_7(1001)$, $P_8(0110)$, $P_9(0101)$, $P_{10}(0011)$, $P_{11}(0111)$, $P_{12}(1011)$, $P_{13}(1101)$, $P_{14}(1110)$, $P_{15}(1111)$.

Volendo estendere all'S_3 finito in esame la nozione di congruenza di rette, consideriamo due rette sghembe, ad esempio le rette $r \equiv P_2 P_4 P_9$ ed $s \equiv P_1 P_3 P_6$. Le rette che si appoggiano sia ad r che ad s sono soltanto le nove seguenti: $P_1 P_2 P_5$, $P_1 P_9 P_{13}$, $P_1 P_4 P_7$, $P_6 P_2 P_{14}$, $P_6 P_9 P_{15}$, $P_6 P_4 P_{12}$, $P_3 P_2 P_8$, $P_3 P_9 P_{11}$, $P_3 P_4 P_{10}$. Dunque *la congruenza biassiale nell'*S_3 *finito del* C[2] *è costituita dalle nove rette che si appoggiano a due rette sghembe.*

Consideriamo invece una retta, ad esempio la $r \equiv P_2 P_4 P_9$, per essa passano tre piani $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_6$. Stabiliamo tra i piani $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_6$ ed i punti P_2, P_4, P_9

della retta r una proiettività π, tra le sei possibili, e supponiamo che in tale proiettività ai punti P_2, P_4, P_9 corrispondano ordinatamente i piani $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6$. I fasci di rette di centri P_7, P_1, P_8 e giacenti rispettivamente nei piani $\alpha_3, \alpha_1, \alpha_5$ sono costituiti ciascuno da due rette fuori di r, e precisamente dalle rette: $P_2P_4P_5$, $P_2P_7P_{13}$; $P_4P_8P_{11}$; $P_4P_3P_{10}$; $P_9P_6P_{15}$, $P_9P_{12}P_{14}$. Dunque *la congruenza monoassiale dell'* S_3 *finito del* C[2] *è costituita da sei rette distribuite in tre fasci i cui piani passano per la retta* r.

2. *L'algebra* A *definita nel* C[2]. — Tra le matrici $\xi = \left\| \begin{matrix} x & y \\ z & t \end{matrix} \right\|$ con x, y, z, t numeri del corpo $C[2]$ consideriamo quelle che hanno nulle le coordinate y e z, cioè le matrici a due unità u_1 ed u_2 del tipo:

$$\alpha = \left\| \begin{matrix} x & 0 \\ 0 & t \end{matrix} \right\| = xu_1 + tu_2$$

Al variare di x e t nel corpo $C[2]$ la matrice α descrive un insieme finito di matrici che costituisce un'algebra doppia A dotata di modulo. La tabella di moltiplicazione delle unità u_1 ed u_2 è identica a quella dell'algebra dei numeri bireali.

I numeri α dell'algebra A sono soltanto i quattro seguenti:

$$\alpha_1 = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| = u_1 + u_2 \quad , \quad \alpha_2 = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\| = u_1 \quad ,$$

$$\alpha_3 = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| = u_2 \quad ; \quad \alpha_4 = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\| = 0$$

e con essi si possono formare solo nove coppie di caratteristica due, definite a meno di un fattore non nullo nè divisore dello zero; precisamente le coppie: $(\alpha_1\alpha_1)$, $(\alpha_1\alpha_2)$, $(\alpha_1\alpha_3)$, $(\alpha_1\alpha_4)$, $(\alpha_2\alpha_3)$, $(\alpha_3\alpha_2)$, $(\alpha_2\alpha_4)$, $(\alpha_3\alpha_4)$ $(\alpha_4\alpha_4)$.

Le matrici a due righe e quattro colonne, ottenute affiancando le due matrici di ciascuna coppia, sono le seguenti:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| \cdot$$

$$\left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| , \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| .$$

3. *L'* S_1 *proiettivo legato all'algebra* A. — In ordine ad una definizione generale data dallo Spampinato diremo che l'insieme delle coppie di numeri α di caratteristica 2, costituisce un S_1 finito numerico legato all'algebra A. Ogni insieme di elementi che si possa mettere in corrispondenza biunivoca con i punti dell'S_1 numerico, si dirà S_1 proiettivo finito, legato all'algebra A.

Si dimostra agevolmente che una congruenza biassiale di rette nell'S_3 lineare del corpo $C[2]$ rappresenta un S_1 proiettivo legato all'algebra A.

Riprendiamo infatti in esame la congruenza di rette biassiale dell'S_3; le coordinate di un punto R della retta r sono del tipo $(0, x, 0, t)$ con x e t variabili in $C[2]$; mentre le coordinate di un punto S della retta s sono del tipo $(x', 0, t', 0)$ con x' ed t' variabili in $C[2]$. Ogni retta della congruenza si appoggia ad r ed s rispettivamente nei punti R ed S; al variare di x, t, x', t' si hanno tutte le rette della congruenza. In corrispondenza ad ogni tale retta formiamo la matrice a due righe e quattro colonne ponendo su due righe le coordinate di R e quelle di S; questa matrice risulta di caratteristica due e quindi individua una coppia di numeri dell'algebra A. Viceversa ad ogni coppia di numeri dell'algebra A, ossia ad ogni matrice del tipo:

$$\begin{Vmatrix} x & 0 & x' & 0 \\ 0 & t & 0 & t' \end{Vmatrix}$$

possiamo far corrispondere una retta della congruenza; dunque *la congruenza biassiale lineare dell'* S_3 *del* $C[2]$ *costituisce un* S_1 *proiettivo finito legato all'algebra* A.

4. *Il gruppo equivalente.* — Consideriamo la matrice quadrata di 4° ordine, composta con quattro matrici quadrate del 2° ordine del tipo:

$$(\mathfrak{M}) = \begin{Vmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{Vmatrix}$$

essendo M la trasposta della matrice dell'elemento corrente dell'algebra A ed 0 la matrice nulla; poichè la matrice M coincide con la sua trasposta si ha:

$$(\mathfrak{M}) = \begin{Vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{Vmatrix}$$

lo Spampinato ha dimostrato [1]) che ogni algebra di ordine n, dotata di modulo, definita in un qualunque corpo numerico, determina nello spazio proiettivo, legato al corpo, un gruppo di proiettività equivalente all'algebra

[1]) Spampinato N., *Le riemanniane degli* S_r *ipercomplessi*. Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat., Napoli, serie 4, vol. XIII, 1942-45.

stessa e la cui matrice dei coefficienti è la $(\mathfrak{M})$. Pertanto le equazioni del gruppo di proiettività equivalente all'algebra A in esame sono:

$$\left.\begin{aligned} \rho'_1 &= x\,\rho_1 \\ \rho'_2 &= t\,\rho_2 \\ \rho'_3 &= x\,\rho_3 \\ \rho'_4 &= t\,\rho_4 \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

Questo gruppo ha due soli parametri omogenei x e t i quali possono assumere soltanto i valori 0 ed 1; esso quindi è di 4° ordine (di 3°, se si esclude che sia $x = t = 0$).

Il gruppo [1] contiene dunque le 4 proiettività seguenti:

$$\begin{cases} \rho'_1 = \rho_1 \\ \rho'_2 = \rho_2 \\ \rho'_3 = \rho_3 \\ \rho'_4 = \rho_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho'_1 = \rho_1 \\ \rho'_2 = 0 \\ \rho'_3 = \rho_3 \\ \rho'_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho'_1 = 0 \\ \rho'_2 = \rho_2 \\ \rho'_3 = 0 \\ \rho'_4 = \rho_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho'_1 = 0 \\ \rho'_2 = 0 \\ \rho'_3 = 0 \\ \rho'_4 = 0 \end{cases}$$

delle quali la prima è l'identità e le altre tre sono degeneri; esse corrispondono ai quattro numeri dell'algebra A.

I punti uniti della generica proiettività [1] si hanno in corrispondenza dei valori di $\rho_1\,\rho_2\,\rho_3$ e ρ_4 pei quali si ha: $\rho'_1 : \rho'_2 : \rho'_3 : \rho'_4 = \rho_1 : \rho_2 : \rho_3 : \rho_4$ e pertanto, escludendo l'identità, si hanno le due terne di punti uniti: P_1, P_3, P_6, e P_2, P_4, P_5 che costituiscono due rette unite.

Se $P\,(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)$ è un punto di S_3, l'omologo per le [1] è $P'\,(x\rho_1, t\rho_2, x\rho_3, t\rho_4)$. Al variare di x e t nel $C[2]$ P' descrive la varietà invariante minima del gruppo e si riconosce agevolmente che tale varietà è la retta passante per P ed appoggiantesi alle rette unite, basta osservare che le equazioni di tale varietà invariante minima sono:

$$\frac{\rho_1}{\rho_3} = \frac{\rho_2}{\rho_4} = C_1 \quad ; \qquad \frac{\rho_2}{\rho_3} = \frac{\rho_2}{\rho_4} = C_2$$

Possiamo dunque affermare che *la totalità delle varietà invarianti minimo del gruppo equivalente all'algebra* A, *generate dai punti generici dell'* S_3, *costituisce una congruenza lineare di rette dell'* S_3 *del* C[2], *che fornisce una 1° rappresentazione in* S_3 *dell'* S_4 *proiettivo legato all'algebra* A, *definita nel corpo finito* C[2].

5. *L'algebra* B *definita nel corpo* C[2]. — In modo analogo al precedente si tratta il caso dell'algebra B. Questa è data dall'insieme delle

matrici del tipo:

$$\beta = \left\| \begin{matrix} x & y \\ 0 & x \end{matrix} \right\| = xu + y\varepsilon$$

al variare di x ed y nel $C[2]$, e contiene solo i quattro numeri:

$$\beta_1 = u + \varepsilon \quad , \quad \beta_2 = u \quad , \quad \beta_3 = \varepsilon \quad ; \quad \beta_4 = 0$$

Con questi quattro numeri si possono formare dodici coppie di caratteristica due, delle quali soltanto sei sono definite a meno di un fattore di proporzionalità non nullo nè divisore dello zero; esse sono;

$$(\beta_1 \beta_3) \; ; \; (\beta_1 \beta_2) \; ; \; (\beta_4 \beta_3) \; ; \; (\beta_1 \beta_4) \; ; \; (\beta_3 \beta_1) \; ; \; (\beta_4 \beta_1)$$

Affiancando le due matrici di ciascuna coppia si ottengono le sei seguenti matrici a due righe e quattro colonne:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| ; \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| ; \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| ; \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| ; \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| ; \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|$$

6. *L'* S_4 *proiettivo legato all'algebra* B. — L' S_4 proiettivo legato all'algebra B si rappresenta nella congruenza monoassiale di rette dell'S_3 del $C[2]$. Infatti se $\left\| \begin{matrix} x & y & x' & y' \\ 0 & x & 0 & x' \end{matrix} \right\|$ (*) è una delle sei matrici di caratteristica 2, corrispondenti alle coppie di numeri dell'algebra B, i due punti dell'S_3, certo distinti, $P(x\,y\,x'\,y')$ e $Q(0\,x\,0\,x')$ aventi per coordinate rispettivamente la 1° e la 2° riga della matrice (*) individuano una retta r. Al variare di x, y, x', y', con la condizione che x ed x' non siano entrambi nulli la matrice (*) descrive l'insieme delle 6 matrici corrispondenti alle 6 coppie dell'algebra, mentre la retta r varia nell'S_3 e descrive la congruenza monoassiale. Viceversa ad ogni retta della congruenza possiamo far corrispondere una delle coppie di numeri dell'algebra B. *Dunque la congruenza monoassiale lineare dell'* S_3 *del* $C[2]$ *costituisce un* S_4 *proiettivo finito, legato all'algebra* B.

7. *Il gruppo equivalente.* — Applicando anche all'algebra B il teorema citato dello Spampinato si viene a determinare la congruenza monoassiale, immagine dell'S_3, mediante il gruppo equivalente.

La matrice $(\mathfrak{M})$ per l'algebra B è:

$$(\mathfrak{M}) = \left\| \begin{matrix} x & 0 & 0 & 0 \\ y & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y & x \end{matrix} \right\|$$

e quindi il gruppo di proiettività equivalente all'algebra B, definita nel corpo $C[2]$, ha le equazioni:

$$\begin{cases} \rho'_1 = x\rho_1 \\ \rho'_2 = y\rho_1 + x\rho_2 \\ \rho'_3 = x\rho_3 \\ \rho'_4 = y\rho_3 + x\rho_4 \end{cases} \qquad [2]$$

Anche questo gruppo di proiettività è di 4° ordine e si compone delle 4 proiettività:

$$\begin{cases} \rho'_1 = \rho_1 \\ \rho'_2 = \rho_2 \\ \rho'_3 = \rho_3 \\ \rho'_4 = \rho_4 \end{cases} \quad \begin{cases} \rho'_1 = \rho_1 \\ \rho'_2 = \rho_1 + \rho_2 \\ \rho'_3 = \rho_3 \\ \rho'_4 = \rho_3 + \rho_4 \end{cases} \quad \begin{cases} \rho'_1 = 0 \\ \rho'_2 = \rho_1 \\ \rho'_3 = 0 \\ \rho'_4 = \rho_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \rho'_1 = 0 \\ \rho'_2 = 0 \\ \rho'_3 = 0 \\ \rho'_4 = 0 \end{cases}$$

delle quali la prima è l'identità e le ultime due sono degeneri. Esse corrispondono ai quattro numeri dell'algebra B.

I punti uniti della generica proiettività del gruppo sono quelli le cui coordinate soddisfano alla relazione:

$$x\rho_1 : (y\rho_1 + x\rho_2) : x\rho_3 : (y\rho_3 + x\rho_4) = \rho_1 : \rho_2 : \rho_3 : \rho_4$$

e pertanto, escludendo l'identità, si hanno i soli tre punti uniti: P_2, P_4, P_5 che costituiscono una retta unita.

L'omologo P' di un generico punto $P(\overline{\rho_1}\ \overline{\rho_2}\ \overline{\rho_3}\ \overline{\rho_4})$ di S_3 è per le [2]: $P'(x\overline{\rho_1}, y\overline{\rho_1} + x\overline{\rho_2}, x\overline{\rho_3}, y\overline{\rho_3} + x\overline{\rho_4})$ Al variare di x ed y nel corpo $C[2]$ P' descrive la varietà invariante minima del gruppo [2] collegata al punto P. Le equazioni parametriche di questa varietà, con x ed y parametri omogenei, sono:

$$\begin{cases} \rho_1 = x\overline{\rho_1} \\ \rho_2 = y\overline{\rho_1} + x\overline{\rho_2} \\ \rho_3 = x\overline{\rho_3} \\ \rho_4 = y\overline{\rho_3} + x\overline{\rho_4} \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{array}{l} \dfrac{\rho_1}{\rho_3} = \dfrac{\overline{\rho_1}}{\overline{\rho_3}} = C_4 \\ \overline{\rho_1}\rho_2 + \overline{\rho_2}\rho_4 = y(\rho_2\rho_3 + \rho_1\rho_4) \end{array}$$

dunque: la varietà invariante minima del gruppo [2] è la retta passante per P ed appoggiantesi alla retta $P_2 P_4 P_5$; e quindi, al variare di P nell'S_3, la varietà invariante minima descrive la congruenza monoassiale.

Possiamo dunque concludere affermando che *la totalità delle varietà invarianti minime del gruppo equivalente all'algebra* B, *generate dai punti generici dell'* S_3, *costituisce una congruenza monoassiale di rette dell'* S_3 *del* $C[2]$, *che fornisce una 1° rappresentazione in* S_3 *dell'* S_1 *proiettivo legato all'algebra* B, *definita nel corpo finito* $C[2]$.

Nozioni introduttive alla teoria delle ipersuperficie algebriche di indice n dell'S_r proiettivo complesso.

Nota VI del socio ordinario **Nicolò Spampinato**

(Adunanza del dì 4 marzo 1950)

Sunto. — In questa VI nota, facendo sèguito alle cinque note precedenti [1]), comprendenti i n^{i} da 1 a 40, si introducono le prime nozioni relative alla *Geometria algebrica d'indice di algebricità qualunque*, in particolare *virtuale o ideale, sopra una superficie algebrica ordinaria.*

41. *Curve algebriche totali, d'indice di algebricità* n, *sopra un'ordinaria superficie algebrica e relativi gruppi sezioni iperpiane.*

Sia V_2^* un'ordinaria superficie algebrica dell'S_r proiettivo complesso ($r \geq 3$). Indichiamo con J_2^* il sostegno [2]) di V_2^*, cioè l'insieme dei punti di V_2^*, considerato indipendentemente dalla multiplicità che ciascuno di tali punti ha per la V_2^*. Indichiamo con $J_2^*(X^*, \rho^*)$ l'insieme dei rami ρ^*, di origine X^* [con l'esponente all'origine X^* nullo o non nullo [3])] con il sostegno appartenente al sostegno J_2^* di V_2^*.

Consideriamo in S_r una ipersuperficie algebrica generale W_{r-1} con l'indice di algebricità n qualunque, determinata da una data funzione algebrica semiomogenea $y = f(x_1 \ldots x_{r-1})$ definita implicitamente dall'equazione algebrica

$$[1] \qquad \varphi_0(x_i)\, y^n + \varphi_1(x_i)\, y^{n-1} + \ldots + \varphi_n(x_i) = 0$$

[1]) N. Spampinato, Nozioni introduttive alla teoria delle ipersuperficie algebriche d'indice n dell'S_r proiettivo complesso, Rend. dell'Acc. di Sc. fis. e mat. di Napoli, Serie 4., voll. XIV, XV e XVI (1946-47-48-49), Note I, ... V.

N. Spampinato, *Lezioni di Geometria superiore*, Casa Editrice Pironti, Napoli, vol. III, Parte Terza, (In tale parte sono dimostroti i teoremi enunciati nelle note I, II, III, IV), vol. VI, Parte Seconda, (In tale parte sono dimostrati i teoremi enunciati nella nota V)

[2]) Il concetto di *sostegno* di una ipersuperficie è introdotto nel n. 3 della nota I, 1946, citata in [1]).

[3]) La nozione di *ramo semplice o multiplo o generale* in S_r è introdotta nel vol. III citato in [1]). Parte Terza, § 9, n. 89 e 95. Il caso $r = 2$ è trattato nella Parte Seconda, § 6, n. 2, 3, 5.

Posto

$$W_{r-1} = [J_{r-1}, N(X, \rho)],$$

supponiamo che il generico ramo ρ^*, col sostegno in J_2^*, non abbia tale sostegno appartenente al sostegno J_{r-1} di W_{r-1}. La funzione $N(X, \rho)$ è data da [1])

$$N(X, \rho) = \Phi[N_0(X, \rho), \ldots, N_n(X, \rho)]$$

essendo $N_i(X, \rho)$ la multiplicità d'intersezione di ρ con la ipersuperficie ordinaria Γ_i di equazione $\varphi_i(x_i) = 0$ nella sua origine X, [quando $\varphi_i(x_i)$ non è costante o identicamente nulla].

Per un generico ramo ρ^* di J_2^* di origine X^* la $N(X, \rho)$ assumerà n determinati *valori razionali* $\gamma_1^*, \ldots, \gamma_n^*$, dati da

$$N(X^*, \rho^*) = \Phi[N_0(X^*, \rho^*), \ldots, N_n(X^*, \rho^*)]$$

La funzione $N(X^*, \rho^*)$, con ρ^* in J_2^*, è la *funzione subordinata* da $N(X, \rho)$ nell'insieme $J_2^*(X^*, \rho^*)$ dei rami contenuti in J_2^*.

Indichiamo ora con J_1^* l'intersezione del sostegno J_2^* di V_2^* con il sostegno J_{r-1} di W_{r-1}. L'ente

$$W_1^* = [J_1^*, N(X^* \rho^*)]$$

che si ottiene associando all'insieme algebrico J_1 la funzione, ad n valori $N(X^* \rho^*)$, definita in $J_2^*(X^* \rho^*)$, se la V_2^* è primitiva, cioè irriducibile o riducibile priva di parti multiple, è la *curva algebrica* d'indice di algebricità n, ottenuta *intersecando per subordinazione* la superficie ordinaria V_2^* con la ipersuperficie W_{r-1} d'indice di algebricità n [2]). La W_1^* si dirà una *curva algebrica totale, d'indice di algebricità* n, *della superficie ordinaria primitiva* V_2^*.

Tale definizione si estende al caso che V_2^* sia non primitiva.

Le operazioni fondamentali nel campo delle curve W_1^* *algebriche totali d'indice di algebricità qualunque di una superficie ordinaria* V_2^*, *ottenute per intersezione per subordinazione con le ipersuperficie* W_{r-1} *dell'* S_r *ambiente, si fanno derivare dalle relative operazioni nel campo di queste ipersuperficie* [3]).

---

[1]) La funzione Φ è introdotta nel vol. III cit. [1]) Parte Terza, § 1, n. 6.

[2]) Vedi vol. III, cit. in [1]), Parte Seconda, Introduzione o nota V, n. 32.

[3]) Vedi vol. III, cit. in [1]), Parte Terza, § 2.

Sia X^* un punto del sostegno J_1^* di W_1^* e sia S_{r-1} un iperpiano di S_r condotto genericamente per V_1^* e quindi secante V_2^* in una curva V_1^*. La W_{r-1}, secante su V_2^* *per subordinazione* la W_1^*, secherà su V_1^* di V_2^*, *per subordinazione*, un gruppo algebrico totale W_0^* d'indice di algebricità n. Tale gruppo W_0^* si dirà pure *il gruppo* W_0^* *d'intersezione di* W_1 *con l'iperpiano* S_{r-1} condotto per X^*. Le n sottomulticità $\lambda_1^*, .., \lambda_n^*$ di W_0^* nel punto X^* si diranno *le* n *sottomultiplicità di* W_1^* *in* X^*. Così pure la *multiplicità*

$$\mu^* = \frac{1}{n}(\lambda_1^* + .. + \lambda_n^*)$$

di W_0^* in X^* si dirà *la multiplicità di* W_1^* *in* X^*. L'ordine ν^* del gruppo W_0^*, sezione iperpiana di W_1^*, si dirà *ordine* della W_1^*.

Si dimostra che:

I) *L'ordine* ν^* *della curva algebrica totale* W_1^*, *intersezione per subordinazione della ipersuperficie* W_{r-1}, *d'indice di algebricità* n, *con la superficie ordinaria* V_2^*, *è dato dal prodotto dell'ordine* m^* *di* V_2^* *per l'ordine* ν *di* W_{r-1}.

Segue che è

$$\nu^* = \frac{n^*(m_n - m_0)}{n}$$

essendo m_n e n_0 i gradi di φ_n e φ_0.

Le relazioni di *coincidenza assoluta*, *equivalenza funzionale*, *equivalenza ideale* o *coincidenza in media*, già introdotte per le ipersuperficie W_{r-1} [1]) si introducono, in modo analogo, per le curve algebriche W_1^* delle superficie V_2^*, ottenute con intersezione per subordinazione delle W_{r-1} su V_2^*.

42. *Sistemi mono-lineari di curve totali* W_1 *sopra* V_2^*.

Sia V_2^* una superficie algebrica ordinaria, *irriducibile*, di S_r, e sia $\Sigma_k^{(p,q)}$ un sistema monolineare ∞^k di esponenti p, q, determinato dall'equazione [2])

$$[1'] \quad [\lambda_0 f_0'(x_j) + .. + \lambda_k f_k'(x_j)]^p y^n + ... + [\lambda_0 f_0'(x_j) + .. + \lambda_k f_k'(x_j)]^q = 0,$$

determinato da $k+1$ ipersuperficie $W_{r-1}'^{(0)}, \ldots W_{r-1}'^{(k)}$ *monolinearmente in-*

---

[1]) Vedi vol. III, cit. in [1]), Parte Terza, § 2, § 3 e § 4.

[2]) Vedi vol. III, cit. in [1]), Parte Terza, § 9.

dipendenti, rispondeti alle $(n+1)$ple di ipersuperficie ordinarie di S_r

$$[p\, V_{r-1}^{(j)},\ \Gamma^{(j,1)}, .., \Gamma^{(j,n-1)}, q\, V_{r-1}^{(j)}]$$

con $V_{r-1}^{(0)}, .., V_{r-1}^{k}$, $k+1$ ipersuperficie ordinarie, $(j = 0 .., k)$ dello stesso ordine m, linearmente indipendenti, e $\Gamma^{(0,i)}, \ldots, \Gamma^{(k,i)}$ per i fisso, (con $0 \leq i \leq n-1$) o tutte concidenti con Ω o tutte coincidenti con $\mathbf{T}$ [1]) o tutte ipersuperficie dello stesso ordine $m_i > 0$.

Il sistema lineore $\infty^k\ [V_{r-1}]$ di ipersuperficie ordinarie di ordine m, di equazione

$$\lambda_0 f_0(x_j) + . + \lambda_k f_k(x_j) = 0$$

è il *sistema base* del sistema monolineare $\Sigma_k^{(p,q)}$.

Supponiamo che la V_2^* non appartenga alla varietà base del sistema lineare $[V_{r-1}]$. In tale ipotesi la W_{r-1} variabile in $\Sigma_k^{(p,q)}$ seca, per subordinazione, sulla V_2^* una curva totale W_1^* di indice di algebricità n (indice di W_{r-1}) e di ordine $\nu^* = \nu m^*$, essendo ν l'ordine delle W_{r-1} del sistema $\Sigma_k^{(p,q)}$ ed m^* l'ordine di V_2^*. Essendo $\nu = (q-p)m$ sarà

$$\nu^* = (q-p)\, m\, m^*$$

Il sostegno J_1^* di W_1^* sarà l'intersezione del sostegno J_{r-1} di W_{r-1} con il sostegno J_2^* di V_2^* e perciò sarà il sostegno della curva algebrica ordinaria Γ_1^*, di ordine mm^*, intersezione di V_2^* con V_{r-1}, e varierà nel sistema lineare ordinario $\infty^{k'}$ $(k' \leq k)$ $[V_1^*]$ che il sistema lineare di ipersuperficie ordinarie $[V_{r-1}]$ seca su V_2^*.

Se è $k' = k$, cioè se la V_2^* non appartiene ad alcuna ipersuperficie di $[V_{r-1}]$, ogni W_1^*, ottenuta come intersezione per subordinazione di V_2^* con una W_{r-1} di $\Sigma_k^{(p,q)}$, non si può ottenere da un'altra W_{r-1} di $\Sigma_k^{(p,q)}$. Tali curve W_1^* sono, in tal caso ∞^k ed i loro sostegni sono i sostegni delle ∞^k curve V_1 del sistema lineare $[V_1]$ che $[V_{r-1}]$ seca su V_2^*. Tale insieme di curve W_1^* di V_2^* si dirà uu sistema *monolineare* ∞^k, *di esponenti* (p, q), *di curve algebriche totali di indice di algebricità* n, *sulla superficie algebrica ordinaria* V_2^*, e lo indicheremo con $\sigma_k^{(p,q)}$. Il sistema $[V_1^*]$ si dirà *il sistema lineare base* di $\sigma_k^{(p,q)}$.

Se è $k' < k$ per ogni sistema $[V_{r-1}]'$, lineare, $\infty^{k'}$, contenuto in $[V_{r-1}]$ e secante su V_2^* il sistema lineare $[V_1]$, si ha, in corrispondenza, dentro $\Sigma_k^{(p,q)}$, un sistema monolineare $\Sigma_{k'}^{(p,q)}$ che si ottiene facendo variare $\lambda_0, \ldots, \lambda_k$

[1]) Vedi vol. III, cit. in [1]), Parte Terza, § 6, n. 1.

nelle [1'] con le formole che rappresentano $[V_{r-1}]$ dentro $[V_{r-1}]$. Il sistema $\Sigma_{k'}^{p,q}$ seca su V_2^* un sistema monolineare $\sigma_{k'}^{p,q}$, avente per sistema base il sistema $[V_1]$. Dentro $[V_{r-1}]$ esistono infiniti sistemi $\infty^{k'}$ secanti su V_2^* lo stesso sistema $[V_1]$. In corrispondenza si hanno dentro $\Sigma_k^{(p,q}$ infiniti sistemi $\Sigma_{k'}^{p,q}$ secanti su V_2^* infiniti sistemi monolineari $\sigma_{k'}^{[p,q]}$, in generale distinti fra di loro, aventi lo stesso sistema base $[V_1]$.

Nel *caso ideale*, però, *tali sistemi* $\sigma_{k'}^{[p,q]}$ *sono sempre coincidenti* e si ha che:

II) *Un sistema molineare di curve ideali di indice* n *su* V_2^* *si ottiene da un sistema lineare ordinario di curve* $[V_1]$ *di* V_2^* *moltiplicando per* $s = q - p$ *e dividendo per* n *ciascuna curva di* $[V_1]$

43. *Sistemi t-lineari di curve totali* W_1 *su* V_2^*.

Date sulla V_2^* irriducibile t sistemi monolineari $\Sigma_{k_i}^{(p_i q_i)}$ $(i = 1 .., t)$ la curva $W_1 = W_1^{(1)} + .. + W_1^{(t)}$ con $W_1^{(i)}$ variabile in $\Sigma_{k_i}^{(p_i q_i)}$ descrive un insieme che dicesi *sistema* t-lineare di curve W_1 totali e si indicherà con $\Sigma_{k_1 + .. + k_t}^{[p_1, .., p_t, q_1, .., q_t]}$. I sistemi di curve ideali, posto $s_i = q_i - p_i$ si indicheranno con

$$\sigma_{k_1 + \ldots + k_t}^{[s_1, .., s_t]}$$

Come i sistemi t-lineari di W_{r-1}, sempre supposta la V_2^* irriducibile, i sistemi t-lineari σ si distinguono in 7 specie. Nel caso ideali i sistemi lineari

$$\sigma_k^{[0]}, \quad \sigma_k^{[-1]}, \quad \sigma_k^{[1]}, \quad \sigma_{k_1 + k_2}^{[-1,0]}, \quad \sigma_{k_1 + k_2}^{[-1,1]}, \quad \sigma_{k_1 + k_2}^{[1,0]}, \quad \sigma_{k_1 + k_2 + k_3}^{[1,-1,0]}$$

si diranno *normali*. Si ha che

III) *Ogni serie t-lineare di curve ideali totali su una superficie irriducibile è contenuta in una serie normale da essa determinata.*

44. Nota. Le nozioni introdotte nei numeri 41, 42 e 43 si estendono al caso di una superficie riducibile. Si ha che *per lo studio delle serie t-lineari sopra una superficie basta considerare le superficie primitive* (cioè irriducibili o riducibili, prive di parti multiple).

45. *L'equivalenza razionale fra le curve* W_1 *totali sopra una superficie algebrica irriducibile o primitiva.*

Due curve algebriche W_1 e W_1 totali di una superficie V_2^* irriducibile si diranno *razionalmente equivalenti* se sono secate su V_2^*, per subordinazione, da due ipersuperficie W_{r-1} e W_{r-1} razionalmente equivalenti [1]). *Tale equivalenza razionale gode della proprietà transitiva.*

Il concetto di *equivalenza razionale si estende alle curve* delle superficie primitive.

Nel *caso ideale* l'equivalenza razionale sopra una superficie primitiva si può anche definire a mezzo dei sistemi t-lineari normali nel seguente modo: *due curve ideali totali di una superficie algebrica primitiva* V_2 *sono razionalmente equivalenti se sono coincidenti in media a due curve di* V_2 *appartenenti ad uno stesso sistema t-lineare.*

Per la proprietà III un tale sistema si può supporre che sia uno dei sette tipi normali (n. 44).

46. *Gruppi algebrici totali e parziali, di indice di algebricità qualunque, di una superficie algebrica ed operazioni relative.*

Nella nota V abbiamo introdotto i *gruppi algebrici totali e parziali*, d'indice di algebricità qualunque, e relativi *elementi* (n. 38), di un'ordinaria curva algebrica V_1^*. Se la V_1^* *appartiene* ad una superficie algebrica ordinaria V_2^* [nel senso che il sostegno J_1^* di V_1^* è contenuto nel sostegno J_2^* di V_2^*, e l'insieme delle coppie punto-ramo $V_1^*(X, \rho')$ determinato da V_1^* appartiene all'insieme delle coppie punto-ramo $V_2^*(X, \rho')$ determinato da V_2^* ogni *gruppo algebrico* totale o parziale W_0 ed ogni *elemento* $E \equiv [X', \rho', (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)]$ di V_1^* [2]), si dirà pure, rispettivamente, *gruppo algebrico* totale o parziale, ed *elemento*, d'indice di algebricità n, *della superficie* V_2^*. Un tale gruppo W_0 nel caso che sia totale sarà intersezione *per subordinazione* su una V_1^* di V_2^* con una ipersuperficie W_{r-1}, d'indice di algebricità eguale a quello di W_0. Se diciamo W_1 la curva secata su V_2^*, persubordinazione, da W_{r-1} (n. 41), il gruppo W_0 si dirà pure *il gruppo d'istersezione totale delle due curve* V_1^* *e* W_1 *di* V_2^*. (la prima curva algebrica è ordinaria, la seconda è d'indice di algebricità qualunque).

Se il gruppo totale o parziale W_0 è dato da $W_0 \equiv [J_0, N(X^*, \rho^*)]$, con la funzione numerica $N(X^*, \rho^*)$ definita dall'insieme $J^*(X^*, \rho^*)$ delle coppie punto-ramo di V_1^*, al fine di poter estendere le operazioni fondamentali

---

[1]) Vedi vol. III, Parte Terza, n. 71.

[2]) Vedi vol. VI, Parte Seconda, n. 15.

di *somma, differenza, prodotto per un intero relativo* m, *quoto per un intero relativo* $m \neq 0$ nel campo dei gruppi W_0 di V_2^*, conviene considerare una tale funzione numerica $N(X^*, \rho^*)$ definita nell'intero insieme $J_2^*(X, \rho^*$ delle coppie punto-ramo di V_2^* assumendo, per definizione, lo zero ripetuto tante volte quante sono le unità dell'indice di algebricità, come valori assunti da tale funzione $N(X^*, \rho^*)$, nel caso che la coppia punto-ramo (X^*, ρ^*) di $J_2^*(X^*, \rho^*)$ non appartenga a $J_1(X^*, \rho^*)$.

Dopo tale convenzione, come s'è fatto per i gruppi W_0 di una curva algebrica ordinaria V_1^*, *le operazioni fondamentali si estendono all'insieme dei gruppi algebrici totali o parziali* W_0 *della superficie algebrica* V_2^*.

Indagini intorno ad un caolino proveniente dal tenimento di Serrenti (Cagliari).

Nota del Dr. **Riccardo Sersale** *presentata dal socio* **G. Malquori.**

(Adunanza del dì 4 marzo 1950)

Sunto. — L'A. descrive le caratteristiche costituzionali e tecnologiche di quel caolino, che è risultato particolarmente adatto alla produzione di materiali refrattari.

I materiali caolinari del territorio di: Serrenti - Furtei sono stati oggetto in passato, ed in questo stesso Istituto [1], di un assieme di indagini con le quali si son potute porre in evidenza le loro caratteristiche costituzionali e le loro proprietà tecnologiche.

Nel lavoro precedente, che contiene una breve descrizione della giacitura dei materiali in questione, è fatto cenno al ritrovamento sporadico di zone dove la caolinizzazione della roccia madre: trachitica o trachiandesitica e totale ed in conseguenza il prodotto che da detta alterazione deriva è del buon caolino con titolo di allumina superiore al 33 %.

Allo stato, tuttavia, delle escavazioni all'epoca del campionamento: 1942, le zone di cui sopra erano rappresentate da noduli e filoncelli, capricciosamente distribuiti, e di potenza trascurabile a fini pratici. Non si era cioè ancora trovato uno strato di potenza tale da assicurare un discreto volume di produzione distribuibile in un non brevissimo intervallo di tempo.

---

[1]) O. Amati. *Il caolino del Monte Porceddu, in territorio di Serrenti (Cagliari).* Ricerca scientifica, *14*, 31, 1943.

All'apertura di nuovi fronti di cava si è avuta la gradita sorpresa di imbattersi in una di codeste zone di totale caolinizzazione « in situ » della roccia madre, cioè di trovare un cospicuo giacimento di ottimo materiale, come è risultato dalla identificazione delle sue caratteristiche che descriviamo qui di seguito.

Si presenta in roccia, in masse compatte di buona resistenza meccanica, di color bianco con venature rosate.

In sezione sottile (Tav. I, fig. 1) è visibile la tessitura fluidale e la presenza di inclusi ferriferi. Esaminato al microscopio, in polvere, si notano inoltre dei granuli di quarzo di discrete dimensioni. La massa fondamentale è birifrangente ed il suo indice di rifrazione è risultato di: 1,5603.

Polverizzato, si disperde nell'acqua con difficoltà e fornisce delle torbide poco stabili che accusano dei valori di p H compresi fra: $6,8 \div 7,0$.

La composizione chimica di un campione medio fra i diversi arrivi all'Istituto [1]) è la seguente:

1) — Perdita a 110°.	1,51 %
2) — Perdita al fuoco (dopo essicc. a 110°). . . .	12,96 %
3) — SiO_2	46,08 %
4) — Al_2O_3.	35,88 %
5) — Fe_2O_3	2,04 %
6) — TiO_2	0,41 %
7) — $Na_2O + K_2O$	1,02 %
8) — Perdite e non dosato	0,10 %
	100,00 %

I solfati non vi sono contenuti che in tracce.

L'analisi razionale, eseguita secondo il metodo Berdel, ha fornito:

a) — « quarzo »	2,90 %
b) — « feldspato »	1,22 %

Siamo quindi in presenza di un materiale del tipo caolinite, povero di quarzo e di feldspato, contenente, per contro, del ferro in notevole percentuale sotto forma sia di noduletti ferriferi dovuti all'alterazione di granelli di pirite originariamente presenti nella roccia madre, sia di venature attribuibili a deposizione del ferro da soluzioni imbimbenti.

Le analisi: termica differenziale, termodilatometrica (Chevenard) e termoponderale, confermano il risultato delle indagini precedenti ed indicano essere la caolinite il solo minerale siallittico presente.

---

[1]) Il materiale di studio ci è stato inviato dalla Soc. An. Nazion. Argille Caolini (« S.A.N.A.C. ») di Cagliari.

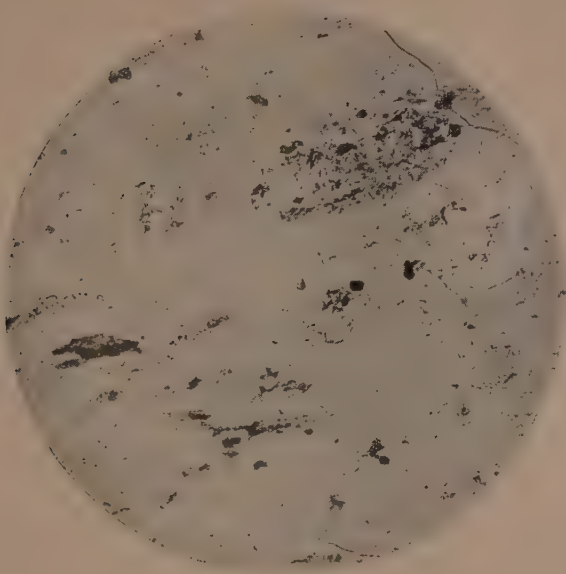


Fig. 1

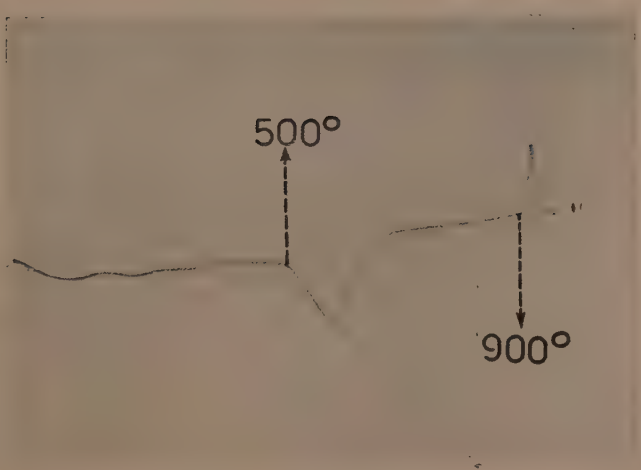


Fig. 2

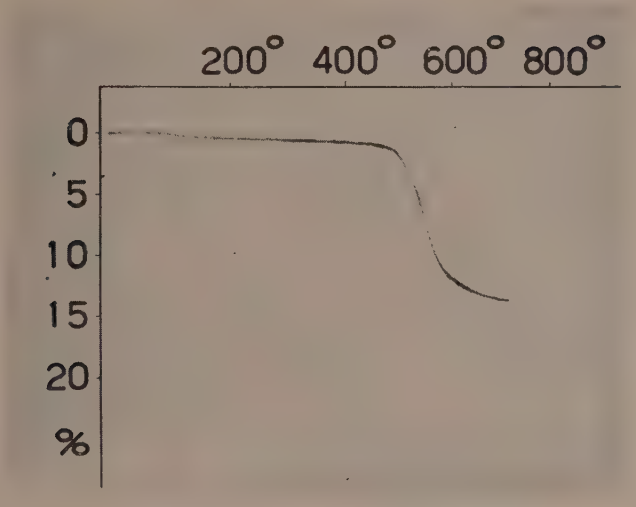


Fig. 3

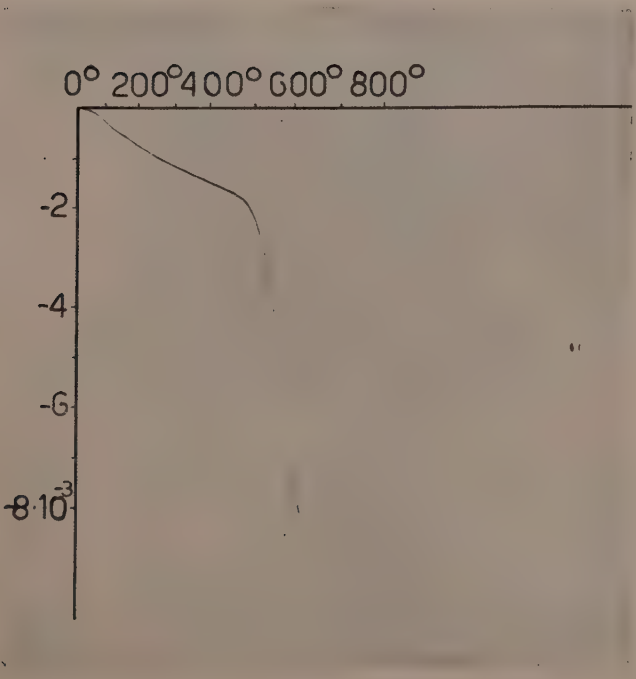


Fig. 4

Sulla curva termica differenziale (Tav. I, fig. 2) si notano infatti due soli effetti: uno endotermico che si inizia intorno ai 500° ed è dovuto alla dipartita dell'acqua della caolinite; l'altro, esotermico, che a sua volta si inizia verso i 900° ed è attribuito alla cristallizzazione di α Al_2O_3 proveniente dalla precedente scissione della caolinite (a 500°).

Le curve: termoponderale (perdita di peso-temperatura) e termodilatometrica confermano il risultato dell'analisi termica in quanto, solo intorno a 500° esse accusano la disidratazione: la prima con la registrazione della perdita di peso, la seconda con la notevolissima contrazione.

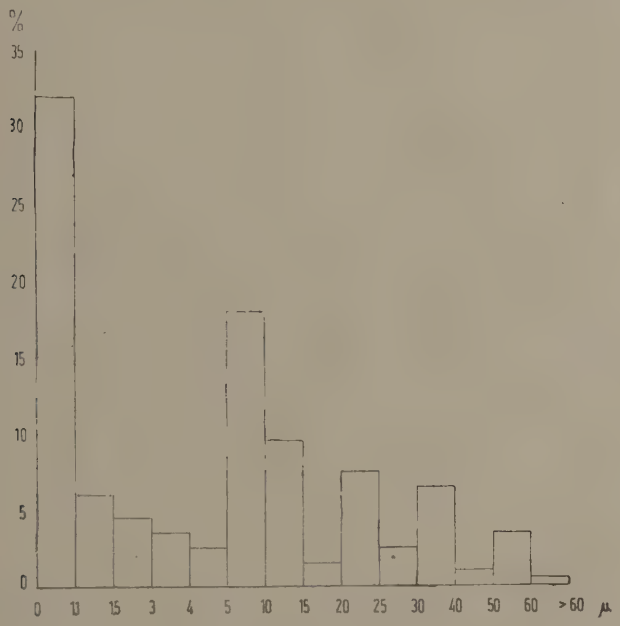


Fig. 5

Nelle fig. 3 e 4 della Tav. II riportiamo la relativa documentazione fotografica originale.

Come fu accennato nel lavoro precedente, la magrezza del caolino in roccia del territorio di Serrenti-Furtei si deve ai veli di silice che cementano le particelle di caolinite inibendone o comunque ostacolandone la dispersione in acqua, talchè tali materiali risultano magri alle finezze usuali.

Il caolino in esame, passato al vaglio di 10 000 maglie-cm² e dibattuto con soluzione N/100 di NH_3, fornisce delle torbide la cui composizione granulometrica, valutata servendoci della pipetta di Andreasen, è indicata nel grafico della fig. 5.

Le caratteristiche tecniche le abbiamo rilevate su materiale passante

al setaccio di 4900 maglie-cm², seguendo i dettami della « Deutsch. Keram. Gesell. ».

Esse sono le seguenti:

1) — Acqua per l'impasto normale % 36
2) — Ritiro lineare % (su pasta normale) { all'aria . . 3,2 / a 110°÷120. . 4.0
3) — Plasticità Rieke 3
4) — Carico di rottura (Kgr-cm² su provino di pasta normale seccata a 110°) 7
5) — Ritiro lineare %, a 1400° (su provino di pasta normale seccato a 110°) 4
6) — Porosità %, a 1440° (su provino di pasta normale seccato a 110°) 4
7) — Refrattarietà . . . . . C. S. 35
8) — Temperatura di sinterizzazione . . . . C. S. > 14

Il notevole contenuto di ferro di questo caolino, più che indicarlo per le porcellane o le terraglie forti, ne relega l'impiego al settore dei refrattari.

Abbiamo voluto sperimentarlo in tale direzione, e per questo, chamottato del materiale in pezzi al C. S. 10, e granulata opportunamente questa chamotte, l'abbiamo associata con 50 % di caolino crudo, macinato e passato al vaglio di 900 maglie-cm². Con la miscela, a mezzo della formatura alla pressione di 700 Kgr-cm², si son ottenute delle mattonelle che sono state cotte al C. S. 10.

Da queste si son poi ricavati i provini che sottoposti all'esame del comportamento a caldo, sotto il carico di 2 Kgr-cm², hanno fornito i seguenti risultati:

a) — temperatura di inversione. . . . $T_i = 1380°$
b) — temperatura di inizio del rammollimento $T_r = 1470°$
c) — refrattarietà . . . . . C. S. 34÷35

i quali, nonostante che si tratti di materiali formati a pressione, possono considerarsi pienamente soddisfacenti.

Sostituendo, nel fine, dell'argilla plastica, legante, ad un'aliquota del caolino, abbiamo ricavato per formatura a pressione ridottissima, delle nuove mattonelle che dopo cottura allo stesso C. S. 10 ci hanno fornito i campioni sui quali è stata eseguita la prova del comportamento a caldo sotto il carico di 2 Kgr-cm².

Per la miscela generatrice: 50 % chamotte, 30 % caolino e 20 % argilla del Sarcidano (materiali passanti al vaglio di 900 maglie-cm²), si è avuto:

a) — temperatura di inversione . . . . $T_i = 1320°$
b) — temperatura di inizio rammollimento . . $T_r = 1390°$
c) — refrattarietà . . . . . C. S. 33

La sostituzione di un'aliquota di caolino con dell'argilla legante, sostituzione che ci ha permesso di formare a bassa pressione, ha provocato un abbassamento delle qualità termiche del refrattario perchè detta argilla, che è dell'argilla sarda del Sarcidano [1]), ha refrattarietà relativamente bassa: C. S. 30.

Risultano non di meno migliorate: la stabilità di volume e la compattezza del prodotto finito.

Napoli — Istituto di Chimica industriale dell' Università.

---

[1]) E. Caruso e O. Amati. *Le argille refrattarie del Sarcidano.* Ricerca scientifica. *13*, 554, 1942.

Sul fenomeno di Peano nelle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine.

Nota del dott. **Federico Cafiero**, *presentata dal socio* **C. Miranda**

(Adunanza del dì 4 marzo 1950)

Sunto. — Data una famiglia Γ di equazioni differenziali ordinarie, del primo ordine e del tipo normale, si dà una condizione sufficiente affinchè gli integrali delle equazioni di Γ, esclusa al più un'infinità numerabile di esse, siano quasi ovunque univocamente determinate dal punto iniziale.

Si perviene al suddetto teorema fruendo di un interessante risultato di H. Nakano ed osservando che gli integrali dell'equazione $y' = f(x, y)$ sono quasi ovunque univocamente determinati dal punto iniziale, quando lo siano in un insieme di punti (numerabile) ovunque denso nel dominio di definizione di $f(x, y)$.

I noti procedimenti esistenziali per il problema di Cauchy relativo all'equazione differenziale:

$$(a) \qquad y' = f(x, y),$$

nella sola ipotesi della continuità superficiale della $f(x, y)$, particolarmente

quello di PEANO-PERRON [1]), portano alla possibilità della esistenza di infiniti integrali della (a) passanti per un punto P assegnato (fascio o pennello di PEANO), i quali riempiono una regione del piano limitata superiormente ed inferiormente da due integrali dell'equazione differenziale stessa.

Il problema di stabilire dei criteri sufficienti per l'unicità, rispetto ai dati iniziali, delle soluzioni della (a), è stato in generale affrontato fruendo di criteri di confronto atti ad apprezzare il divario di due integrali dell'equazione stessa [2]).

Su considerazioni di tutt'altra natura è invece basato il seguente teorema, dovuto ad HIDEGORÔ NAKANO [3]):

Sia Γ *una famiglia di equazioni differenziali ordinarie, del primo ordine e del tipo normale, a secondo membro continuo (e limitato) nel rettangolo (nella striscia)*:

$$R : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d \quad (S : a \leq x \leq b,\ -\infty < y < +\infty).$$

Le equazioni della famiglia Γ *soddisfino inoltre alla seguente condizione:*

i) Per ogni coppia:

$$y' = \varphi(x, y),\ y' = \chi(x, y)$$

di equazioni di Γ *risulta:*

$$\varphi(x, y) \not\equiv \chi(x, y) \text{ in } R\ (S).$$

Allora, fissato un punto P *di* R (S), *tutte le equazioni di* Γ, *escluso al più un numero finito od un'infinità numerabile di esse, ammettono uno ed un solo integrale passante per* P.

In questa Nota mi sono posto il problema di vedere se, nelle stesse

---

[1]) G. PEANO, *Sull'integrabilità delle equazioni differenziali del primo ordine*, Atti dell'Acc. Sc. Torino, 21, (1885-1886), pp. 437-445.

O. PERRON, *Ein Neurer Existensbeweis für die Integrale der Differrentialgleichung* $y' = f(x, y)$, Math. Ann., 76, (1915), pp. 471-484.

[2]) Per una vasta bibliografia sull'argomento cfr. G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Zanichelli, Bologna, 1941, parte II, pp. 90-97.

[3]) H. NAKANO, *Ueber die Verteilung der Peanoschen Punkte einer Differentialgleichung* $y' = f(x, y)$, Proc. Phys-Math. Soc. Japan., Ser. 3. vol, XIV, (1932), pp. 41-43. Cfr. anche N. NIKOSAKA, *Untersuchung über die Unität der Lösung der Differentialgleichung* $y' = \xi f(x, y)$ *in bezug auf den Parameter* ξ, Proc. Phys-Math. Soc. Japan., Ser. 3, vol II, (1929), 73-83. F. CAFIERO, *Sui problemi ai limiti relativi ad una equazione differenziale ordinaria del primo ordine e dipendente da un parametro*, Rend. del Sem. Mat. di Padova, vol. XVIII, (1949), pp. 239-257 (a pagina 255).

ipotesi del teorema di H. Nakano, non si possa addirittura asserire che fissato un punto P di R (S), gli integrali di tutte le equazioni di Γ, escluso al più un numero finito od un'infinità numerabile di esse, siano univocamente determinati non solo in P, ma anche quasi ovunque in R (S).

La risoluzione di questo problema mi ha portato ad indagare su di un'altra questione, anch'essa inerente all'unicità degli integrali della (a), alla quale il precedente problema è collegato.

Alla suddetta questione può darsi la seguente formulazione generale: « Supposta $f(x, y)$ continua e limitata in S ed ammessa l'unicità degli integrali della (a) a destra (a sinistra) del punto iniziale in un insieme di punti di S ivi ovunque denso, che cosa può dirsi relativamente all'unicità degli integrali della (a) sia a destra che a sinistra del punto iniziale? ».

Il teorema qui appresso enunciato risponde esaurientemente a tale quesito:

Teorema I. — *Data l'equazione differenziale:*

$$(a) \qquad y' = f(x, y)$$

con $f(x, y)$ continua e limitata nella striscia S, *si supponga che i suoi integrali siano univocamente determinati a destra (a sinistra) del punto iniziale in un insieme* E *di punti di* S *ivi ovunque denso.*

Allora gli integrali della (a) *sono quasi ovunque in* S *univocamente determinati dal punto iniziale.*

In virtù di tale teorema, con considerazioni pressocchè immediate, si risponde affermativamente al primo problema posto. Sussiste infatti il seguente:

Teorema II. — *Sia* Γ *una famiglia di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine e del tipo normale, a secondo membro continuo (e limitato) nel rettangolo* R *(nella striscia* S*).*

Si supponga inoltre verificata la condizione i*).*

Allora, fissato un punto P *di* R (S), *gli integrali di tutte le equazioni di* Γ, *escluso al più un numero finito od un'infinità numerabile di esse, sono in* P *e quasi ovunque in* R (S) *univocamente determinate dal punto iniziale.*

Si osservi che quest'ultimo teorema è, ad esempio, applicabile alla famiglia di equazioni differenziali:

$$y' = f(x, y) + \lambda,$$

dove λ varia nel campo dei numeri reali e $f(x, y)$ è un'arbitraria funzione continua (e limitata) in R (S).

Mi sono finora riferito ad equazioni differenziali a secondo membro continuo solo per semplicità. Le estensioni al caso in cui queste soddisfano

alle ipotesi più generali di CARATHÉODORY [1]) sono immediate; mi limito perciò ad enunciarle nel testo, accennando solo in qualche caso alla dimostrazione.

1. — Consideriamo l'equazione differenziale (a) con $f(x,y)$ continua e limitata nella striscia:

$$S: a \leq x \leq b, \quad -\infty < y < +\infty.$$

Com'è noto, per ogni punto di S passa almeno una curva integrale dell'equazione in esame e gli estremi di essa e di ogni altra eventuale appartengono alla frontiera di S e cioè alle rette $x = a$ ed $x = b$.

Se per un punto P di S passano due curve integrali dell'equazione (a), allora per quel punto ne passano ovviamente infinite e l'insieme di esse è limitato superiormente ed inferiormente da due curve integrali della (a), che diconsi rispettivamente integrale superiore o massimo ed integrale inferiore o minimo.

Quando per un punto P di S passano due curve integrali dell'equazione (a), suol dirsi che per la detta equazione il punto P è *un punto di* PEANO o che nel punto P ha luogo *il fenomeno di* PEANO [2]). Più in particolare, se per un punto P di S passano due curve integrali dell'equazione differenziale (a), tali che nessun arco di una delle due con P come estremo sinistro (destro) appartega interamente all'altra, suol dirsi che P è *un punto di diramazione a destra (a sinistra)* per la detta equazione [3]).

Per semplicità di linguaggio introduciamo un'ulteriore locuzione. Diremo che, per l'equazione differenziale (a), in un punto $P(\xi, \eta)$ di S *ha luogo il fenomeno di* PEANO *con un divario maggiore od uguale ad un numero positivo* ε, se risulta:

$$\underset{a \leq x \leq b}{M\ a\ x} \left[G(x; \xi, \eta) - g(x; \xi, \eta) \right] \geq \varepsilon,$$

avendo indicato con $G(x; \xi, \eta)$ e $g(x; \xi, \eta)$ rispettivamente l'integrale superiore e l'integrale inferiore dell'equazione differenziale (a) passanti per $P(\xi, \eta)$.

Analogamente si definiscono i punti di S in cui per l'equazione (a) ha luogo il fenomeno di PEANO con un divario minore od eguale ad ε, minore di ε, etc.

---

[1]) C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Leipzig, Teubner, (Zweite Auflage), 1927, pp. 665-674.

[2]) Cfr. G. SANSONE, loc. cit., pag. 68.

[3]) R. VAN KAMPEN, *Remarks on systems of ordinary differential equations*, American Journal of Mathematics, 59 (1937), pp. 144-152.

2. — Dimostriamo dapprima il seguente teorema che ci sarà utile in seguito:

Sia $f(x, y)$ continua e limitata nella striscia:

$$S: a \leq x \leq b, -\infty < y < +\infty.$$

Allora l'insieme dei punti di PEANO *dell'equazione differenziale* (a) *è misurabile.*

Fissata una successione decrescente di numeri positivi $\{\varepsilon_n\}$, tendente a zero, indichiamo con E_n $(n = 1,2,\ldots)$ l'insieme dei punti di S, appartenenti ad un dominio rettangolare T di S, nei quali per l'equazione differenziale (a) ha luogo il fenomeno di PEANO con un divario maggiore od eguale ad ε_n $(n = 1,2,\ldots)$.

Detto E l'insieme dei punti di PEANO della nostra equazione differenziale, appartenenti a T, si ha ovviamente:

$$E = E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots$$

e quindi per dimostrare la misurabilità di E basta far vedere che gli insiemi $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ sono misurabili. Ciò è d'immediata verifica poichè tali insiemi sono chiusi. Supponiamo infatti per assurdo che in un punto $P_0(x_0, y_0)$ di accumulazione dell'insieme E_n abbia luogo il fenomeno di PEANO con un divario eguale ad un numero non negativo $\bar{\varepsilon}_n < \varepsilon_n$.

Com'è noto [1]), nelle nostre ipotesi, l'integrale superiore $G(x; \xi, \eta)$ e l'integrale inferiore $g(x; \xi, \eta)$ della equazione (a) passanti per un punto $P(\xi, \eta)$, sono semicontinui rispettivamente superiormente ed inferiormente rispetto a $P(\xi, \eta)$ e quindi, fissato un $\varepsilon > 0$, si può determinare un intorno di $P_0(x_0, y_0)$ in modo tale che si abbia:

$$(1) \quad g(x; x_0, y_0) - \varepsilon \leq g(x; \xi, \eta) \leq G(x; \xi, \eta) \leq G(x; x_0, y_0) + \varepsilon$$

per (ξ, η) appartenente al detto intorno di P_0 e per x in $I: a \leq x \leq b$. Ma allora fissato un ε positivo soddisfacente alla limitazione:

$$\varepsilon < \frac{\varepsilon_n - \bar{\varepsilon}_n}{2},$$

dalla (1) risulta che al detto intorno di P_0 apparterrebbero soltanto punti

---

[1]) E. PINI, *Sulla continuità degli integrali dell'equazione* $y' = f(x, y, \gamma)$ *rispetto ai valori iniziali*, Rend. dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Ser. 3ª, vol. LVIII, (1930), pp. 531-534. Cfr. anche E. BAJDA, *Confronto e dipendenza dai parametri degli integrali delle equazioni differenziali*, Rend. Acc. Naz. Lincei, Ser. 8ª, vol. III, (1947), pp. 265-271.

in cui ha luogo il fenomeno di PEANO con un divario minore di ε_n, ciò che è assurdo. Il teorema enunciato è così dimostrato.

3. — Nel numero precedente ci siamo messi per semplicità nella ipotesi che $f(x, y)$ fosse continua e limitata nella striscia S, ma è ovvio che con analoghi ragionamenti si dimostra il seguente teorema più generale.

Sia $f(x, y)$ definita nella striscia S, *ivi misurabile rispetto ad x e continua rispetto ad* y. *Soddisfi inoltre alla limitazione:*

$$|f(x, y)| \leq k(x),$$

con $k(x)$ sommabile (secondo LEBESGUE*) in $I: a \leq x \leq b$.*

Allora l'insieme dei punti di PEANO *dell'equazione differenziale* (*a*) *è misurabile.*

È appena il caso d'avvertire che nelle ipotesi di quest'ultimo teorema, per punto di PEANO dell'equazione differenziale (*a*) bisogna intendere un punto di S per il quale passano due integrali *assolutamente continui* della equazione considerata [1]).

4. — Per la dimostrazione dei teoremi enunciati in prefazione è essenziale il seguente lemma che costituisce l'idea fondamentale a cui è ispirato il teorema di H. NAKANO.

Sia F *una famiglia di funzioni della sola variabile x, eventualmente a più valori, definite in intervalli chiusi. Si supponga inoltre che siano soddisfatte le seguenti condizioni:*

j) Per ogni funzione $\varphi(x)$ di F, *l'estremo superiore $\varphi_1(x)$ e l'estremo inferiore $\varphi_2(x)$ dei valori di $\varphi(x)$ corrispondenti ad x sono funzioni continue.*

---

[1]) Per la dimostrazione del teorema di esistenza dell'integrale superiore ed inferiore dell'equazione (*a*) nelle ipotesi del teorema enunciato (quelle di CARATHÉODORY) cfr. F. CAFIERO, *Sui teoremi di unicità relativi ad un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine,* Giornale di Matematiche di Battaglini, vol. 78, S. 4, fasc. 1 (1948), pp. 10-41 (a pag. 13).

Il teorema di E. PINI relativo alla semicontinuità, rispetto al punto iniziale, dell'integrale superiore ed inferiore nella ipotesi della continuità del secondo membro della equazione (*a*), si estende facilmente al caso che la detta equazione soddisfi alle ipotesi di CARATHÉODORY. Tale estensione è del resto implicitamente dimostrata, in ipotesi ancora più generali di quelle di CARATHÉODORY, in note considerazioni relative alla continuità dell'integrale superiore ed inferiore rispetto al punto iniziale.

Cfr. F. CAFIERO, *Su di un teorema di Montel relativo alla continuità, rispetto al punto iniziale, dell'integrale superiore ed inferiore di un'equazione differenziale,* Rend. del Sem. Mat. dell'Università di Padova, vol. XVII (1948), pp. 186-200.

jj) Ogni coppia di funzioni $\varphi(x)$ *e* $\chi(x)$ *di* F *soddisfa nell'intervallo comune di definizione, se non è vuoto o non si riduce ad un punto, ad una delle limitazioni:*

$$\varphi(x) \leq \chi(x), \quad \chi(x) < \varphi(x).$$

Allora solo un numero finito od un' infinità numerabile di funzioni di F *può eventualmente essere a più valori.*

Detta $\varphi(x)$ una funzione a più valori della famiglia F, indichiamo con $\bar{x}$ l'estremo superiore dei punti in cui la differenza $\varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ assume il massimo valore. Sarà:

$$\varphi_1(\bar{x}) - \varphi_2(\bar{x}) > 0.$$

Determiniamo poi il massimo intervallo contenente $\bar{x}$, diciamolo (x_1, x_2), nell'interno del quale risulta:

$$\varphi_1(x) - \varphi_2(x) > 0$$

ed a ogni funzione $\varphi(x)$ di F, che risulta a più valori, associamo l'insieme aperto:

$$\Delta : x_1 < x < x_2, \ \varphi_2(x) < y < \varphi_1(x).$$

Otterremo così una famiglia d'insiemi aperti del piano, che essendo, per la condizione *jj*), a due a due privi di punti comuni, sono al più un'infinità numerabile. L'asserto è così dimostrato.

5. — Siamo ora in grado di dimostrare il teorema I enunciato in prefazione.

Per fissare le idee supponiamo che nei punti di E l'unicità degli integrali della (*a*) sia assicurata a destra del punto iniziale. Ciò posto, fissato un punto x_0 di $I : a \leq x < b$, indichiamo con $\varphi_\lambda(x)$ la funzione della variabile x, eventalmente a due valori, che per ogni x di I piglia i valori assunti in x dall'integrale superiore e dall'integrale inferiore dell'equazione differenziale (*a*) passanti per il punto $P(x_0, \lambda)$ di S.

Osserviamo subito che nelle ipotesi del teorema enunciato, la famiglia di funzioni $\varphi_\lambda(x)$, per $-\infty < \lambda < +\infty$, soddisfa alle condizioni *j*) ed *jj*) del lemma del numero precedente.

La condizione *j*) è ovviamente soddisfatta. Relativamente alla condizione *jj*) basta far vedere che:

$$(2) \qquad G(x; x_0, \lambda') \leq g(x; x_0, \lambda'') \quad \text{per} \quad \lambda' < \lambda'', \ a \leq x \leq b,$$

avendo al solito indicato con $G(x; x_0, \lambda')$ e $g(x; x_0, \lambda'')$ rispettivamente

l'integrale superiore della (a) passante per $P(x_0, \lambda')$ e l'integrale inferiore della (a) passante per $P(x_0, \lambda'')$.

Infatti poichè è:

$$G(x_0; x_0, \lambda') < g(x_0; x_0, \lambda'') \quad \text{per} \quad \lambda' < \lambda'',$$

se ci fosse un punto $\bar{x}$, a destra di x_0, in cui:

$$G(\bar{x}; x_0, \lambda') > g(\bar{x}; x_0, \lambda''),$$

detto (x_0, x_1) il massimo intorno destro di x_0 nell'interno del quale risulta:

$$G(x; x_0, \lambda') < g(x; x_0, \lambda''),$$

sarebbe:

$$G(x_1; x_0, \lambda') = g(x_1; x_0, \lambda'').$$

Ma allora, indicato con $Q(\xi, \eta)$ un punto di E interno al dominio:

$$\Delta : x_0 \leq x \leq x_1, \; G(x; x_0, \lambda') \leq y \leq g(x; x_0, \lambda''),$$

contrariamente a quanto ammesso nell'enunciato, dal punto $Q(\xi, \eta)$ uscirebbero infinite curve integrali. Infatti una curva integrale uscente dal punto suddetto toccherebbe in un punto di Δ almeno una delle due curve $y = G(x; x_0, \lambda')$ ed $y' = g(x; x_0, \lambda'')$ e quindi, come queste ultime, sarebbe dotata di un punto di diramazione a destra.

La (2) è con ciò dimostrata a destra di x_0. Con un ragionamento pressocchè analogo si dimostra anche a sinistra di x_0. Ne consegue, in forza del lemma del numero precedente, che la funzione $\varphi_\lambda(x)$ è in I una funzione ad un sol valore per tutti i valori di λ, ad eccezione al più di un numero finito o di un'infinità numerabile di essi.

Ricordando la definizione di $\varphi_\lambda(x)$, ciò vuol dire che per tutti i punti della retta $x = x_0$, escluso al più un numero finito od un'infinità numerabile di essi, passa una ed una sola curva integrale dell'equazione differenziale (a).

Poichè quanto abbiamo detto per gli integrali dell'equazione differenziale (a) passanti per i punti della retta $x = x_0$ vale per gli integrali della detta equazione passanti per i punti di ogni altra retta della striscia S parallela all'asse delle y, possiamo concludere asserendo che l'insieme dei punti di S, in cui per l'equazione differenziale (a) può eventualmente verificarsi il fenomeno di Peano, ha su ogni retta parallela all'asse delle y un numero finito od un'infinità numerabile di punti. Ciò basta per concludere che tale insieme, la cui misurabilità abbbiamo già dimostrato, è di misura superficiale nulla.

Analogamente si ragiona quando nei punti di E l'unicità degli integrali della (a) è assicurata a sinistra del punto iniziale.

Osservazione. — Ci siamo messi per semplicità nella ipotesi che $f(x,y)$ sia continua e limitata nella striscia S. È ovvio però che un analogo teorema sussiste quando $f(x,y)$ soddisfa alle ipotesi più generali di CARATHÉODORY. Naturalmente in tal caso l'ipotesi e la tesi del teorema vanno riferiti agli integrali assolutamente continui della (a).

6. — Fruendo del lemma enunciato nel N. 4 e di un noto teorema di confronto si perviene, con ragionamenti immediati, al seguente teorema che costituisce l'estensione del teorema di H. NAKANO al caso in cui le equazioni differenziali della famiglia Γ soddisfano ad ipotesi del tipo di CARATHÉODORY.

Sia Γ una famiglia di equazioni differenziali ordinarie, del primo ordine e del tipo normale, i cui secondi membri siano funzioni misurabili rispetto ad x, uniformemente continue rispetto ad y in R *(in ogni porzione limitata della striscia* S*) ed in valore assoluto minori di una funzione della sola x sommabile in* I [1]).

Le equazioni di Γ soddisfino inoltre alla seguente condizione:

i') Per ogni coppia $y' = \varphi(x,y)$, $y' = \chi(x,y)$ di equazioni di Γ si possa determinare una funzione $\eta(y) < 0$ definita per $c \leq y \leq d$ ($-\infty < y < +\infty$) in modo tale che risulti:

$$\varphi(x,y) - \chi(x,y) \leq \eta(y) \quad \text{oppure} \quad \chi(x,y) - \varphi(x,y) \leq \eta(y).$$

Allora, fissato un punto I *di* R (S), *tutte le equazioni di Γ, escluso al più un numero finito od un'infinità numerabile di esse, ammettono uno ed un solo integrale assolutamente continuo passante per* P.

Accenniamo per maggior chiarezza alla dimostrazione riferendoci per semplicità al caso in cui i secondi membri delle equazioni di Γ siano definiti nella striscia S.

Fissato un punto P di S ad ogni equazione differenziale della famiglia Γ associamo la funzione della variabile x, eventualmente a due valori, che per ogni x di I piglia i valori assunti in x dall'integrale superiore e dall'integrale inferiore, passanti per P, dell'equazione differenziale considerata. Otterremo così una famiglia Γ' di funzioni della sola x, le quali soddisfano ovviamente all'ipotesi j) del lemma del N. 4.

Per l'ipotesi i'), tenendo presente un noto teorema di confronto [2]), le

---

[1]) Tale funzione può eventualmente variare con l'equazione della famiglia.

[2]) Per il teorema di confronto necessario alla dimostrazione della proposizione enunciata cfr. F. CAFIERO. *Su un problema ai limiti relativo all'equazione $y' = f(x,y,\lambda)$*, Giornale di Matematiche di Battaglini, S. 4, vol. 77 (1947), pp. 145-163, (a pag. 151).

funzioni della famiglia Γ' soddisfano anche alla condizione jj) del lemma suddetto. Ne consegue immediatamedte l'asserto.

7. — I risultati conseguiti nei numeri precedenti ci permettono di pervenire in modo immediato al teorema II enunciato in prefazione.

Per semplicità riferiamoci dapprima al caso in cui i secondi membri delle equazioni differenziali della famiglia Γ siano definiti nella striscia S.

Ciò posto fissiamo un insieme numerabile E di punti di S, ivi ovunque denso e contenente un prefissato punto P.

Gli integrali di tutte le equazioni differenziali della famiglia Γ, escluso al più un numero finito od un'infinità numerabile di esse, sono, per il teorema di H. Nakano, univocamente determinati nei punti di E. Da ciò, in forza del teorema I, si deduce l'asserto.

Il caso in cui i secondi membri delle equazioni differenziali di Γ sono definiti in R si riconduce immediatamenie a quello già esaminato prolungando opportunamente in S la definizione di tali secondi membri.

Osserviamo infine che, analogamente a quanto abbiamo fatto per il teorema di H. Nakano, il teorema II si può estendere al caso in cui la famiglia di equazioni di Γ soddisfi alle ipotesi precisate nell'enunciato del numero precedente.

8. — Si consideri l'equazione differenziale dipendente dal parametro λ

$$(a') \qquad y' = f(x, y) + \lambda, \qquad (-\infty < \lambda < +\infty)$$

dove $f(x, y)$ è misurabile rispetto ad x, uniformemente continua rispetto ad y nel rettangolo $R: a < x \leq b, c \leq y \leq d$ e soddisfa alla limitazione:

$$|f(x, y)| \leq k(x),$$

essendo $k(x)$ sommabile (secondo Lebesgue) in $I: a \leq x \leq b$.

Dall'osservazione fatta nel numero precedente discende che per tutti i valori di λ, escluso al più un numero finito od un'infinità numerabile di essi, gli integrali assolutamente continui dell'equazione differenziale (a') sono univocamente determinati dal punto iniziale in un prefissato punto P di R e quasi ovunque in R. Questa osservazione, oltre a mettere in vista un'interessante applicazione del teorema II, ci consente di dare facilmente degli esempi atti ad illustrare i risultati conseguiti. Qui per brevità ci limitiamo a darne uno solo pigliando in esame l'equazione differenziale:

$$(b) \qquad y' = |y|^{\frac{1}{2}} + \lambda,$$

che per $\lambda = 0$ fornisce un esempio ormai classico di equazione differenziale

a secondo membro continuo dotata di punti di PEANO [1]. Com'è noto infatti tutti i punti dell'asse delle x sono punti di diramazione a destra e a sinistra per l'equazione:

$$(c) \qquad y' = |y|^{\frac{1}{2}}.$$

Detto R_1: $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$ $(a > 0, b > 0)$ il rettangolo in cui, per fissare le idee, si vuol studiare il comportamento degli integrali della (b), osserviamo che, com'è immediato verificare, l'insieme dei punti di R_1 in cui per l'equazione differenziale (c) ha luogo il fenomeno di PEANO è di misura non nulla.

Il teorema II, come risulta dall'osservazione generale fatta in questo numero, è ovviamente applicabile alla famiglia delle equazioni differenziali (b) al variare di λ nell'insieme dei numeri reali, non è però privo d'interesse osservare che nel caso particolare in esame, per λ non nullo, i punti di PEANO addirittura svaniscono.

Quanto asserito è evidente per $\lambda > 0$, oppure per $\lambda < 0$ e tale che $\lambda^2 > b$.

Nel caso in cui è $\lambda < 0$ e tale che $\lambda^2 < b$, l'equazione (b) potrebbe eventualmente ammettere punti di diramazione solo sulle rette $y = \lambda^2$ ed $y = -\lambda^2$, che in R_1 sono suoi integrali. Ma questa eventualità può immediatamente negarsi, osservando che gli integrali dell'equazione:

$$(b') \qquad x' = \frac{1}{|y|^{\frac{1}{2}} + \lambda}$$

uscenti dai punti di R_1 non appartenenti alle rette $y = \lambda^2$ ed $y = -\lambda^2$ non toccano tali rettte.

Nel caso in esame infatti, supposto per fissare le idee $\lambda^2 < b$, per l'integrale della (b') passante per il punto $P_0(x_0, y_0)$, ad esempio con $y_0 > \lambda^2$, si ha l'espressione:

$$x = x_0 + 2\left(|y|^{\frac{1}{2}} - |y_0|^{\frac{1}{2}} - \lambda \log \frac{|y|^{\frac{1}{2}} + \lambda}{|y_0|^{\frac{1}{2}} + \lambda}\right),$$

che diverge negativamente al tendere di y verso λ^2.

[1] M. MÜLLER, *Neure Untersuchungen über den Fundamentalsatz in der Theorie der gewöhnlichen differentialgleichungen*. Jahr. der Deutsch. Math. Ver., 37. (1928), pp. 33-48. (a pag. 46). — Cfr. anche G. SANSONE, loc. cit.

Per altri esempi di equazioni differenziali dotate di punti di PEANO cfr. M. LAVRENTIEFF, *Sur une équation différentielle du premier ordre*. Mathematische Zeitschrift, 23, (1935), pp. 197-209. — R. VAN KAMPEN, loc. cit.

Ricerche di spettrofotometria di fluorescenza sul siero di sangue umano normale.

Nota dei proff. **B. de Lerma** *e* **G. Arpino**, *presentata dal socio ord.* **M. Salfi**

(Adunanza del dì 4 marzo 1950)

Sunto. — Gli AA. hanno condotto sul siero di sangue umano normale un' indagine spettrofotometrica (spettrofotometria di fluorescenza da irraggiamento u. v.). La ricerca eseguita su 52 sieri di individui sani e giovani ha permesso di mettere in evidenza l' uniformità della distribuzione spettrale dell' energia nel flusso di fluorescenza, di cui è stata determinata la « curva di intensità » $I(\lambda)$.

Gli AA. concludono che, in rapporto a tale uniformità di composizione spettrale, legata all' esistenza di un particolare equilibrio tra i costituenti biochimici fluorescenti del siero, il particolare carattere della distribuzione spettrale dell'energia nel flusso di fluorescenza del siero di sangue umano normale acquista il significato di una nuova costante chimico-fisica del sangue stesso.

Costituisce oggetto della presente comunicazione lo studio delle caratteristiche spettrografiche e spettrofotometriche della fluorescenza del siero di sangue umano.

Il significato di tale ricerca assume importanza nel campo della fisiologia ed in quello della patologia, perchè legato alla possibilità dell' applicazione all' indagine biologica di un particolare e delicato criterio di analisi fisica: quello della spettrofotometria fotografica quantitativa [1]), *consistente nella ricerca del carattere della distribuzione spettrale dell' energia nel flusso luminoso emesso dal materiale in esame, quando questo, contenendo corpi chimici fluorescenti, venga sottoposto all' irraggiamento ultravioletto.* Pertanto, rivelato con questa indagine il carattere della costanza della composizione spettrale del flusso di fluorescenza emesso dal siero di sangue normale; non v'è dubbio che la metodica della spettrografia di fluorescenza, oltre a portare contributi ad una più completa valutazione chimica dei

---

[1]) I fondamenti fisici del metodo sono esposti nell' opera, a cui si rimanda: Ornstein L. S., Moll W. und Burger H. C., *Objective Spektralphotometrie*. Vieweg. Berlin, 1932. Le possibilità di applicazione dei metodi alle indagini biologiche sono ampiamente prospettate nei seguenti lavori: Ornstein L. S., *Quantitative methods of spectrophotometry*. Atti I Congr. internaz. Elettro-radiobiologia, Venezia, vol. I, 605, 1934; de Lerma B., *La spettrofotometria quantitativa in Biologia: metodi e problemi*, Boll. Soc. Nat., Napoli, vol. 51, 17, 1940.

materiali fluorescenti contenuti nel siero, possa rappresentare anche nel campo della clinica un mezzo efficace di indagine, di valore diagnostico (*spettrodiagnostica di fluorescenza*), quando si proceda, per confronto col normale, all'esame di sieri patologici.

* * *

In mancanza di una specifica letteratura sulla spettrografia di fluorescenza del siero di sangue, rinviamo alla monografia del Dhéré [1]) del 1937 per i lavori anteriori a quella data, lavori che per la maggior parte riflettono ricerche in cui la fluorescenza del siero viene segnalata, di solito, limitatamente al suo apprezzamento di colore. Il solo reperto spettrografico può dirsi quello fornito da Reche e Schilling (Autori citati dal Dhéré), che riferiscono su due bande di fluorescenza del siero di sangue umano: tra 426 e 480 mμ e tra 540 e 560 mμ.

Più recenti lavori da ricordare sono quelli di Kessler e Tichendorf (1939) [2]) e di Zillikens (1940) [3]), i quali, pur non trattando dei caratteri spettrofotometrici della fluorescenza del siero, danno di questa una precisa valutazione fotometrica e colorimetrica.

Metodo d'indagine e sua valutazione.

L'eccitazione della fluorescenza è stata ottenuta mediante irraggiamento u. v. prodotto da una lampada Osram a vapore di mercurio, schermata con opportuno filtro all'ossido di nichelio, che consente il passaggio delle radiazioni eccitatrici della fluorescenza in studio (radiazioni prevalenti, intorno a $\lambda = 3650$ A°). Il siero, nel quale si è avuto cura di evitare l'eventuale presenza di emoglobina, che, come è noto, esercita assorbimento selettivo nel visibile, veniva aspirato in un capillare di quarzo, dal diametro interno di 1.5 mm., e sottoposto all'irraggiamento u. v. fortemente concentrato mediante duplice condensatore di quarzo, in modo da aversi un'intensa fluorescenza del breve tratto di colonna di siero, alto circa 3 mm., investito dall'irraggiamento stesso. Il flusso di fluorescenza, sul cui percorso verso il collimatore dello spettrografo è interposto un filtro costituito da uno strato di un centimetro di sol. di $NaNO_2$ al 2 %, trasparente al visibile,

---

[1]) Dhéré Ch., *La fluorescence en biochimie*, Paris, 1937.

[2]) Kessler R. und Tichendorf W., *Fluoreszenzuntersuchungen mit dem Thil'schem Fluoreszenz photometer an menchlichen Blutseren*, Arch. exp. Pathol. u. Pharmakol., Bd. 192, s. 590, 1939.

[3]) Zillikens T., *Ueber fluoreszenzmessungen an Blutseren und ihre Verwertbarkeit für die Diagnostik*, Giessen Diss., 1940.

ma assorbente i raggi u. v. riflessi dalla parete del tubicino, veniva concentrato sulla fenditura dello spettrografo a mezzo di lente acromatica di conveniente apertura. Durante la registrazione degli spettri il siero veniva tenuto a deflusso continuo nel tubicino, allo scopo di eliminare l'insorgere di possibili fenomeni fotochimici.

Lo spettrografo-spettrometro adoperato è lo Zeiss a grande intensità (F. 1 : 4,5) con bracci a 90°, a deviazione costante, la cui dispersione è la seguente: 45 A°/mm a 4000 A°; 54 A°/mm a 4500 A°; 81 A°/mm a 5000 A°; 144 A°/mm a 6000 A°. Le microfotometrie degli spettrogrammi sono state eseguite col grande microfotometro Zeiss a registrazione fotoelettrica dell'Istituto Superiore di Sanità di Roma, postoci gentilmente a disposizione dal prof. D. Marotta, direttore dell'Istituto.

In ricerche di disamina comparativa per l'apprezzamento delle eventuali variazioni degli spettrogrammi in condizioni morbose (spettrodiagnostica in fluorescenza), su cui sarà riferito in prossime comunicazioni, è indispensabile mantenere costante il tipo di emulsione fotografica. Abbiamo trovato rispondente ai nostri scopi la lastra pancromatica Superex di Ferrania, che presenta buona sensibilità in quasi tutto il visibile, da 6700 A° nel rosso, al violetto estremo, con un minimo molto pronunciato nel verde intorno 4950 A°. Delle caratteristiche di sensibilità dell'emulsione fotografica, oltre che della legge di dispersione dell'apparecchio spettrografico, occorre tener conto per l'apprezzamento della posizione reale del massimo nello studio della distribuzione spettrale dell'energia in un'emissione a spettro continuo, come quella di cui alla presente ricerca. Tale studio ha richiesto l'impiego di un campione fotometrico tarato (lampada a incandescenza, con filamento di tungsteno, di costruzione Kipp e Zonen, di Delft, tarata nell'Istituto fisico di Utrecht), secondo le modalità tecniche di cui al citato lavoro di Ornstein, Moll e Burger.

Risultati delle indagini.

Sono stati esaminati 52 campioni di siero di sangue di individui sani, di età giovanile, tra i 20 e i 45 anni. I prelievi sono stati eseguiti a digiuno. Si è avuto cura di esaminare i sieri perfettamente limpidi e privi di emoglobina. Inoltre si è proceduto, sia nell'osservazione del colore di fluorescenza, sia nella registrazione fotografica degli spettri, impiegando strati di siero di lieve spessore (intorno a un mm.), in modo da rendere trascurabile l'influenza dell'assorbimento dovuto al colore proprio del siero sulla fluorescenza di questo.

Colore. — Il colore di fluorescenza dei sieri esaminati è costantemente azzurro, appena tendente al verde. Tale colore è da riferire a quello proprio della fluorescenza emessa dal siero, avendo posto cura di evitare durante

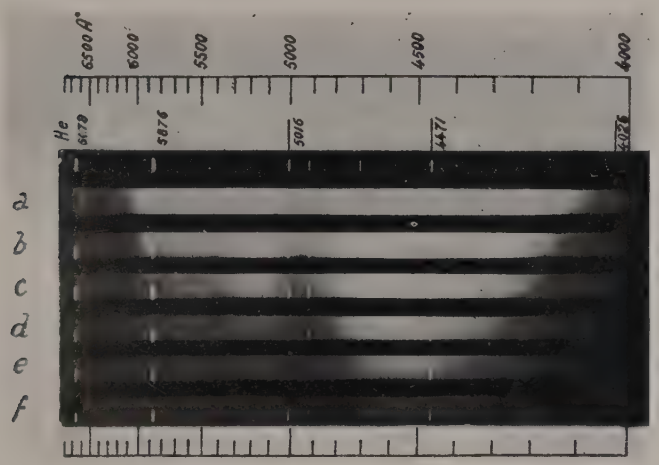


Fig. 1 — Spettrogrammi relativi all'emissione di fluorescenza di un campione di siero di sangue, registrati con fed. di 0.1 mm., tempi di esposizione rispettivamente (da *a* a *f*) di 18′, 12′, 8′, 6′, 4′, 2′. Reg. su lastra pancromatica « Superex » Ferrania.

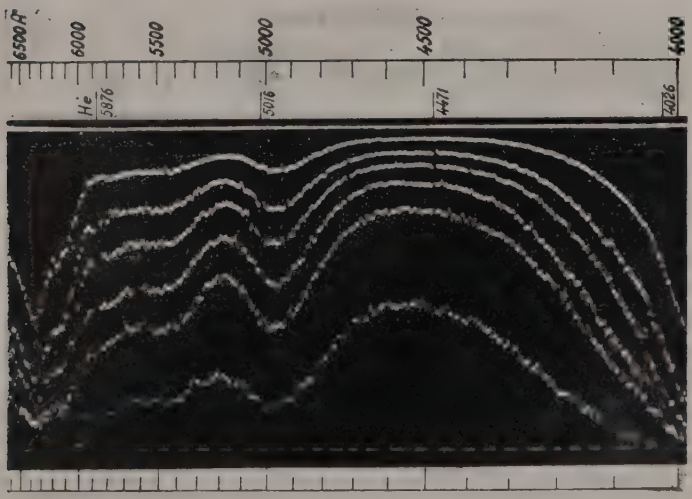


Fig. 2 — Fotometrie degli spettrogrammi di cui alla figura precedente.

le osservazioni falsi apprezzamenti del colore di fluorescenza imputabili alla tinta lievemente gialla del siero stesso.

Intensità. — Contrariamente alle affermazioni di molti Autori (cfr. la monografia di DHÉRÉ), il siero è tra i liquidi organici dotati di più intensa fluorescenza.

Esame spettrografico. — Sono stati registrati complessivamente circa 300 spettrogrammi; e, per ciascun campione, in vari gradi di annerimento della lastra, ottenuti facendo variare la durata di esposizione. Nella tavola I, fig. 1 sono riportati gli spettrogrammi relativi ad un campione; di questi, le microfotometrie relative sono riportate nella fig. 2 della stessa tavola.

Il flusso di fluorescenza si risolve, nel visibile, in uno spettro di complessa composizione, esteso con continuità dal violetto a 4000 A° al rosso, verso 6700 A°. L'esame delle microfotometrie permette di distinguere nettamente, nella estesa banda di fluorescenza, due regioni: l'una, verso le più brevi lunghezze d'onda, tra 4000 e 5000 A°, l'altra, estesa sino al rosso, tra 5000 a 6700 A°.

La prima regione, comprendente l'intervallo azzurro-violetto, ha il suo massimo apparente (quale viene direttamente desunto dalle fotometrie) intorno a 4500-4550 A°; la seconda, estesa al rosso, tocca il massimo verso 5200 A° e si abbassa bruscamente intorno a 5900 A°. Oltre tale valore, la banda continua ad estendersi nel rosso, alquanto oltre il limite del visibile.

Occorre avvertire che la forte inflessione dei fotogrammi in corrispondenza di 5000 A°, che segna il limite tra le due regioni descritte, è prevalentemente dovuta alla attenuata sensibilità della lastra in corrispondenza di tale distretto spettrale. Per gli stessi motivi inerenti alla sensibilità della lastra, oltre che per la legge della dispersione dell'apparecchio, i valori dianzi riportati per i massimi, quali risultano sulle microfotometrie, vanno rettificati in una ricerca spettrofotometrica obbiettiva, tenendo conto delle influenze dei detti fattori sperimentali. In particolare, va precisato il valore del massimo nell'azzurro che, da 4500-4550 A° sugli spettrogrammi, viene a corrispondere, come massimo reale dell'emissione, a circa 4620 A° (v. più avanti, all'esame spettrofotometrico).

È da porre in rilievo che le fotometrie corrispondenti a differenti campioni di siero tra quelli esaminati, presentano uniformità di andamento e di posizione dei massimi, quando si operi in condizioni di rigoroso confronto spettrografico: registrando cioè le varie emissioni su una stessa lastra o, comunque, su lastre di una medesima serie sulle quali vengano riportati spettri di riferimento del campione fotometrico tarato (v. metodologia).

Ciò significa che il flusso di fluorescenza del siero ha una composizione spettrale propria, caratteristica di tale liquido dell'organismo; onde si deve ammettere che, in condizioni fisiologiche, si stabilisce un particolare equilibrio chimico-fisico tra i costituenti fluorescenti del siero stesso.

Lievi variazioni individuali riflettono, entro limiti piuttosto ristretti, il valore dell'intensità emissiva globale della fluorescenza, non il carattere della sua composizione spettrale, su cui si riferirà più avanti, che in senso biologico può dirsi costante.

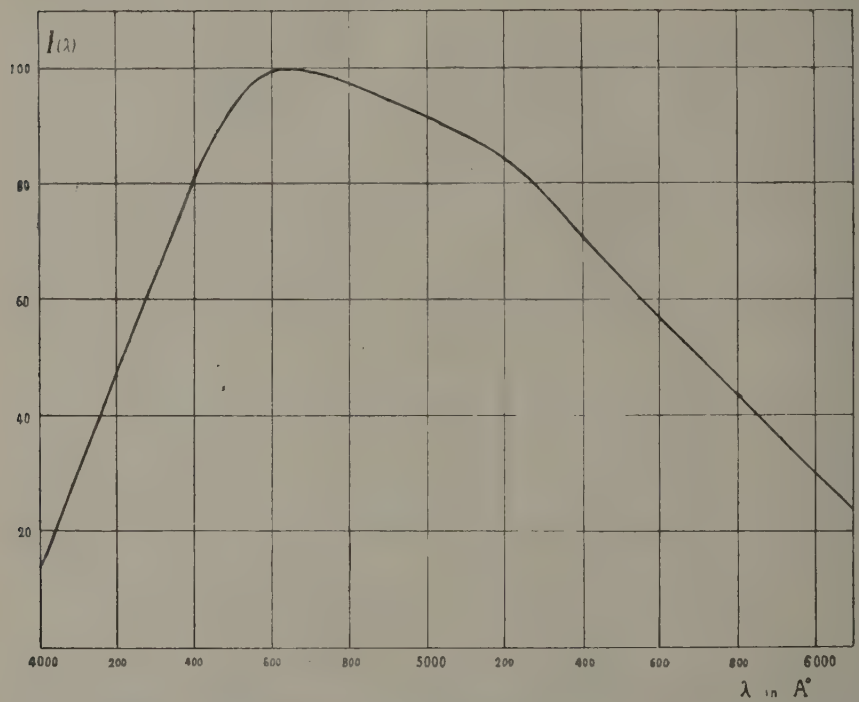


Fig. 1 — Distribuzione dell'energia nello spettro di fluorescenza del siero di sangue umano normale. L'intensità energetica I (λ), in funzione della lunghezza d'onda, è data in unità arbitraria.

Influenza dell' irraggiamento u. v. — L'irraggiamento u. v. prolungato determina, senza dubbio, profonde azioni fotochimiche di cui si ha indizio, già all'osservazione diretta, all'attenuarsi dell'intensità di fluorescenza. Questa, in effetti, si va progressivamente attenuando nei primi 10-15′ di esposizione all'u. v. [1]), sino ad un valore che resta praticamente costante, anche prolungando di oltre un'ora l'irraggiamento stesso.

Dal confronto tra le microfotometrie di spettri di sieri sottoposti a irraggiamento con quelle relative a sieri tenuti a deflusso costante durante

[1]) Si tenga presente che nel nostro dispositivo, attesa l'elevata concentrazione del flusso u. v. sul tubicino di quarzo in cui si trova il siero, un irraggiamento di 10′ equivale a quello che potrebbe ottenersi in almeno due ore, con una lampada Osram a vapore di mercurio, provvista di solo schermo di Wood, come nell'uso comune nelle indagini cliniche.

la registrazione, si desume come l'irraggiamento u. v. prolungato non influisca in maniera apprezzabile sulla distribuzione spettrale dell'energia, presentando le varie fotometrie lo stesso andamento nelle due differenti condizioni di registrazione. Per contro, l'intensità di fluorescenza appare ridotta a circa il 50 % del suo valore iniziale, già dopo 10-15' di irraggiamento, come risulta dalla quasi perfetta coincidenza delle microfotometrie di spettri relativi a sieri irradiati e non irradiati (tenuti, cioè, questi ultimi, a deflusso costante), le cui registrazioni fotografiche siano state eseguite con aperture di fenditura nel rapporto di 2 : 1.

Sono in corso ricerche sul comportamento della fluorescenza del siero a pH differenti e rispetto a fattori che possono far variare nell'ambito fisiologico la fluorescenza stessa (età, alimentazione, ecc.).

Esame spettrofotometrico. — Il carattere della distribuzione dell'energia nello spettro della fluorescenza del siero è espresso dalla curva $I(\lambda)$ riportata nella fig. 1, che traduce graficamante il rapporto funzionale tra l'intensità di emissione e la lunghezza d'onda. È da sottolineare la posizione del massimo intorno a 4620 A°, nonchè il netto cambiamento di pendenza della curva, verso 6200 A°, che si va abbassando più rapidamente, oltre tale valore, nel senso delle lunghezze d'onda crescenti.

Osservazioni conclusive.

È in primo luogo da rilevare che il limite intorno a 5000 A°, tra le due regioni in cui appare suddivisa, sugli spettrogrammi, la banda di fluorescenza del siero di sangue, acquista significato in una ricerca biologica, sopra tutto nella diagnostica, quando si vogliano istituire confronti tra spettrogrammi (o, meglio, tra le corrispondenti microfotometrie) relativi alle fluorescenze di sieri normali e patologici.

Dagli esami compiuti sui vari spettrogrammi e sulle microfotometrie risulta che *il flusso di fluorescenza del siero normale presenta una composizione spettrale costante*, di cui è stata data traduzione grafica nella « curva di intensità » $I(\lambda)$. Pertanto, possiamo concludere che la valutazione spettrofotometrica del flusso fornisce un nuovo parametro del sangue, che esprime il potere emissivo del complesso materiale del siero risultante di composti nei quali rientrano lipoprotidi, vitamine ed ormoni fluorescenti.

La composizione spettrale del flusso di fluorescenza del siero di sangue umano normale acquista in tal guisa l'equivalente significato biologico di una nuova costante chimico-fisica del sangue stesso.

Napoli, Istituto di Zoologia dell'Università, febbraio 1950.

Gli esami metallografico e termodilatometrico nella valutazione della qualità dei tubi di ghisa centrifugati.

Nota del Dr. **Riccardo Sersale** *presentata dal socio* **G. Malquori.**

(Adunanza del dì 1 aprile 1950)

Sunto. — I risultati delle indagini metallografiche e termodilatometriche alle quali l'A. ha sottoposto numerosi campioni di tubi di ghisa centrifugati, hanno permesso di giustificare i difetti emersi dal collaudo della pratica applicazione di detti tubi e di indicare nei trattamenti termici di fabbricazione, non opportunamente curati, la causa delle riscontrate deficienze.

I tubi di ghisa preparati per centrifugazione si sono ormai stabilmente affermati sui tubi colati verticalmente in sabbia, per un assieme di fattori che vanno dalle caratteristiche intrinseche di qualità, alla maggiore economia che importa la riduzione degli spessori, cioè dei pesi per pari lunghezze e diametri, all'abbassamento dei costi attraverso minori incidenze della manodopera realizzabili mercè una razionale automatizzazione dell'intero diagramma di lavorazione.

Non è compito di questa nota di illustrare i progressi tecnologici conseguiti da codeste fabbricazioni sviluppatesi subito dopo la prima guerra mondiale attorno ai brevetti di D. S. de Laval e F. Arens [1]). È utile tuttavia di riassumere, nelle sue linee generali, il procedimento seguito.

Sostanzialmente: si tratta di una colata o getto in conchiglia costituita dalla forma metallica cilindrica, ruotante, si che, per forza centrifuga, il metallo si adagia sulla parete della forma, in uno strato di determinato spessore.

A meno di non riscaldare la forma, o proteggerla internamente con sabbia o con altre materie agglomerate meno conduttrici del calore della forma medesima, o calorifugare opportunamente l'intero sistema, il getto risulterà temprato (ghisa bianca) almeno nello strato esterno e per uno spessore che dipenderà dalla velocità del raffreddamento e dalla composizione della ghisa, la quale deve risultare sufficientemente alta di silicio e povera di manganese onde sia favorita la separazione del carbonio allo stato grafitico (ghisa grigia).

---

[1]) Perdun C., *Uber die Wissenschaftlichen Grundlagen des Schleudergusses*, Stahl u. Eisen, *44*, 905 (1924). Piwowarsky E., *Hochwertiges Gusseisen*, Berlino, 1942.

La tempra conferisce, evidentemente, ai materiali in questione (tubi) delle pessime caratteristiche: alta fragilità, scarsa tenacità, lavorabilità all'utensile quasi nulla, donde la necessità di eliminare i suoi effetti, cioè di addolcire il metallo, per mezzo di un trattamento termico di ricottura a temperatura leggermente superiore a quella del punto critico, allo scopo di «grafitizzare» il carbonio della cementite (il materiale temprato ha struttura ledeburitica o trotata).

Il successivo raffreddamento lo si fa avvenire, di regola, lentamente, onde provocare, in corrispondenza di Ar, una buona dispersione della grafite eutettoidica secondaria nella matrice ferritica.

Per migliorare ulteriormente le qualità fisico meccaniche della ghisa si può ricorrere a cicli termici più complessi di quello descritto succintamente più sopra, fino ai trattamenti speciali di malleabilizzazione. Le condizioni del trattamento, cioè il ciclo o i cicli termici sono, come è ovvio, in rapporto con la composizione che suole oscillare entro i limiti qui sotto indicati [1]):

TABELLA I.

Ghise ipoeutettiche: grado di saturazione leggermente inferiore all'unità.

1) — Carbonio totale	%	3,3 ÷ 3,8
2) — Silicio	%	1,6 ÷ 2,5
3) — Manganese	%	0,4 ÷ 0,8
4) — Fosforo	%	0,7 ÷ 1,0
5) — Solfo	%	< 0,12

Qualora il trattamento sia insufficiente o comunque non adeguato alla composizione della ghisa, la qualità del prodotto finito scende. È fragile all'urto e duro, specie nello strato superficiale, e pertanto si lavora, cioè si taglia male con l'utensile, ragioni queste per le quali, alla messa in opera, aumenta sensibilmente la percentuale degli sfridi rispetto a quanto è ammesso per i buoni materiali.

Le prove meccaniche sui tubi interi, su anelli e su barrette da essi ricavati, forniscono gli elementi diretti per l'esatto giudizio sulla qualità del materiale ai fini delle applicazioni, senonchè la loro esecuzione è complessa e laboriosa. Per tanto, essendo stati chiamati ad esaminare diverse partite di tubi affluiti da differenti provenienze per il risanamento ed il potenziamento della rete delle canalizzazioni gas di questa città, partite fra le quali alcune ritenute dai tecnici scadenti appunto per l'eccessivo sfrido dovuto a rotture nelle riprese e nei tagli, abbiamo avuto occasione di studiare minutamente dette ghise sia al microscopio metallografico sia

[1]) PIWOWARSKY E., l. c.

al dilatometro differenziale Chevenard e di porre in rapporto le deduzioni tratte dalle su dette indagini con le risultanze del collaudo nella pratica applicazione.

Di questo diamo conto succintamente quì di seguito:

I campioni esaminati si riferiscono a sei differenti provenienze: i primi quattro della tabella II. appartengono a tubi centrifugati, il n. 5 a tubi colati verticalmente in sabbia, l'ultimo, il n. 6, proviene da una partita di centrifugati che ha fornito pessima prova.

I nn. 1 e 2 hanno invece soddisfatto i tecnici per l'assieme delle loro caratteristiche. Non così i centrifugati: nn. 3 e 4. ed il n. 5 colato verticalmente, perchè: i primi due accusano uno strato esterno poco lavorabile all'utensile, mentre il n. 5 è risultato eccessivamente fragile.

I su indicati campioni sono stati analizzati e sottoposti all'esame metallografico: sul bordo esterno, sul bordo interno ed al centro dello spessore del tubo.

Dallo spessore del tubo è stato altresì ricavato il provino per la prova dilatometrica.

Nella Tabella II. riportiamo le caratteristiche di composizione e indichiamo i costituenti strutturali quali risultano dalle indagini espletate.

La tav. I. contiene la documentazione fotografica originale delle curve termo-dilatometriche.

Sui diagrammi si osservi quanto segue:

a) — La dilatazione reversibile della cementite, intorno ai 200° [1]).

All'infuori però del campione n. 6 (il più ricco di cementite) l'effetto è visibile solo sulla curva di riscaldamento perchè il trattamento termico inerente alla prova (dalla temp. ordinaria a 900° in circa sei ore) è sufficiente a decomporre la cementite esistente all'inizio del ciclo.

b) — La dilatazione irreversibile in corrispondenza della grafitizzazione della cementite, che ha inizio (per i campioni esaminati) fra i 550° ed i 670°, cioè al disotto del punto critico.

c) — I punti critici al riscaldamento (Ac) e al raffredamento (Ar) che, sempre per i campioni esaminati, sono presso chè coincindenti.

Le micrografie delle seguenti tavole II, III, IV, V confermano poi, e precisano, le precedenti indagini.

La tav. II si riferisce al campione n. 1, cioè a materiale ritenuto buono dai tecnici che lo hanno adoperato per le canalizzazioni. La micro 1 mostra la dispersione omogenea della grafite; le micro 2 e 3: la perlite e la ferrite, oltre la grafite, nonchè il reticolato di steadite (l'eutettico fosforoso, ternario, che solidifica a circa 950°).

---

[1]) Chevenard P. e Portevin A., *Analyse dilatométrique des alliages. Notions générales et premières applications aux fontes*, Rev. Metall., XXII, 357, 1925.

TABELLA II.

Campioni	CARATTERISTICHE CHIMICHE DELLE GHISE							ESAME METALLOGRAFICO (costituenti strutturali)			Durezza Brinell	
	C totale %	C grafitico %	C combinato %	Si %	Mn %	P %	Grado di saturazione	Bordo interno	Spessore	Bordo esterno	Bordo interno	Bordo esterno
1	3,30	3,18	0,12	2,06	0,35	0,62	0,94	Ferrite, grafite, perlite, steadite.	Ferrite, grafite, perlite, steadite.	Ferrite, grafite, perlite, steadite, rari elementi di cementite.	161	176
2	3,51	3,31	0,20	1,80	0,41	0,58	0,97	Ferrite, grafite, steadite.	Ferrite, grafite, steadite.	Ferrite, grafite, steadite, cementite.	126	184
3	3,43	3,15	0,28	2,39	0,35	0,84	1,00	Ferrite, grafite, perlite, steadite.	Ferrite, grafite, perlite, steadite.	Ferrite, grafite, perlite, steadite, cementite.	148	216
4	3,42	2,79	0,63	1,91	0,23	1,22	0,96	Ferrite, grafite, steadite.	Ferrite, grafite, steadite.	Ferrite, grafite, steadite, cementite.	161	208
5	2,85	2,56	0,29	2,81	0,38	1,36	0,87	Ferrite, grafite, perlite, steadite.	Ferrite, grafite, perlite, steadite.	Ferrite, grafite, perlite, steadite.	181	200
6	3,26	1,56	1,70	1,37	0,31	0,58	0,87	Perlite, cementite, grafite, steadite.	Perlite, cementite, grafite, steadite.	Perlite, cementite, grafite, steadite.	221	—

Le tav. III e IV riguardano la struttura dei campioni nn. 3 e 4 della tabella II.

Si notino gli elementi di cementite ledeburitica particolarmente abbondanti e sviluppati nel materiale del bordo esterno.

La micro 2 della tav. III mostra l'aspetto dendritico, abetiforme, della cristallizzazione primaria (soluzione solida), caratteristico delle ghise grigie ipoeutettiche [1]).

Nella tav. V sono in fine riportate delle micro relative alla struttura del tubo colato verticalmente in sabbia.

Si noti la presenza di grafite in lamelle di discrete dimensioni (grafite eutettica), la perlite, l'abbondanza dell'eutettico fosforoso.

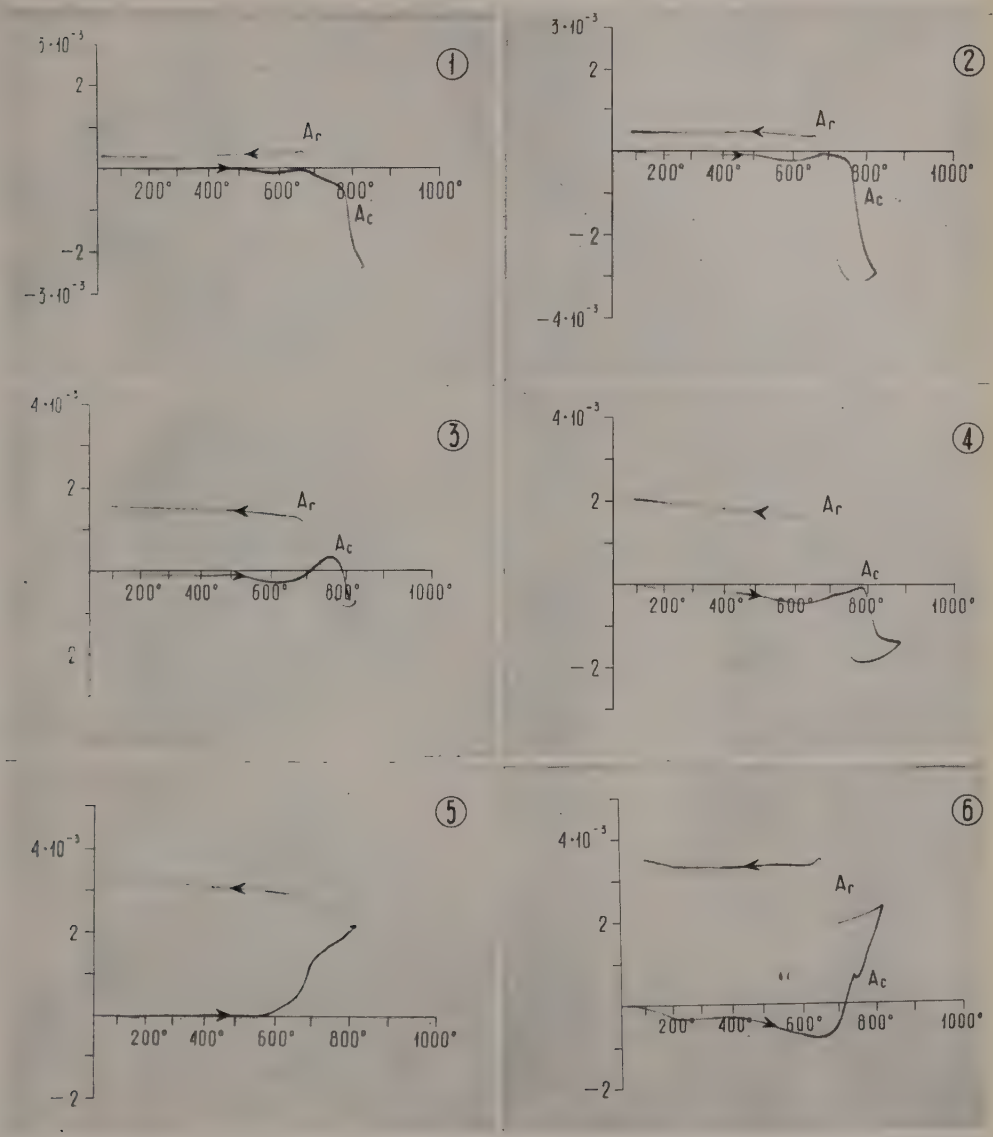
L'assieme dei risultati ottenuti con gli esami descritti concorda con le risultanze del collaudo delle applicazioni delle partite di tubi che sono oggetto di queste indagini e indica altresì le cause della deficiente qualità a cui si deve la lamentata, eccessivamente elevata percentuale di rotture.

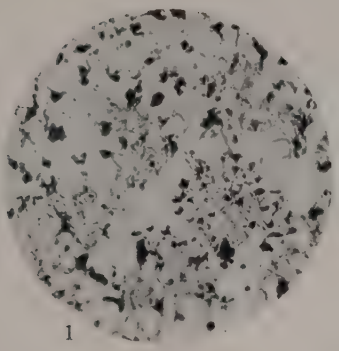
Per la partita di tubi colati verticalmente, la notevole fragilità è imputabile alle dimensioni delle lamelle di grafite nonchè all'elevato contenuto di fosforo (fragilizzante); per i tubi centrifugati di cui ai campioni N.ri: 3, 4, 5, la presenza di discrete quantità di cementite ledeburitica (fragilizzante) indica invece che il ciclo termico di ricottura non fu convenientemente aggiustato; circa il campione n. 6 — della partita di tubi che ha fornito i peggiori risultati — il materiale appare del tutto inadatto sia per la composizione sia per il trattamento.

Napoli — Istituto di Chimica industriale dell'Università.

---

[1]) Hanemann H. e Schrader A., *Atlas Metallographicus.*

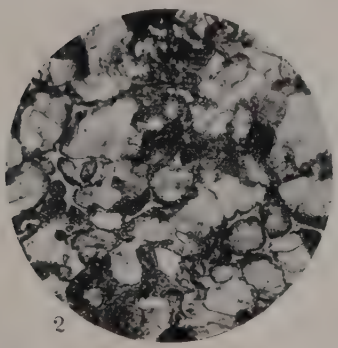

①
$5 \cdot 10^{-3}$
2
A_r
200° 400° 600° 800° 1000°
A_c
−2
$-3 \cdot 10^{-3}$
②
$3 \cdot 10^{-3}$
2
A_r
200° 400° 600° 800° 1000°
A_c
−2
$-4 \cdot 10^{-3}$
③
$4 \cdot 10^{-3}$
2
A_r
A_c
200° 400° 600° 800° 1000°
④
$4 \cdot 10^{-3}$
2
A_r
A_c
200° 400° 600° 800° 1000°
−2
⑤
$4 \cdot 10^{-3}$
2
200° 400° 600° 800° 1000°
−2
⑥
$4 \cdot 10^{-3}$
2
A_r
A_c
200° 400° 600° 800° 1000°
−2



1

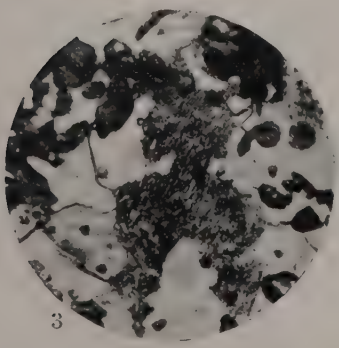
Campione N. 1 della tabella II.

Non attaccato ; × 150.



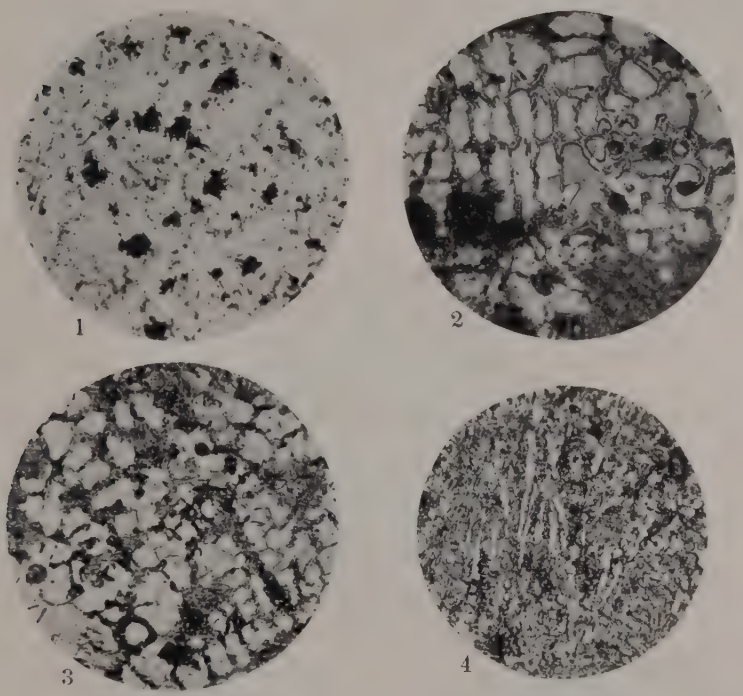
2

Attacco « nital » ; × 360



3

Attacco « nital » ; × 1000



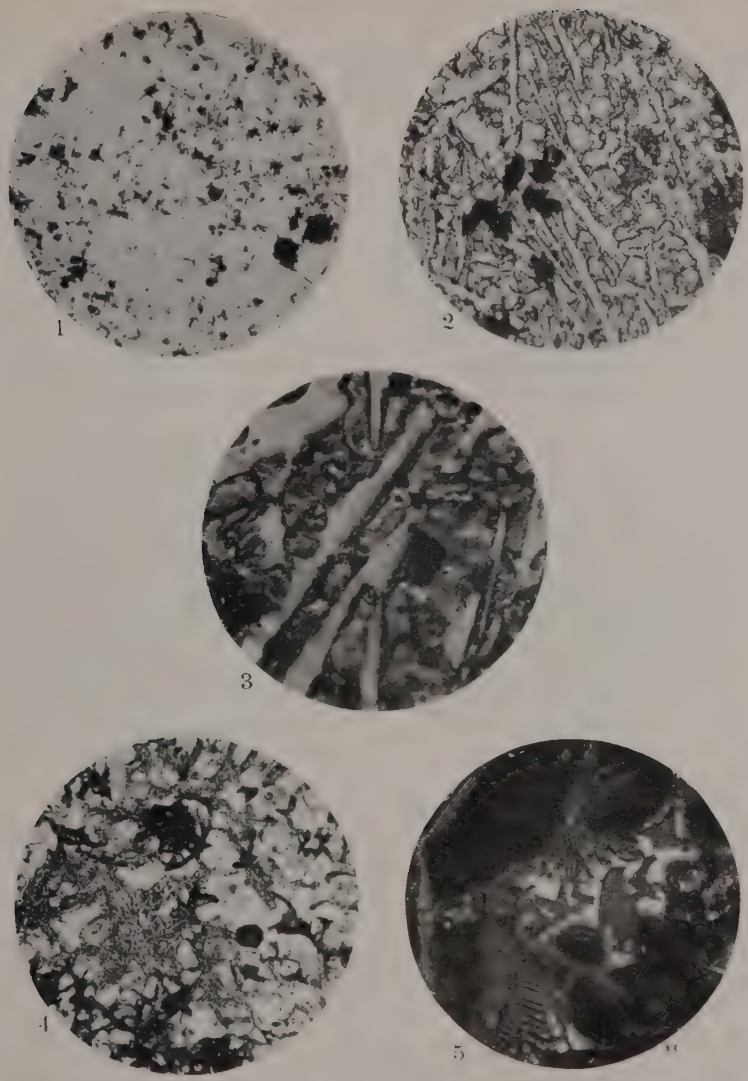
Campione N. 3 della tabella II.

Fig. 1. — Non attaccato; × 150

Fig. 2. — Attacco « nital »; × 360.

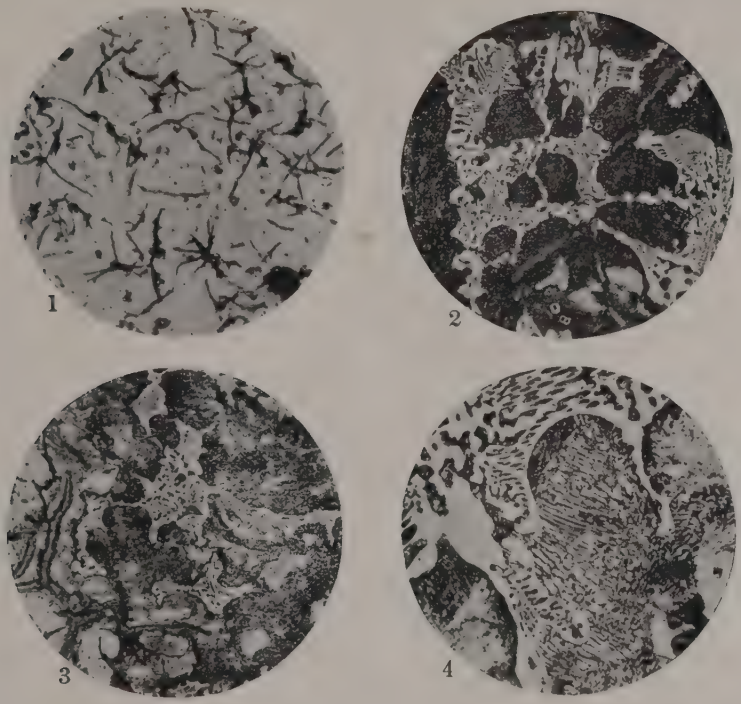
Fig. 3. — Attacco « picrato sodico »; × 360.

Fig. 4. — Attacco « nital »; × 360.



Campione N. 4 della tabella II.

Fig. 1. — Non attaccato; × 150.
Fig. 2. — Attacco « nital »; × 360.
Fig. 3. — Attacco « nital »; × 1000.
Fig. 4. — Attacco « picrato sodico »; × 360.
Fig. 5. — Attacco con soluzione ferricianidrica: × 750.



Campione N. 5 della tabella II.

Fig. 1. — Non attaccato: × 150.

Fig. 2. — Attacco « nital »; × 360.

Fig. 3. — Attacco « nital »: × 360.

Fig. 4. — Attacco « nital »; × 1000.

Il Metodo della Proiezione Isometrica

Nota del prof. **Mario Giovanardi**, *presentata dal socio ordin.* **R. Caccioppoli**

(Adunanza del dì 4 febbraio 1950)

Sunto. — In questa nota si espongono i concetti principali del metodo di rappresentazione della Geometria Descrittiva che si intitola « *Metodo della proiezione isometrica* », nel quale si rappresenta una figura dello spazio riferendola a due piani perpendicolari fra loro, l'uno π' orizzontale, detto *primo piano di proiezione* o *piano fondamentale*, l'altro π'' verticale, detto *secondo piano di proiezione* o *quadro*, mediante tre proiezioni, di cui una ortogonale a π' e le altre due nella direzione perpendicolare al piano bisettore di uno dei diedri formato dai piani stessi. Le proiezioni sul quadro nella direzione innanzi accennata, (che risulta perpendicolare alla fondamentale ed inclinata di 45^0 ad entrambi i piani di proiezione), di figure sia del piano fondamentale che di un piano parallelo a questo o di un piano parallelo al quadro sono rispettivamente eguali alle figure stesse, onde la denominazione che si è data al metodo di rappresentazione considerato, cioè « *Metodo della proiezione isometrica* » (dal greco: ἴσος, eguale; μέτρον, misura). Questo, applicato alla rappresentazione di una figura dello spazio, riunisce due vantaggi: l'uno, di darci una chiara idea della forma della figura medesima, l'altro, di farcene determinare con grande facilità le dimensioni.

§ 1 — *Generalità*

Si considerino due piani, π' e π'', perpendicolari fra loro, di cui il primo, orizzontale, è detto *primo piano di proiezione* o *piano fondamentale*, l'altro, verticale, è detto *secondo piano di proiezione* o *quadro* (Fig. 1). La retta d'intersezione dei piani considerati è detta *retta fondamentale* o semplicemente *fondamentale*.

I due piani di proiezione prolungati indefinitamente determinano quattro angoli diedri o regioni nelle quali è compreso tutto lo spazio. La fondamentale divide ciascun piano di proiezione in due semipiani, che prendono nomi diversi secondo la posizione che occupa l'osservatore rispetto ad essi. Supposto l'osservatore disposto nell'angolo *I* coi piedi sul piano fondamentale e con gli occhi rivolti verso il quadro, si dirà *semipiano anteriore* quella parte del piano fondamentale su cui poggia coi piedi l'osservatore, e *semipiano posteriore* l'altra. Si dirà poi *semipiano superiore* quella parte del quadro al disopra del piano fondamentale e *semipiano inferiore* l'altra.

Gli angoli diedri formati dai piani di proiezione si denominano accoppiando i nomi delle parti di piano che ne formano le facce. Si denomina *regione anteriore superiore* o *primo diedro* quella formata dal semipiano anteriore e da quello superiore; *regione posteriore superiore o secondo diedro* quella formata dal semipiano posteriore e da quello superiore; *regione posteriore inferiore* o *terzo diedro* quella formata dal semipiano posteriore e da quello inferiore; *regione anteriore inferiore* o *quarto diedro* quella formata dal semipiano anteriore e da quello inferiore.

Si considerino inoltre altri due piani, di cui l'uno, β', biseca il primo ed il terzo diedro ed è detto *primo piano bisettore*, l'altro, β'', biseca il secondo ed il quarto diedro ed è detto *secondo piano bisettore*. I quattro diedri innanzi definiti sono così suddivisi in otto, che definiamo: *semidiedro* (1) *e semidiedro* (1') quelli formati rispettivamente dal semipiano anteriore e dal primo piano bisettore, da questo e dal semipiano superiore; *semidiedro* (2) e *semidiedro* (2') quelli formati rispettivamente dal semipiano superiore e dal secondo piano bisettore, da questo e dal semipiano posteriore; *semidiedro* (3) e *semidiedro* (3') quelli formati rispettivamente dal semipiano posteriore e dal primo piano bisettore, da questo e dal semipiano inferiore; *semidiedro* (4) e *semidiedro* (4') quelli formati rispettivamente dal semipiano inferiore e dal secondo piano bisettore, da questo e dal semipiano anteriore.

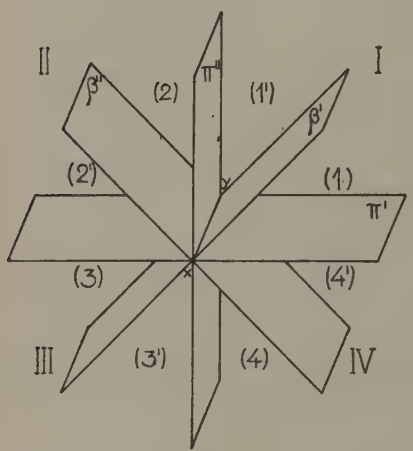


Fig. 1

Rappresenteremo gli elementi geometrici fondamentali: punto, retta e piano, riferendoli alla coppia di piani π' e π'' nel modo che segue.

§ 2 — *Rappresentazione del punto*

Dato un punto P dello spazio, sia P_0' la sua proiezione sul piano fondamentale π' dal punto improprio O_∞' nella direzione ortogonale a detto piano; evidentemente questa non può bastare ad individuare il punto P perchè ogni punto della retta verticale $P\,P_0'$ ha quale proiezione su π' lo stesso punto P_0' (Fig. 2). Proiettiamo quindi il punto P anche sul quadro π'' dal punto improprio O_∞'' nella direzione perpendicolare al secondo piano bisettore β'' innanzi definito, otterremo un punto P''. Il piano delle due rette PP_0' e PP'' risulta perpendicolare alla retta fondamentale e la interseca in

un punto F che è anche il piede comune delle perpendicolari alla retta stessa condotte da P_0' e da P''; tale piano è detto *piano di profilo*. Dato P nello spazio si ricavano quindi sui piani π' e π'' i punti P_0' e P'' nel modo anzidetto; viceversa, dati su π' e π'' due punti P_0' e P'' tali che le perpendicolari da essi alla fondamentale la incontrino in uno stesso punto F, basterà condurre dal punto P_0' la perpendicolare al piano fondamentale π' e dal punto P'' la perpendicolare al secondo piano bisettore β'' per ottenere come loro intersezione un punto P che ha quali proiezioni nelle direzioni indicate i due punti P_0' e P''.

Estendendo le costruzioni fatte per il punto P, onde determinarne le due sue proiezioni nel modo anzidetto, ai diversi punti di una figura dello spazio, si ha che il sistema delle due proiezioni di questa determina la figura stessa ma presenta l'inconveniente di essere una figura solida, mentre nel foglio di disegno non si hanno che due sole dimensioni. Per ovviare a ciò proiettiamo anche il sistema piano π' sul piano π'' nella predetta direzione perpendicolare al secondo piano bisettore; il punto P_0', proiezione ortogonale su π' di un punto P dello spazio, si proietterà su π'' in un punto P' tale che la congiungente $P'P''$ risulterà perpendicolare alla fondamentale. I punti P' e P'' sono denominati rispettivamente *prima proiezione* e *seconda proiezione* del punto P; il punto P' è detto anche *biproiezione* di P perchè è la proiezione di una proiezione. Per indicare che il punto P è rappresentato dalla coppia P', P'' si usa la seguente notazione $P \sim (P', P'')$ e si legge: P rappresentato da P', P''. La retta che congiunge le due proiezioni di un punto è detta *retta di richiamo*.

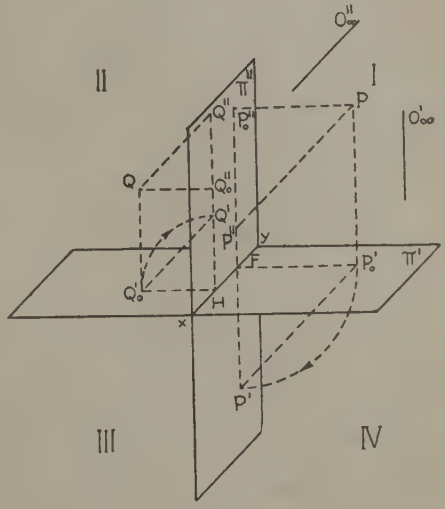


Fig. 2

La figura piana $PP_0'P'P''$ è un parallelogrammo, essa appartiene al piano di profilo passante per P che interseca la fondamentale nel punto F. Le lunghezze dei due segmenti PP_0' e $P_0'F$ indicano rispettivamente le distanze del punto P dal piano fondamentale e dal quadro, la prima delle quali è detta *quota*, la seconda, *aggetto* del punto P.

Osservando che PP_0' è eguale a $P''P'$ e che $P'F$ è eguale a $P_0'F$, si ha che, assegnate le proiezioni P', P'' di un punto P dello spazio, la quota e l'aggetto di esso sono indicati rispettivamente dalla distanza fra la due proiezioni del punto e dalla distanza fra la prima proiezione di esso e la fondamentale.

Nella Fig. 2 si sono rappresentati due punti generici, l'uno P del primo diedro e l'altro Q del secondo diedro.

Segue dalle cose dette che segnando sul foglio di disegno una retta che rappresenti la fondamentale, lo stesso foglio, che rappresenta i due piani di proiezione sovrapposti, resta diviso da quella retta in due parti, una delle quali rappresenta il piano anteriore e l'inferiore e l'altro il superiore ed il posteriore. Naturalmente si deve indicare quale delle due parti si vuole che abbia il primo significato e quale il secondo. Si suppone perciò che, individuata la fondamentale con le lettere X e Y, l'osservatore guardi il foglio di disegno in modo da avere la lettera X alla sua sinistra e la lettera Y alla sua destra; in tal guisa la parte del foglio di disegno superiore alla fondamentale rappresenta il piano posteriore ed il superiore e quella al di sotto della fondamentale stessa rappresenta il piano posteriore e l'inferiore.

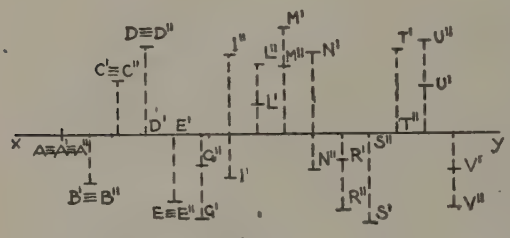


Fig. 3

Si osserva che la predetta operazione di proiezione sul quadro nella direzione perpendicolare al secondo piano bisettore eseguita per il piano π' equivale a quella di ribaltamento di questo stesso sul quadro, che si otterrebbe facendolo rotare intorno alla fondamentale in modo da sovrapporre il semipiano posteriore a quello superiore, ovvero il semipiano anteriore a quello inferiore. Quindi la proiezione su π'' di una figura di π' è eguale alla figura stessa. Analogamente ciò si verifica per una figura appartenente ad un piano parallelo al piano fondamentale o ad un piano parallelo al quadro. Queste due osservazioni giustificano la denominazione data al metodo di rappresentazione finora esposto: *Metodo della proiezione isometrica,* in cui l'aggettivo *isometrica* deriva dai vocaboli greci: ἴσος, eguale; μέτρον, misura.

Consideriamo ora un punto nelle sue varie posizioni rispetto ai piani di proiezione (Fig. 3).

Un punto A della fondamentale ha entrambe le proiezioni coincidenti con sè stesso, $A \sim (A' \equiv A'' \equiv A)$.

Un punto B del semipiano anteriore ha le proiezioni coincidenti in un punto al di sotto della fondamentale, $B \sim (B' \equiv B'')$.

Un punto C del semipiano posteriore ha le proiezioni coincidenti in un punto al di sopra della fondamentale, $C \sim (C' \equiv C'')$.

Un punto D del semipiano superiore ha la prima proiezione sulla fondamentale, la seconda coincidente con sè stesso al di sopra della fondamentale, $D \sim (D', D'' \equiv D)$.

Un punto E del semipiano inferiore ha la prima proiezione sulla fondamentale e la seconda coincidente con sè stesso al di sotto della fondamentale, $E \sim (E', E'' \equiv E)$.

Un punto G del semidiedro (1) ha entrambe le proiezioni al di sotto della fondamentale, e precisamente la seconda proiezione più vicina a questa, $G \sim (G', G'')$.

Un punto I del semidiedro (1') ha le proiezioni da parti opposte rispetto alla fondamentale, delle quali la prima proiezione al di sotto di questa, $I \sim (I', I'')$.

Un punto L del secondo diedro, che comprende i semidiedri (2) e (2') ha entrambe le proiezioni al di sopra della fondamentale, delle quali la prima proiezione più vicina a questa, $L \sim (L', L'')$.

Un punto M del semidiedro (3) ha entrambe le proiezioni al di sopra della fondamentale, delle quali la seconda proiezione più vicina a questa, $M \sim (M', M'')$,

Un punto N del semidiedro (3') ha le proiezioni da parti opposte rispetto alla fondamentale, e precisamente la prima proiezione al di sopra di questa, $N \sim (N', N'')$.

Un punto R del quarto diedro, che comprende i semidiedri (4) e (4') ha entrambe le proiezioni al di sotto della fondamentale, e precisamente la prima proiezione più vicina a questa, $R \sim (R', R'')$.

Si nota in particolare per quanto riguarda i piani bisettori che delle due proiezioni di un punto del primo piano bisettore la seconda proiezione appartiene alla fondamentale, e che le due proiezioni di un punto del secondo piano bisettore distano fra loro quanto la prima proiezione di esso dista dalla fondamentale, essendo la quota eguale all'aggetto del punto stesso. Nella Fig. 3 si sono considerati quattro punti: $S \sim (S', S'')$, $T \sim (T', T'')$, $U \sim (U', U'')$, $V \sim (V', V'')$ appartenenti rispettivamente al primo piano bisettore, nel primo e nel terzo diedro, ed al secondo piano bisettore, nel secondo e nel quarto diedro.

§ 3 — *Rappresentazione della retta*

Una retta r è individuata da due suoi punti; le rette r' e r'' che congiungono rispettivamente le prime e le seconde proiezioni dei due punti rappresentano la prima e la seconda proiezione della retta, ovvero il luogo delle prime proiezioni e quello delle seconde proiezioni di tutti i punti della r. In altri termini r' e r'' denotano rispettivamente la proiezione sul secondo piano di proiezione nella direzione perpendicolare al secondo piano bisettore dell'intersezione r_0' del piano fondamentale o primo piano di proiezione col piano ad esso perpendicolare condotto per r, e l'intersezione del quadro o secondo piano di proiezione col piano condotto per r perpendicolare al secondo piano bisettore, detto *piano proiettante* r.

Per indicare che la coppia r', r'' rappresenta la retta r useremo la notazione $r \sim (r', r'')$, che si leggerà r rappresentata da r', r''.

Denominiamo *prima traccia* o *traccia orizzontale* di una retta r il

punto O_r in cui essa incontra il primo piano di proiezione; come tale è quindi rappresentato dal punto $O_r' \equiv O_r''$ (Fig. 4). È evidente che l'insieme delle prime proiezioni e quello delle seconde proiezioni dei punti di una retta costituiscono due punteggiate prospettive simili col centro di prospettività improprio nella direzione perpendicolare alla fondamentale. Le proiezioni della prima traccia sono coincidenti nel punto comune alle due proiezioni della r, che è il punto unito della prospettività fra le due punteggiate r' e r''. Tale punto, pur essendo la proiezione della prima traccia della r, continueremo a denominarlo semplicemente prima traccia della retta r.

Denominiamo *seconda traccia* o *traccia verticale* di una retta r il punto V_r in cui essa incontra il secondo piano di proiezione; V_r coincide con la sua seconda proiezione V_r'' ed appartiene a r'', seconda proiezione della r, mentre la sua prima proiezione V_r' appartiene alla fondamentale ed alla prima proiezione r' della retta r, ovvero è il punto comune alla fondamentale ed alla r'.

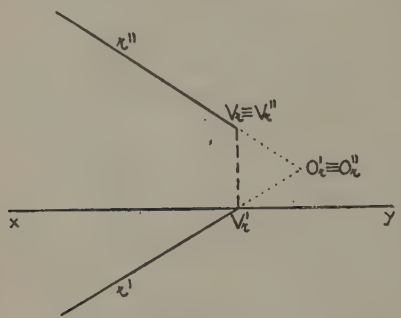


Fig. 4

Nel disegno, poichè si è convenuto che l'osservatore si ponga nel primo diedro, quella parte di una retta che si trova in questo diedro è visibile, le proiezioni di tale parte si disegnano a tratto continuo, mentre quelle parti che trovansi negli altri diedri sono invisibili all'osservatore stesso; le proiezioni di queste si disegnano a punti. Una convenzione analoga si farà per una figura qualunque, in seguito.

Risultano evidenti le seguenti rappresentazioni di alcune rette particolari.

Una retta del piano fondamentale ha le due proiezioni coincidenti.

Una retta parallela al piano fondamentale, detta *retta orizzontale*, ha le proiezioni parallele.

Una retta del quadro ha la prima proiezione concidente con la fondamentale.

Una retta parallela al quadro, detta *retta di fronte*, ha la prima proiezione parallela alla fondamentale.

Una retta parallela ad entrambi i piani di proiezione ha le proiezioni parallele alla fondamentale.

Una retta perpendicolare al piano fondamentale, detta *retta verticale*, ha per prima proiezione un punto e la seconda proiezione perpendicolare alla fondamentale.

Una retta appartenente ad un piano di profilo, detta *retta di profilo*, ha le proiezioni coincidenti in una retta perpendicolare alla fondamentale.

Per rappresentarla occorre assegnare le proiezioni di due suoi punti generici oppure le tracce.

Fra le rette di profilo sono comprese, oltre le rette verticali, le rette perpendicolari al quadro, le quali hanno la prima traccia impropria. Per individuarle occorre assegnare la seconda traccia sulle loro proiezioni.

Una retta del primo piano bisettore ha la seconda proiezione coincidente con la fondamentale.

Una retta b del secondo piano bisettore ha le proiezioni b', b'' incidenti in un punto della fondamentale, che è sia la prima che la seconda traccia di essa, ed ha inoltre la prima proiezione b' coincidente con la mediana di un triangolo rettangolo uscente da detto punto, vertice del triangolo stesso, del quale un cateto coincide con la fondamentale, l'ipotenusa con la seconda proiezione b'' della retta medesima e l'altro cateto, rispetto al quale b' è mediana, coincide con una retta perpendicolare alla fondamentale.

Tenendo presente quanto si è detto circa la rappresentazione di punti appartenenti ai piani bisettori, si rappresentano facilmente le intersezioni di una retta coi piani stessi.

Osservando che un punto del primo piano bisettore ha la seconda proiezione sulla fondamentale, il punto d'intersezione di una retta r col primo piano bisettore avrà per seconda proiezione il punto d'incontro della seconda proiezione r'' della r con la fondamentale e la prima proiezione sulla r', prima proiezione della retta stessa.

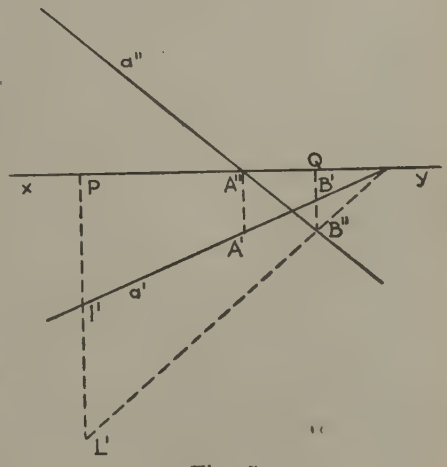


Fig. 5

Osservando inoltre che la prima proiezione di un punto B del secondo piano bisettore è il punto medio del segmento di retta perpendicolare alla fondamentale avente per estremi rispettivamente la seconda proiezione di B ed il punto d'intersezione della perpendicolare stessa con la fondamentale, per rappresentare il punto d'incontro di una retta r col detto piano occorre ricercare il punto di essa tale che le sue proiezioni soddisfino alle predette condizioni di appartenenza.

Siano a' e a'' le proiezioni di una retta (Fig. 5); per un punto P della fondamentale si conduca la perpendicolare ad essa e la si prolunghi oltre il suo punto I' d'intersezione con la retta a' di una lunghezza $I'L'$ eguale a PI'. Si costruisca la retta congiungente L' col punto d'incontro della a' con la fondamentale e sia B'' l'intersezione di essa con la a''. Per il punto

B'' si conduca la retta di richiamo e siano B' e Q rispettivamente le sue intersezioni con la retta a' e con la fondamentale XY. I punti B' e B'' costituiscono la coppia rappresentatrice del punto B d'intersezione della retta a col secondo piano bisettore. Infatti, essendo le rette parallele PL' e QB'' secate dalle trasversali XY, a' e $L'B''$, per il teorema di Talete si ha:

$$\frac{PI'}{PL'} = \frac{QB'}{QB''}$$

ovvero:

$$\frac{PI'}{2\,PI'} = \frac{QB'}{QB''}$$

da cui:

$$QB' = \frac{QB''}{2}$$

Nel caso considerato il punto B trovasi nel quarto diedro.

Il punto $A \backsim (A', A'')$ è l'intersezione della retta a col primo piano bisettore. Esso trovasi nel primo diedro.

Dopo le considerazioni fatte è semplice la rappresentazione di una retta parallela al primo piano bisettore e di una retta parallela al secondo piano bisettore.

Una retta parallela al primo piano bisettore ha la seconda proiezione parallela alla fondamentale.

Una retta è parallela al secondo piano bisettore se in questo esiste una retta parallela ad essa. Date quindi le proiezioni r', r'' di una retta r, per verificare se questa è parallela al secondo piano bisettore condurremo per un punto della fondamentale le parallele ad esse, se queste, considerate come proiezioni di una retta parallela alla retta r, soddisferanno alle condizioni di appartenenza di una retta al secondo piano bisettore, la retta r sarà parallela a questo. Per semplificare, come retta parallela alla r potrebbe considerarsi quella appartenente allo stesso piano proiettante r, la quale avrà la seconda proiezione coincidente con la seconda proiezione della r.

§ 4 — *Rappresentazione del piano*

Un piano è individuato o da due rette incidenti in un punto, che può essere proprio o improprio, o da un punto ed una retta che non si appartengono, o da tre punti distinti non allineati. Nel primo di questi due ultimi casi congiungendo il punto dato con un punto proprio o col punto improprio della retta data, si ha un'altra retta che con la precedente definisce un piano, nel secondo caso congiungendo uno dei tre punti

dati con ciascuno degli altri due si hanno due rette che determinano un piano.

Se due rette a, b hanno un punto comune P, la prima proiezione di questo deve trovarsi simultaneamente sulle due prime proiezioni di a e b; analogamente la seconda proiezione di P si deve trovare sulle seconde proiezioni di a e b. Dunque si può dire che la condizione necessaria e sufficiente affinchè due rette s'incontrino, e quindi determinino un piano, è che la congiungente i punti di incontro delle proiezioni omonime sia perpendicolare alla fondamentale. Se ciò non si verifica, le rette sono sghembe, cioè un piano per l'una non contiene l'altra.

La retta che congiunge le prime tracce di due rette appartenenti ad un piano α individua la *prima traccia* o *traccia orizzontale* di questo; essa, che indichiamo con o_α, ha le proiezioni coincidenti, $o_\alpha' \equiv o_\alpha''$. La proiezione di o_α continueremo a denominarla semplicemente prima traccia di α.

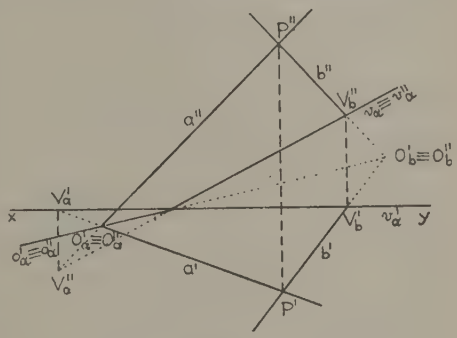


Fig. 6

La retta che congiunge le seconde tracce di due rette appartenenti ad un piano α individua la *seconda traccia* o *traccia verticale* di questo. Essa, che indichiamo con v_α, ha la seconda proiezione coincidente con sè stessa, $v_\alpha \equiv v_\alpha''$, e la prima proiezione coincidente con la fondamentale. È evidente che entrambe le tracce concorrono in uno stesso punto della fondamentale.

Nella Fig. 6, assegnate le proiezioni a', a'' e b', b'' di due rette a e b incidenti in un punto proprio $P \sim (P', P'')$, si sono rappresentate le tracce del piano α individuato dalle rette stesse: $o_\alpha \sim (o_\alpha' \equiv o_\alpha'')$, prima traccia, e $v_\alpha \sim (v_\alpha' \equiv XY, v_\alpha'' \equiv v_\alpha)$, seconda traccia.

Poichè sulla retta $o_\alpha' \equiv o_\alpha''$, prima traccia del piano α, concorrono entrambe le proiezioni di qualsiasi retta di esso, ed essendo inoltre le proiezioni di ogni punto di α allineate col punto improprio nella direzione perpendicolare alla fondamentale, ne risulta il teorema: *le proiezioni di un sistema piano, in generale, si corrispondono in una omologia affine avente per asse la prima traccia del piano del sistema e per centro il punto improprio nella direzione perpendicolare alla fondamentale.*

Un piano, dopo quanto si è detto, può essere rappresentato anche assegnandone le tracce.

Risultano evidenti le seguenti rappresentazioni di piani particolari.

Un piano parallelo al piano fondamentale, detto *piano orizzontale*, ha la prima traccia impropria e la seconda parallela alla fondamentale.

Un piano parallelo al quadro, detto *piano di fronte*, ha la prima traccia parallela alla fondamentale e la seconda impropria.

Un piano parallelo alla fondamentale ha entrambe le tracce parallele ad essa.

Un piano passante per la fondamentale ha le tracce coincidenti con questa; per poterlo rappresentare occorre asssegnare le proiezioni di un suo punto non appartenente alla fondamentale.

Un piano perpendicolare al piano fondamentale, detto *piano verticale*, ha la seconda traccia perpendicolare alla fondamentale e la prima inclinata a questa.

Un piano perpendicolare al quadro ha la prima traccia perpendicolare alla fondamentale e la seconda inclinata a questa.

Un piano proiettante, cioè perpendicolare al secondo piano bisettore, ha le tracce coincidenti.

Un piano di profilo, cioè perpendicolare alla fondamentale, è rappresentato da un suo punto $P \sim (P', P'')$; le sue tracce coincidono con la congiungente le due proiezioni di P.

§ 5 — *Condizioni di appartenenza. Problemi grafici fondamentali*

Se un punto appartiene ad una retta le sue due proiezioni appartengono alle proiezioni omonime della retta; fa eccezione il caso in cui la retta sia di profilo, essendo allora tali condizioni non sufficienti.

Se una retta r appartiene ad un piano di profilo, le sue due proiezioni coincidono in una retta $r' \equiv r''$ perpendicolare alla fondamentale, per verificare se un punto P, le cui due proiezioni stanno su detta r', appartiene alla retta r, occorre ribaltare sul quadro il piano di profilo medesimo; se il ribaltamento di P appartiene al ribaltamento della r, il punto P sta su r.

Perchè una retta appartenga ad un piano è necessario che incontri due rette del piano. Perciò se a e b sono due rette incidenti in un punto P che determinano il piano e r', r'' le proiezioni della retta data r appartenente ad esso, i punti M' e N' in cui la r' incontra le prime proiezioni a' e b' delle due rette a e b del piano devono stare rispettivamente su due perpendicolari alla fondamentale coi punti M'' e N'' in cui la seconda proiezione r'' della retta data incontra le seconde proiezioni a'' e b'' delle rette a e b.

Quando il piano dato è individuato dalle sue tracce le condizioni precedenti equivalgono a dire che le tracce della retta devono stare sulle tracce omonime del piano.

Diconsi *rette principali* di un piano le rette orizzontali e le rette di fronte appartenenti ad esso. Le rette orizzontali di un piano, delle quali le seconde tracce appartengono alla seconda traccia di esso, hanno entrambe le proiezioni parallele alla prima traccia del piano stesso. Le rette di fronte di un piano, delle quali le prime tracce appartengono alla prima

traccia di esso, hanno le prime proiezioni parallele alla fondamentale e le seconde parallele alla seconda traccia del piano medesimo. Nella Fig. 7 si sono rappresentate una retta orizzontale $o \sim (o' \equiv o'')$ ed una retta di fronte $f \sim (f', f'')$ appartenenti entrambe ad un piano α assegnato mediante le tracce.

Condizione per l'appartenenza di un punto ad un piano è che per il punto passi una retta appartenente al piano.

Tenendo presenti le predette condizioni di appartenenza, potremmo risolvere vari problemi concernenti ad esse; ne accenniamo qualcuno.

Data una delle proiezioni di una retta appartenente ad un piano, determinarne l'altra.

Sia r' la prima proiezione di una retta appartenente ad un piano α, individuato dalle due rette a e b incidenti in un punto P; dai punti M' e N' in cui essa incontra le prime proiezioni delle rette a e b di α si conducano le perpendicolari alla fondamentale; la congiungente i punti M'' e N'', in cui le dette perpendicolari incontrano le seconde proiezioni delle medesime rette di α, è la proiezione richiesta.

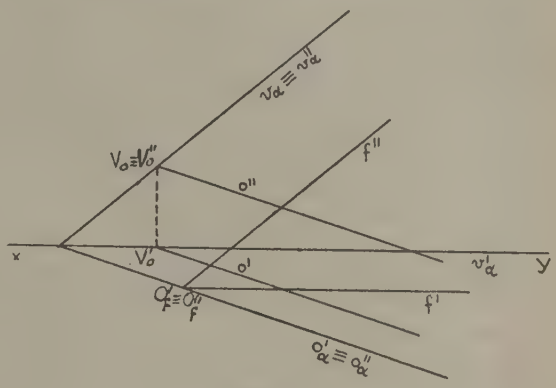


Fig. 7

Data una delle proiezioni di un punto appartenente ad un piano, determinare l'altra.

Per la proiezione data di un punto P, supponiamo che sia la seconda, P'', si conduca una retta qualunque e la si consideri come seconda proiezione di una retta appartenente al piano considerato, come tale se ne trovi la prima proiezione r', il punto P' in cui la retta di richiamo condotta per P'' incontra la r' e la prima proiezione cercata del punto P.

Data una delle proiezioni di una figura appartenente ad un piano assegnato mediante le tracce, determinare l'altra.

Sia il piano α assegnato mediante le tracce: $o_\alpha \sim (o_\alpha' \equiv o_\alpha'')$, prima traccia, e $v_\alpha \sim (v_\alpha' \equiv XY, v_\alpha'' \equiv v_\alpha)$, seconda traccia; sia Φ' la prima proiezione di una figura Φ appartenenie a α. La seconda proiezione Φ'' di Φ si determinerà costruendo la figura omologica affine di Φ' nell'affinità avente per asse o_α' e per centro il punto improprio nella direzione perpendicolare alla fondamentale. Una coppia di punti corrispondenti in detta affinità può essere costituita dalla prima e dalla seconda proiezione di un punto qualsiasi appartenente alla seconda traccia del piano α.

Punto d' incontro di una retta con un piano.

Sia r la retta data ed il piano assegnato sia determinato da due sue rette a, b incidenti in un punto P; si consideri il punto d' incontro della r con la retta del piano $a\,b$ appartenente al piano proiettante r; esso sarà il punto cercato. Considerando r'', seconda proiezione della r, anche come seconda proiezione di una retta s appartenente al piano dato e, come tale, indicata con $s'' \equiv r''$, se ne deduca la prima proiezione s'. Il punto in cui s' incontra r' è la prima proiezione I' del punto cercato I; la seconda proiezione I'' è determinata dalla intersezione della r'' con la retta di richiamo condotta per I'. Il problema ammette anche altre soluzioni, considerando cioè per la retta r un piano qualsiasi e determinandone la retta i intersezione col piano $a\,b$; il punto comune alla i ed alla r è quello richiesto. Per ciò fare occorre conoscere anzitutto le costruzioni da eseguire per determinare la retta intersezione di due piani generici, di cui accenneremo in seguito.

Retta intersezione di due piani.

Siano α e β i due piani dati, il primo determinato dalle rette a, b incidenti in un punto P e l' altro dalle rette c, d incidenti in un punto Q; determinati, come nel problema precedente, i punti in cui le rette di uno dei piani incontrano l' altro, la congiungente i due punti ottenuti è la intersezione cercata.

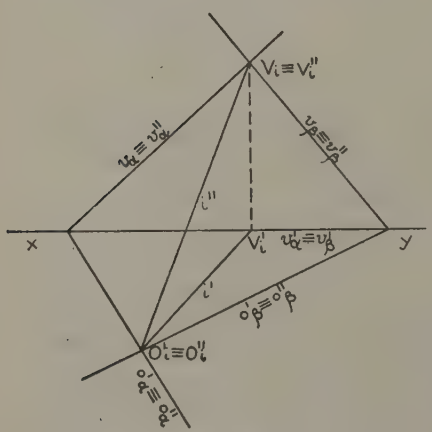


Fig. 8

Se le rette che individuano i piani dati sono tali che non riesce facile rappresentare i punti dove le due rette che determinano uno dei piani incontrano l' altro, perchè le proiezioni dei punti stessi capitano fuori del foglio di disegno, si potranno considerare nei piani rette tali che facilitino la determinazione dei punti appartenenti alla intersezione richiesta, facendo in modo che le proiezioni di questi siano accessibili.

Se i piani fossero dati per mezzo delle tracce e queste si incontrassero nel foglio di disegno, i punti in cui si intersecano le tracce omonime sono le tracce omonime della intersezione i cercata, la quale è così determinata (Fig. 8).

Se le tracce dei piani α e β non s' incontrassero nel foglio di disegno si ricorrerebbe a due piani ausiliari, che, per semplificare le costruzioni, si sceglierebbero paralleli fra loro. Determinando le intersezioni di questi piani con entrambi i piani assegnati, si ottengono due coppie di rette; i

punti di incontro di ciascuna coppia appartengono alla retta i intersezione di α e β.

Nella Fig. 9 si è considerato tal caso, come piani ausiliari si sono scelti due piani proiettanti, σ e τ, paralleli fra loro. Le due coppie di rette $r \sim (r', r'' \equiv v_\sigma)$; $t \sim (t', t'' \equiv v_\tau)$ e $s \sim (s', s'' \equiv v_\sigma)$; $u \sim (u', u'' \equiv v_\tau)$ sono le intersezioni rispettive dei piani σ e τ coi piani α e β, e propriamente:

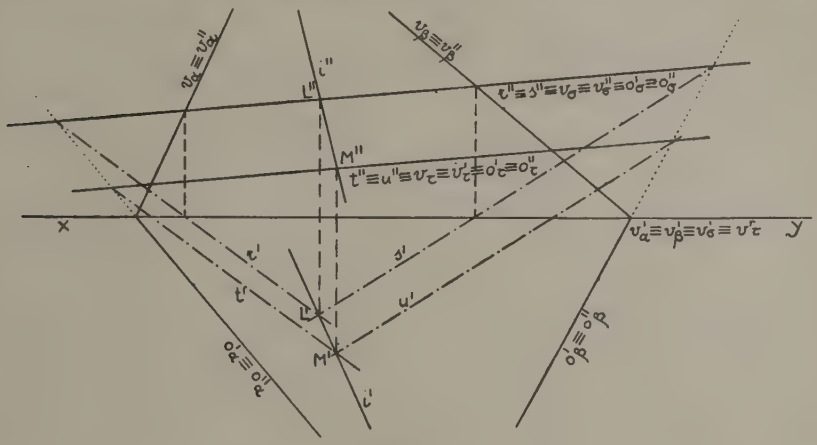


Fig. 9

$r \equiv \sigma\alpha$, $t \equiv \tau\alpha$, $s \equiv \sigma\beta$, $u \equiv \tau\beta$ I due punti, $L \sim (L', L'')$ e $M \sim (M', M'')$, di cui il primo comune a r e s e l'altro a t e u, individuano la retta $i \sim (i', i'')$, intersezione dei piani α e β.

§ 6 — *Condizioni di parallelismo*

È noto dalla Geometria Elementare che due rette sono parallele se due piani per l'una sono paralleli a due piani per l'altra retta; due piani sono paralleli se due rette dell'uno non parallele fra loro sono parallele a due rette dell'altro.

Condizione di parallelismo di due rette nel metodo della Geometria Descrittiva considerato è che le loro proiezioni omonime siano parallele.

Vi è un caso di eccezione, quello in cui le due rette siano di profilo, in tal caso la condizione enunciata non è sufficiente. Per verificare se due rette di profilo sono parallele occorre ribaltare sul quadro i piani di profilo cui esse appartengono, se i ribaltamenti delle due rette risulteranno paralleli, le rette saranno parallele. Le rette potrebbero anche appartenere ad uno stesso piano di profilo.

Condizioni di parallelismo di due piani è che siano parallele le tracce omonime. Vi è un caso di eccezione, quello in cui i due piani siano entrambi paralleli alla fondamentale. In tal caso la condizione di parallelismo fra le tracce non è sufficiente, occorrerà secare i piani con un altro piano,

se le intersezioni che si otterranno saranno parallele, i piani saranno paralleli.

La condizione di parallelismo fra una retta ed un piano è che la retta sia parallela ad una retta del piano o anche che passi per essa un piano parallelo al piano considerato.

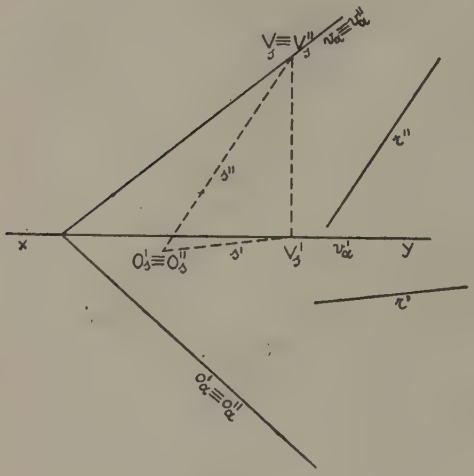


Fig. 10

Premesse queste condizioni di parallelismo, potremo risolvere alcuni problemi.

Dati una retta ed un piano, verificare se la retta è parallela al piano.

Per un punto del piano dato α, e sia P, conduciamo la parallela s alla retta assegnata r e determiniamone una delle tracce, se questa apparterrà alla traccia omonima del piano, la retta s, avendo due punti appartenenti al piano, sarà in esso, quindi la retta r sarà parallela al piano.

Nella Fig. 10 si è assegnato il piano α mediante le sue tracce $o_\alpha \sim (o_\alpha' \equiv o_\alpha'')$ e $v_\alpha \sim (v_\alpha' \equiv XY, v_\alpha'' \equiv v_\alpha)$. Scelto un punto $V_s \sim (V_s', V_s'' \equiv V_s)$ della seconda traccia di α, per esso si è condotta la retta $s \sim (s', s'')$ parallela alla retta data $r \sim (r', r'')$. Essendo risultata la prima traccia di s, $O_s \sim (O_s' \equiv \equiv O_s'')$, esterna a $o_\alpha' \equiv o_\alpha''$, la retta s è esterna al piano α, quindi, non esistendo in α una retta parallela alla r, questa non è parallela al piano stesso.

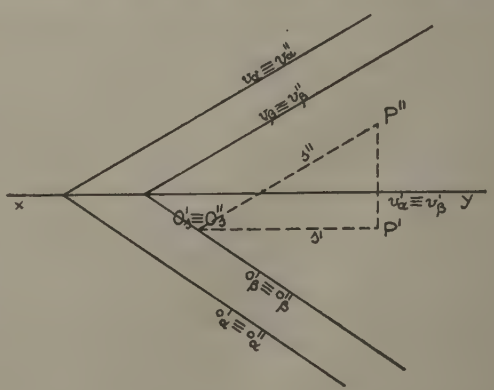


Fig. 11

Dati un punto ed un piano che non si appartengono, condurre per il punto il piano parallelo al piano assegnato.

Se il piano è asssegnato mediante due sue rette, basterà condurre per il punto le parallele alle rette che individuano il piano, esse determinano il piano parallelo al piano dato.

Se il piano è assegnato mediante le sue tracce, si conduca per il punto la retta s parallela ad una retta del piano e se ne determinino le tracce. Le

due rette condotte, l'una per la prima traccia della s e parallela alla prima traccia del piano, l'altra per la seconda traccia della s e parallela alla seconda traccia del piano medesimo, sono le tracce del piano cercato.

Nella Fig. 11, assegnato un piano α mediante le sue tracce $o_\alpha \sim (o_\alpha' \equiv o_\alpha'')$ e $v_\alpha \sim (v_\alpha' \equiv XY,\ v_\alpha'' \equiv v_\alpha)$, si è condotta per il punto dato $P \sim (P',\ P'')$ la parallela $s \sim (s',\ s'')$ ad una retta di fronte del piano α e quindi alla seconda traccia di esso, se n'è determinata la prima traccia $O_s' \equiv O_s''$; la parallela condotta per questo punto a $o_\alpha' \equiv o_\alpha''$ rappresenta la prima traccia $o'\beta \equiv o''\beta$ del piano β parallelo a α. La rappresentazione della seconda traccia si è determinata conducendo per il punto d'incontro di o_β' con la fondamentale la retta $v_\beta \equiv v_\beta''$ parallela a $v_\alpha \equiv v_\alpha''$.

§ 7 — *Condizioni di perpendicolarità*

È noto dalla Geometria Elementare che un angolo retto ha per proiezione ortogonale su un piano un angolo retto quando uno dei suoi lati è parallelo al piano stesso. Volendo quindi rappresentare una retta perpendicolare ad un'altra assegnata $r \sim (r', r'')$ e parallela al primo piano di proiezione, essa avrà entrambe le proiezioni parallele fra loro e perpendicolari alla r', prima proiezione della r. Una retta perpendicolare alla r e parallela al secondo piano di proiezione avrà la prima proiezione parallela alla fondamentale e la seconda proiezione parallela alla sua proiezione ortogonale su detto piano e quindi perpendicolare alla proiezione ortogonale della r sul piano medesimo.

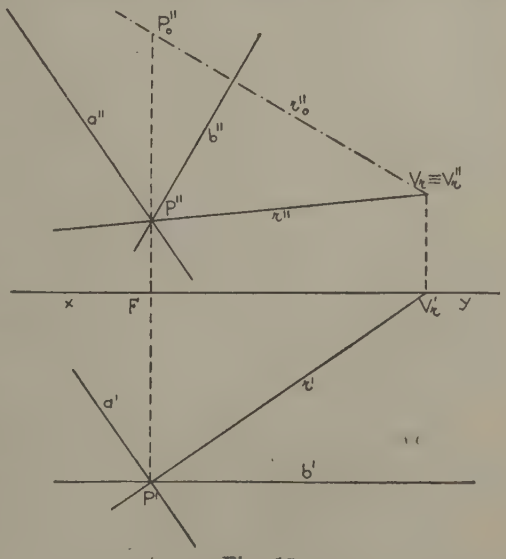


Fig. 12

Osserviamo che, date le due proiezioni di una retta r nel metodo di rappresentazione considerato, volendo determinare la proiezione ortogonale r_0'' della retta stessa sul secondo piano di proiezione π'', essa sarà individuata dalle proiezioni ortogonali su π'' di due punti della r, le quali sono gli estremi dei segmenti appartenenti rispettivamente alle rette di richiamo condotte per le prime proiezioni dei punti medesimi e distanti dalla fondamentale quanto

questi distano dal primo piano di proiezione [1]). Per semplificare si può considerare la seconda traccia della r come uno dei punti che individuano la r_0''.

Nella Fig. 12. assegnate le proiezioni r', r'' di una retta r e P', P'' di un punto appartenente ad essa, tenendo presente quanto ora si è detto, si sono rappresentate altre due rette, l'una $a \sim (a', a'')$ perpendicolare alla r e parallela al primo piano di proiezione, l'altra $b \sim (b', b'')$ perpendicolare alla r e parallela al secondo piano di proiezione. La retta r_0'', proiezione ortogonale della r sul secondo piano di proiezione π'', è stata individuata da $V_r \equiv V_r''$, seconda traccia della r, e dal punto P_0'', proiezione ortogonale di P su π''.

Le due rette a e b incidenti nel punto P individuano il piano passante per P e perpendicolare alla retta r.

Osservando inoltre che ogni retta appartenente ad un piano α e parallela al primo piano di proiezione, (retta orizzontale di α), ha entrambe le proiezioni parallele alla prima traccia di α e che ogni retta di α parallela al secondo piano di proiezione, (retta di fronte di α), ha la seconda proiezione parallela alla seconda traccia di α, potremo enunciare le seguenti condizioni di perpendicolarità fra retta e piano (Fig. 13).

Se una retta n condotta per un punto P ed un piano α assegnato mediante le tracce sono perpendicolari fra loro, la prima proiezione n' della n passa per P', prima proiezione di P, ed è perpendicolare alla prima traccia o_α' di α; la seconda proiezione n'' della n stessa passa per P'', seconda proiezione di P, e coincide con la ipotenusa di un triangolo rettangolo di cui un cateto coincide con la proiezione ortogonale n_0'' della n sul secondo piano di proiezione, l'altro cateto con la seconda traccia $v_\alpha \equiv v_\alpha''$ di α ed il vertice opposto a questa, punto appartenente anch'esso alla n'', è la seconda traccia $V_n \equiv V_n''$ della perpendicolare medesima.

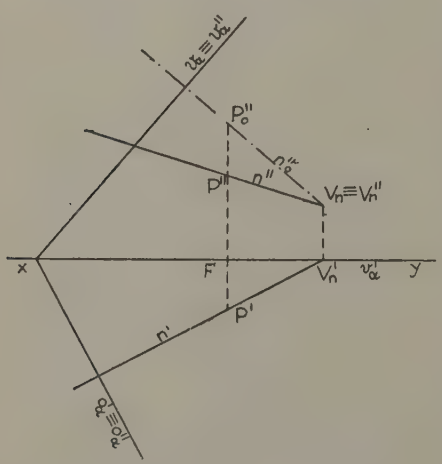


Fig. 13

Da quanto si è detto risultano evidenti le costruzioni grafiche per la rappresentazione del piano α condotto per un punto dato P e perpendicolare ad una retta r assegnata (Fig. 14).

---

[1]) Nella Fig. 2, riportata innanzi, il punto P_0'' rappresenta la proiezione ortogonale del punto P sul secondo piano di proiezione, essendo P' e P'' le due proiezioni di P nel metodo di rappresentazione considerato. Il punto P_0'' dista dalla fondamentale quanto P dista dal primo piano di proiezione, cioè quanto P'' dista da P'.

Tenendo presente che le tracce di α devono incidere in un punto della fondamentale e conoscendo le direzioni delle tracce stesse, si costruirà per il punto dato la retta $a \sim (a', a'')$ perpendicolare alla $r \sim (r', r'')$ e parallela al primo piano di proiezione. Determinata la seconda traccia $V_\alpha \equiv V_\alpha''$ di a, per essa si condurrà la perpendicolare v_α'' a r_0'', proiezione ortogonale della r sul secondo piano di proiezione. La retta v_α'' sarà la seconda traccia del piano α richiesto, mentre la retta o_α' condotta per il punto d'intersezione della v_α'' con la fondamentale e perpendicolare alla r', prima proiezione della r, sarà la prima traccia di α.

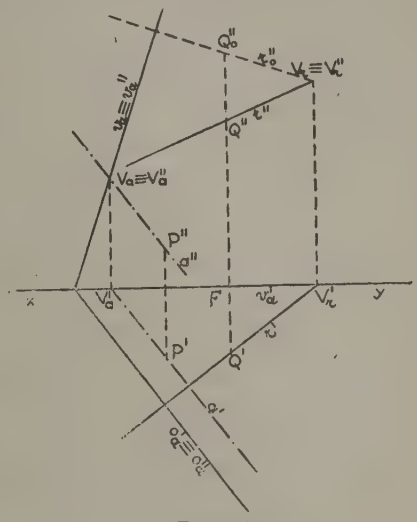


Fig. 14

Si potrà anche procedere diversamente giungendo allo stesso risultato. Si costruirà la retta b passante per il punto P, perpendicolare alla r e parallela al secondo piano di proiezione, determinatane la prima traccia O_b', la retta o_α' condotta per essa e perpendicolare alla r' rappresenterà la prima traccia del piano α di cui la seconda traccia sarà la perpendicolare alla r_0'', proiezione ortogonale della r sul secondo piano di proiezione, e passerà pel punto d'intersezione della o_α' con la fondamentale.

§ 8 — *Ribaltamento di un piano*

Dati due piani α e π, se si fa rotare in un senso determinato uno di essi, α, intorno alla retta s d'intersezione dei piani stessi sino a portarlo a coincidere con l'altro, si dice, come è noto, che si esegue *il ribaltamento* di α su π (Fig. 15).

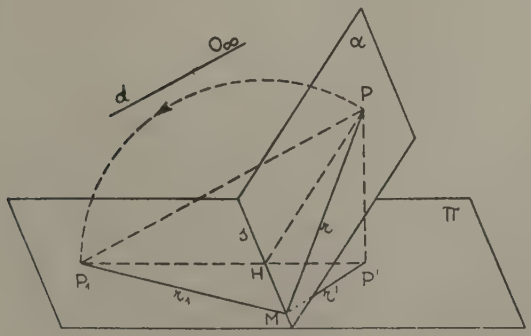


Fig. 15

Un punto P di α descrive in un piano perpendicolare alla retta s un arco di circonferenza il cui centro è il punto H, piede della perpendicolare condotta da P alla s ed il cui raggio è eguale al segmento PH. Dopo il

ribaltamento il punto P prende la posizione P_1 tale che il segmento $P_1 H$, anch'esso perpendicolare alla retta s, è eguale a PH. Se P si proietta ortogonalmente su π in P', i tre punti P', H e P_1 sono allineati. Quindi il punto P_1, che è detto *ribaltamento* di P, si troverà sulla retta $P'H$ alla distanza $P_1 H$ da s eguale alla ipotenusa di un triangolo rettangolo avente per cateti PP' e $P'H$, di cui il primo denota la distanza del punto P dal piano π.

Ogni punto della retta s si ribalta in sè stesso, sicchè per ribaltare una retta r del piano α, che incontra s in un punto M, basterà ribaltare un altro suo punto P; la retta r_1 congiungente il punto P_1, ribaltamento di P, col punto M sarà il ribaltamento della r. Risulta chiaro che il punto P ed il suo ribaltamento P_1, come la retta r ed il suo ribaltamento r_1, sono in simmetria ortogonale rispetto al piano σ bisecante l'angolo diedro descritto nella rotazione per ribaltare α su β, di guisa che tutte le rette congiungenti i punti di α ed i rispettivi ribaltamenti concorrono nel punto improprio O_∞ nella direzione d perpendicolare a σ, mentre le rette di α ed i loro rispettivi ribaltamenti si incontrano sulla s. Conseguentemente il sistema piano α ed il suo ribaltamento α_1 su π sono prospettivi nello spazio in una prospettività avente per centro il punto improprio O_∞ nella direzione d e per asse la retta $s \equiv \alpha\pi$. Parimente sono prospettivi nello spazio il sistema piano α e la sua proiezione ortogonale α' su π in una prospettività avente per centro il punto improprio O_∞' nella direzione perpendicolare al piano π e per asse la stessa retta s. Infine nel piano π i due sistemi piani sovrapposti α' e α_1 si corrispondono in una omologia affine ortogonale avente per centro il punto improprio nella direzione perpendicolare alla retta s e per asse la s medesima. Tale omologia è il *prodotto*, come suol dirsi, delle due prospettività spaziali fra il piano α ed il piano π, prospettività avente lo stesso asse $s \equiv \alpha\pi$, delle quali una di centro O_∞ e l'altra di centro O_∞'.

Da quanto si è detto si deduce che una figura Φ del piano α ed il suo ribaltamento Φ_1 sul piano π sono figure eguali. Conoscendo quindi Φ', proiezione ortogonale sul piano π di una figura Φ appartenente al piano α, potremo determinare la vera forma e grandezza di questa ribaltando il piano α su π e considerando la relazione di omologia innanzi accennata fra i sistemi piani α' e α_1. Viceversa, dato il ribaltamento della figura stessa sul piano π, potremo ricavare la proiezione ortogonale di questa su π mediante la stessa omologia, considerata però in senso inverso. Questa omologia comunemente è detta *omologia di ribaltamento.*

Sia $A''B''C''D''$ la seconda proiezione di un quadrilatero $ABCD$ appartenente ad un piano α, di cui sono assegnate le tracce o_α' e v_α'' (Fig. 16), e si voglia determinare la vera forma e grandezza del quadrilatero stesso.

Si determinino la prima proiezione di un vertice del quadrilatero, ad esempio di A, (mediante la relazione di affinità che esiste fra le due proiezioni di una figura appartenente ad un piano, scegliendo come coppia di punti corrispondenti la seconda e la prima proiezione di un punto della seconda traccia

v_α''), e A_0'', proiezione ortogonale di A sul secondo piano di proiezione, la quale disterà dalla fondamentale quanto A'' dista da A', prima proiezione di A. Ribaltando il piano α sul secondo piano di proiezione π'' con una rotazione intorno a v_α'' in un senso determinato, il punto A si ribalterà nel punto A_2 appartenente alla perpendicolare condotta da A_0'' alla v_α'' ad una distanza da questa eguale all'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cui un cateto è $A_0''H$, (avendo indicato con H il punto d'intersezione della perpendi-

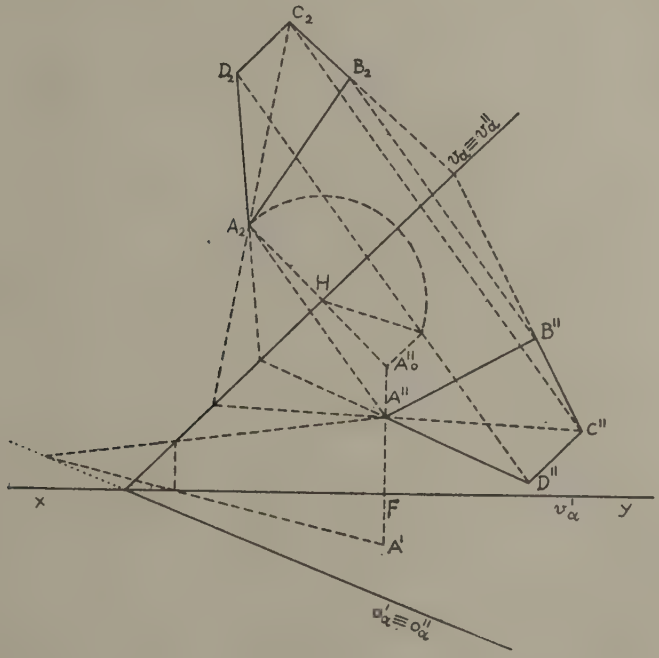


Fig. 16

colare medesima con v_α''), e l'altro cateto è eguale alla distanza del punto A dal secondo piano di proiezione stesso, ovvero all'aggetto del punto A, che è eguale alla distanza di A' dalla fondamentale. Si osserva che $A''B''C''D''$, seconda proiezione del quadrilatero $ABCD$, e A_0'', B_0'', C_0'', D_0'', proiezione ortogonale del quadrilatero stesso sul secondo piano di proiezione, si corrispondono in una omologia affine obliqua avente per asse v_α'', per centro il punto improprio nella direzione perpendicolare alla fondamentale e per coppia di punti corrispondenti A'' e A_0'', mentre $A_0''B_0''C_0''D_0''$ e $A_2B_2C_2D_2$, ribaltamento del quadrilatero $ABCD$, si corrispondono in una affinità ortogonale avente per asse la stessa v_α'' e per coppia di punti corrispondenti A_0'' e A_2. Per determinare quindi la vera forma e grandezza $A_2B_2C_2D_2$ del quadrilatero $ABCD$ potremo considerare le dette due affinità od una sola, più semplicemente, seguendo quest'altro procedimento. Osserviamo che le figure

$A_2 B_2 C_2 D_2$ e $A'' B'' C'' D''$ sono entrambe prospettive nello spazio al quadrilatero $A B C D$ nelle prospettività aventi lo stesso asse v_α'' e per centri rispettivamente il punto improprio nella direzione perpendicolare al piano bisecante l'angolo diedro descritto nella rotazione intorno a v_α'' per ribaltare α su π'', ed il punto improprio nella direzione perpendicolare al secondo piano bisettore; esse quindi nel piano π'' sono figure omologiche nell'affinità obliqua avente per asse la v_α'' e per centro il punto improprio nella direzione della congiungente il punto A'' col punto A_2 precedentemente determinato. Nella Fig. 16 si sono eseguite le costruzioni inerenti a tale affinità ottenendo il quadrilatero $A_2 B_2 C_2 D_2$, omologico dell'altro $A'' B'' C'' D''$. Esso coincide con quello che si otterrebbe se si eseguissero le costruzioni innanzi indicate, determinandolo cioè come figura omologica di $A_0'' B_0'' C_0'' D_0''$.

Conoscendo invece la prima proiezione di una figura appartenente ad un piano α, si potrebbe pure determinare la vera forma e grandezza della figura stessa ribaltando da prima il piano α sul primo piano di proiezione π' con una rotazione intorno alla sua prima traccia o_α e poi proiettando il sistema piano π', (al quale è sovrapposto il ribaltamento del sistema piano α), sul secondo piano di proiezione π'' nella direzione perpendicolare al secondo piano bisettore, ovvero ribaltando il piano π' su π'' con una rotazione intorno alla fondamentale, nel senso tale che il semipiano anteriore vada a sovrapporsi al semipiano inferiore.

Per il secondo dei detti due ribaltamenti non occorre alcuna costruzione grafica perchè, come si è detto innanzi, il foglio di disegno rappresenta sia il secondo piano di proiezione π'' che il ribaltamento del primo piano di proiezione π' su esso. Il ribaltamento A_1 di un punto A di un piano α, quando questo si sottopone ai due ribaltamenti anzidetti, si troverà sulla perpendicolare condotta da A', prima proiezione di A, alla o_α', prima proiezione della traccia o_α, (che coincide con la seconda proiezione della traccia stessa), ad una distanza da questa eguale alla ipotenusa di un triangolo rettangolo di cui un cateto è $A' H$, avendo indicato con H il punto d'intersezione della perpendicolare medesima con o_α', e l'altro cateto è eguale alla quota del punto A. Tale quota è eguale alla distanza fra le due proiezioni del punto A. Il punto A'', seconda proiezione di A, si determina mediante la nota relazione di affinità che esiste fra le proiezioni di una figura del piano α, scegliendo come coppia di punti corrispondenti la prima e la seconda proiezione di un punto della seconda traccia del piano stesso. Il ribaltamento di qualsiasi altro punto di questo piano si otterrà mediante l'omologia affine ortogonale di ribaltamento avente per asse la prima traccia $o_\alpha' \equiv o_\alpha''$ del piano α e per punti corrispondenti A' e A_1.

Quest'ultimo procedimento è da consigliarsi quando occorre determinare la vera forma e grandezza di una figura appartenente ad un piano σ perpendicolare al primo piano di proiezione, avendone assegnate le due proiezioni, di cui la prima, come è noto, è sulla prima traccia di σ. I ribalta-

menti dei varii punti della figura stessa si troveranno sulle perpendicolari alla prima traccia di α condotte dalle prime proiezioni dei singoli punti ed il ribaltamento di ciascun punto sarà distante dalla traccia stessa quanto la quota del punto medesimo.

Ogni figura appartenente ad un piano proiettante, cioè perpendicolare al secondo piano bisettore, ha la seconda proiezione sulla seconda traccia di α, che coincide con la prima traccia di questo. Per determinare la vera forma e grandezza di essa, conoscendone le proiezioni, potremo seguire procedimenti analoghi a quelli innanzi accennati secondo che il piano considerato si ribalterà sul secondo o sul primo piano di proiezione.

Osservazione. — Qualsiasi problema riguardante una figura dello spazio e comprendente determinazioni di angoli e di distanze in generale si potrà risolvere col tradurre in costruzioni geometriche piane le diverse costruzioni spaziali occorrenti per la risoluzione del problema stesso, servendosi della rappresentazione della figura medesima su un piano, foglio di disegno, e tenendo presente quanto si è detto innanzi sulle condizioni di appartenenza, di parallelismo, di perpendicolarità e sul ribaltamento di un piano.

Faremo ora brevi cenni sulla rappresentazione di solidi geometricamente definiti.

§ 9 — *Rappresentazione di poliedri*

Un poliedro si rappresenta mediante le proiezioni di tutti i suoi spigoli sia sul primo piano di proiezione π' che sul secondo π'', considerando come centri di proiezione rispettivamente il punto improprio O_∞' nella direzione perpendicolare a π' ed il punto improprio O_∞'' nella direzione perpendicolare al secondo piano bisettore. Le proiezioni su π' degli spigoli del poliedro dal punto O_∞' formano una figura Φ_0', che si denomina *proiezione ortogonale del poliedro su* π'; le proiezioni su π'' degli spigoli medesimi dal punto O_∞'' formano un'altra figura Φ'', che si denomina *seconda proiezione del poliedro*. Dovendo rappresentare tutto sullo stesso piano π'', foglio di disegno, si proietterà la Φ_0' su questo dallo stesso punto O_∞'', ottenendosi in tal modo un'altra figura Φ', che è detta *prima proiezione* o *biproiezione del poliedro* e che, per quanto si è detto innanzi, risulta eguale alla Φ'.

Per ben comprendere la forma del poliedro e la sua posizione rispetto ai piani di proiezione, mediante l'esame delle sue proiezioni, alcune rette di queste si disegnano a tratto continuo ed altre a punti, secondo che sono proiezioni di rette dello spazio viste o non viste da un osservatore che, disposto nel primo diedro, si immagini che abbia un occhio successivamente nel centro improprio O_∞' e nel centro improprio O_∞''. Supposto l'occhio dell'osservatore nella prima di dette posizioni ed il poliedro opaco, esso vede solo una parte della superficie di questo, la quale è separata dalla rimanente mediante una linea formata da alcuni spigoli del poliedro. Tale linea chiamasi *primo contorno apparente del poliedro* o *contorno ap-*

parente del poliedro rispetto al primo piano di proiezione. Gli spigoli del poliedro situati nello spazio compreso fra detta linea e l'occhio dell'osservatore nel punto O_∞' saranno visibili a questo e quindi si disegneranno a tratto continuo le loro prime proiezioni, mentre le rimanenti, essendo invisibili per lo stesso osservatore, avranno le loro prime proiezioni disegnate a punti. Analogamente, supposto l'occhio dell'osservatore nel centro improprio O_∞'', esso vedrà una parte della superficie del poliedro che sarà separata dalla rimanente mediante un'altra linea formata da altri spigoli del poliedro. Questa seconda linea chiamasi *secondo contorno apparente del poliedro* o *contorno apparente del poliedro rispetto al secondo piano di proiezione.* Gli spigoli del poliedro situati nello spazio compreso fra questa seconda linea e la seconda posizione presa dall'occhio dell'osservatore avranno le seconde proiezioni disegnate a tratto continuo e le rimanenti a punti.

È evidente che il primo contorno apparente di un poliedro è, in generale, diverso dal secondo, perchè diverse sono le posizioni prese dall'occhio dell'osservatore nel guardare il poliedro.

La prima proiezione del primo contorno apparente, che chiameremo semplicemente *primo contorno apparente*, si disegnerà a tratto continuo, essa formerà il contorno del poligono nell'interno del quale si proietteranno su π' i rimanenti spigoli del poliedro. Lo stesso dicasi per la seconda proiezione del secondo contorno apparente, che denomineremo semplicemente *secondo contorno apparente.*

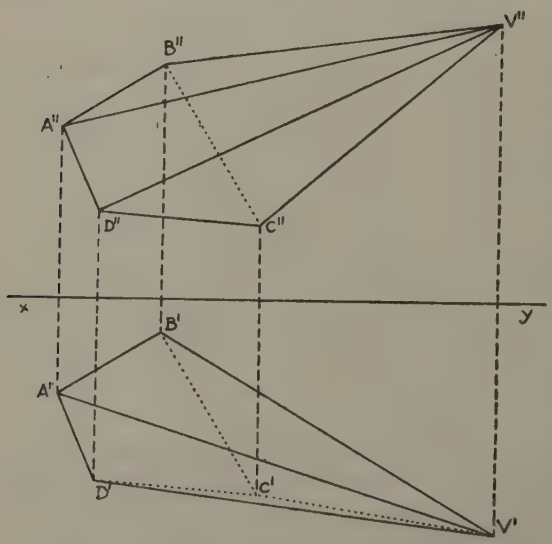


Fig. 17

Riguardo agli spigoli del poliedro, che non fanno parte dei contorni apparenti, la loro visibilità rispetto al primo o secondo piano di proiezione si deduce dall'esame delle proiezioni dei vertici del poliedro, poichè da esse, desunte le quote e gli aggetti dei vertici stessi, si riconosce quali di questi sono più lontani dal piano di proiezione che si considera. In tal modo, in generale, si distinguono gli spigoli visibili da quelli invisibili, essendo essi le rette congiungenti i vertici del poliedro medesimo.

Nella Fig. 17 si è rappresentata una piramide obliqua disposta nel

semidiedro (1′) della quale sono assegnate le proiezioni $A'B'C'D'$ e $A''B''C''D''$, (che sono figure congruenti), del quadrilatero base $ABCD$ appartenente ad un piano parallelo al piano fondamentale e le proiezioni V' e V'' del vertice. Le congiungenti il punto V' coi punti A', B', C', D', e le congiungenti il punto V'' coi punti A'', B'', C'', D'' sono rispettivamente le prime e le seconde proiezioni degli spigoli laterali della piramide. Il primo contorno apparente è rappresentato dal poligono $V'B'A'D'$ ed il secondo dal poligono $V''B''A''D''C''$.

Volendo rappresentare un prisma, si può procedere allo stesso modo che per una piramide; occorre considerare soltanto che mentre nella pira-

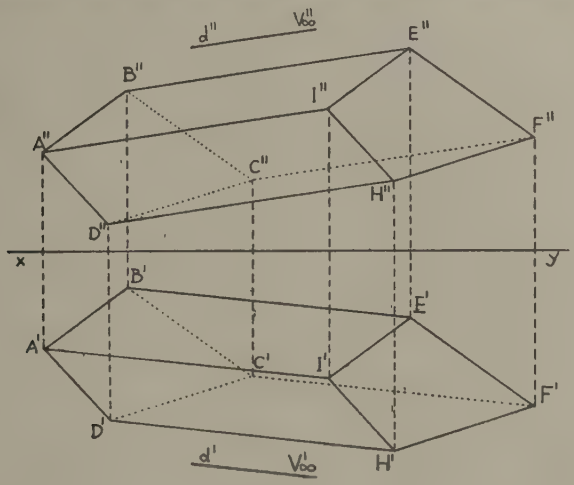


Fig. 18

mide il vertice V è a distanza finita, cioè le sue proiezioni V' e V'' sono punti propri sopra una retta di richiamo, nel prisma invece il vertice è a distanza infinita, sicchè si ha che le proiezioni di esso, V_∞' e V_∞'', sono rispettivamente i punti impropri di due rette d' e d'', proiezioni di una retta d, alla quale sono paralleli gli spigoli del prisma medesimo.

Nella Fig. 18 si è rappresentato un prisma obliquo disposto nel semidiedro (1′) con la base inferiore $ABCD \sim (A'B'C'D', A''B''C''D'')$ appartenente ad un piano parallelo al piano fondamentale. Il vertice improprio V_∞ del prisma è rappresentato dalle sue due proiezioni V_∞' e V_∞'', punti impropri rispettivamente delle rette d' e d'', proiezioni di una retta d, alla quale sono paralleli gli spigoli del prisma stesso.

Le congiungenti i vertici del quadrilatero $A'B'C'D'$, prima proiezione della base anzidetta, col punto V_∞', cioè le parallele condotte per essi a d', sono le prime proiezioni degli spigoli laterali di un prisma indefinito. Analogamente le congiungenti i vertici del quadrilatero $A''B''C''D''$, seconda proiezione della base stessa, col punto V_∞'', cioè le parallele condotte per essi a d', sono le seconde proiezioni degli spigoli laterali del prisma stesso.

Questo si è sezionato con un piano, anch'esso parallelo al piano fondamentale e disposto superiormente al piano della base $A\,B\,C\,D$, ottenendo come sezione il quadrilatero $E\,F\,H\,I$. La prima proiezione $E'\,F'\,H'\,I'$ di questo e $A'\,B'\,C'\,D'$, come $E''\,F''\,H''\,I''$, seconda proiezione del quadrilatero stesso, e $A''B''C''D''$, sono figure congruenti, essendo i quadrilateri $A\,B\,C\,D$ e $E\,F\,G\,H$ figure prospettive nello spazio in una prospettività avente il centro e l'asse entrambi impropri.

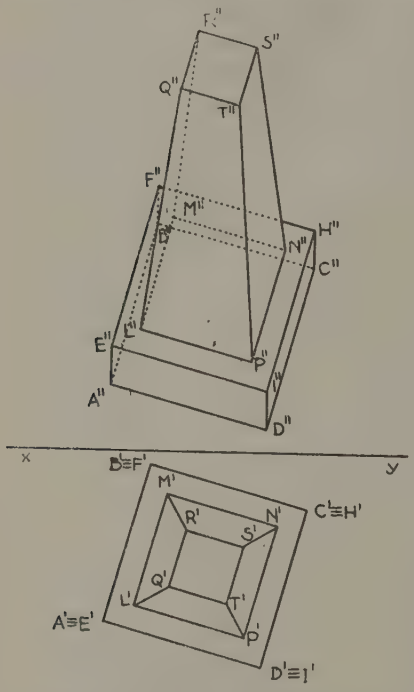


Fig. 19

Il poligono $A'\,B'\,E'\,F'\,H'\,D'$ rappresenta il primo contorno apparente del prisma finito limitato dai due piani considerati paralleli al piano fondamentale; il poligono $A''B''E''F''H''D''$ rappresenta il secondo contorno apparente del prisma medesimo.

La figura 19 rappresenta il solido disposto nel semidiedro (1') poggiato su un piano parallelo al piano fondamentale e costituito da un prisma retto a base quadrata e da un tronco di piramide ad esso coassiale poggiato su questo con la base maggiore, i cui lati sono paralleli a quelli delle basi del prisma stesso.

Si osserva che le prime proiezioni delle basi del prisma coincidono, quelle delle basi del tronco di piramide sono figure omotetiche in una omotetia avente per centro la prima proiezione del vertice della piramide cui appartiene il tronco. Si osserva inoltre che le seconde proiezioni delle basi del prisma sono figure congruenti e le seconde proiezioni delle basi del tronco di piramide sono figure omotetiche in una omotetia avente per centro la seconda proiezione del vertice della piramide anzidetta.

§ 10 — *Rappresentazione di coni e cilindri*

La Fig. 20 rappresenta un cono obliquo disposto nel semidiedro (1') di cui si sono assegnate le proiezioni φ' e φ'' del cerchio base φ appartenente ad un piano parallelo al piano fondamentale e quelle V', V'' del vertice V. Le congiungenti i punti di φ col punto V sono le generatrici del cono. Considerando uno di detti punti $P \sim (P', P'')$, la congiungente il punto P' con V' e la congiungente il punto P'' con V'' sono rispettivamente la prima e la seconda proiezione della generatrice del cono passante per il punto P di φ. Le tangenti m' e n' condotte da V' a φ', che hanno per rispettivi punti di

contatto A' e B', rappresentano insieme all'arco $A'P'B'$ di φ' il primo contorno apparente del cono. Le tangenti p'' e q'' condotte da V'' a φ'', che hanno per rispettivi punti di contatto D'' e E'', rappresentano insieme all'arco $D''P''E''$ di φ'' il secondo contorno apparente del cono stesso.

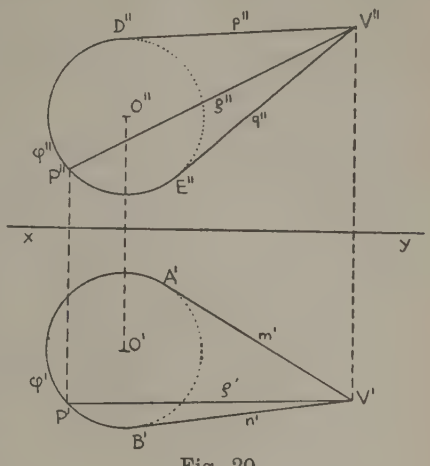


Fig 20

La Fig. 21 rappresenta un cilindro obliquo disposto nel semidiedro (1') di cui sono assegnate le proiezioni φ', φ'' del cerchio base φ appartenente ad un piano parallelo al piano fondamentale e quelle V_∞', V_∞'' del vertice improprio V_∞ del cilindro quali punti impropri rispettivamente delle rette d' e d'', proiezioni di una retta d, alla quale sono parallele le generatrici del cilindro stesso. Le congiungenti i punti di φ col punto V_∞, ovvero le parallele condotte pei punti di φ alla retta d sono le generatrici del cilindro indefinito. Considerando uno di detti punti, ad esempio $P \sim (P', P'')$, la congiungente il punto P' con V_∞', ovvero la parallela condotta per P' a d', e la congiungente il punto P'' con V_∞'', ovvero la parallela condotta per P'' a d'', sono rispettivamente la prima e la seconda proiezione della generatrice del cilindro passante per il punto P di φ.

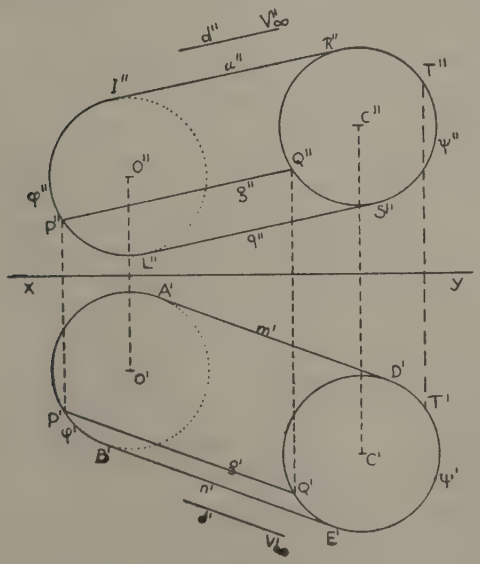


Fig. 21

Si è inoltre sezionato il cilindro con un piano, anch'esso parallelo al piano fondamentale e disposto superiormente al piano del cerchio base φ, ottenendo come sezione un cerchio $\psi \sim (\psi', \psi'')$ eguale a φ. Le tangenti m' e n' a φ' e ψ' parallele a d', che hanno per rispettivi punti di contatto con φ', A' e B', e con ψ', D' e E', rappresentano insieme all'arco $A'P'B'$ di φ' e $D'T'E'$ di ψ' il primo contorno apparente del cilindro finito limitato dai due piani considerati paralleli al piano fondamentale. Le tangenti u'' e q'' a φ'' e ψ'' parallele a a'', che hanno per rispettivi punti di contatto con φ'', $1''$ e L'', e con ψ'', R'' e S'',

rappresentano insieme all'arco $I''P''L''$ di φ'' e $R''T''S'$ di ψ'' il secondo contorno apparente del cilindro stesso.

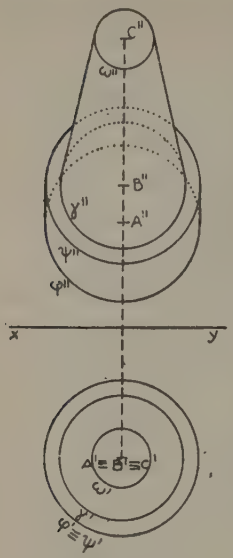


Fig. 22

La Fig. 22 rappresenta il solido costituito da un tronco di cono e da un cilindro a basi circolari, entrambi retti e coassiali, con l'asse perpendicolare al piano fondamentale, dei quali il primo sovrastante con la base maggiore all'altro che è poggiato su un piano parallelo al piano fondamentale.

Le prime proiezioni delle basi del cilindro coincidono, quelle delle basi del tronco di cono sono figure omotetiche in una omotetia avente per centro la prima proiezione del vertice del cono cui appartiene il tronco. Le seconde proiezioni delle basi del cilindro sono figure congruenti e le seconde proiezioni delle basi del tronco di cono sono figure omotetiche in una omotetia avente per centro la seconda proiezione del vertice del cono.

§ 11 — *Rappresentazione della sfera*

Per rappresentare una sfera occorre assegnarne il centro $O \sim (O', O'')$ ed il raggio (Fig. 23). Considerando la sfera disposta nel semidiedro (1'), il cerchio φ' di centro O', prima proiezione del centro O della sfera, e di raggio eguale a quello della sfera stessa rappresenta il primo contorno apparente di questa, cioè la proiezione sul quadro π'' nella direzione perpendicolare al secondo piano bisettore dell'intersezione col piano fondamentale π' del cilindro circoscritto alla sfera e perpendicolare al piano π' medesimo. Infatti tale cilindro tocca la sfera lungo il cerchio massimo φ appartenente al piano parallelo al piano fondamentale condotto pel centro O della sfera stessa; la sua intersezione con π' è il cerchio φ_0', proiezione ortogonale di φ su π'; risulta quindi $\varphi' = \varphi_0' = \varphi$.

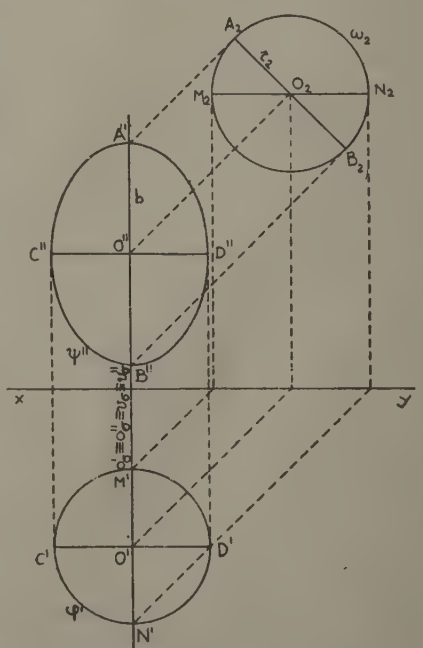


Fig. 23

Il secondo contorno apparente della sfera è l'ellisse ψ'' che rappresenta l'intersezione col quadro π'' del cilin-

dro circoscritto alla sfera stessa e perpendicolare al secondo piano bisettore, ovvero la proiezione su π'' dal punto improprio nella direzione perpendicolare al secondo piano bisettore del cerchio massimo ψ della sfera appartenente al piano parallelo al secondo piano bisettore. Dei due semiassi dell'ellisse ψ'' uno, il minore, è la seconda proiezione del raggio del cerchio massimo ψ perpendicolare al piano di profilo σ condotto pel centro O della sfera ed è eguale al raggio stesso, l'altro, il maggiore, e la seconda proiezione del raggio di ψ appartenente al piano σ e si determina ribaltando questo sul quadro e con esso il cerchio ω, sezione prodotta nella sfera dal piano medesimo. Si nota che se indichiamo con b tale semiasse e con r il raggio di ψ appartenente al piano σ, essendo la direzione perpendicolare al secondo piano bisettore inclinata di 45° rispetto ad entrambi i piani di proiezione, si ha che b è eguale a $\frac{r}{\text{sen } 45^\circ}$, cioè a $r\sqrt{2}$, ovvero è eguale all'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele i cui cateti sono eguali a r.

§ 12 — *Rappresentazione di una superficie di rotazione*

Premettiamo alcune generalità circa la genesi delle superficie di rotazione.

Si definisce *superficie di rotazione* o *superficie rotonda* la superficie Σ generata dalla rotazione di una linea qualunque γ piana o gobba intorno ad una retta a, che è detta *asse della superficie*. È evidente che ciascun punto P della linea γ, rotando intorno all'asse a, descrive un cerchio appartenente ad un piano perpendicolare all'asse, il cui centro è il piede O della perpendicolare condotta da P all'asse ed il cui raggio è lungo quanto la perpendicolare stessa OP. Tutti questi cerchi si chiamano *paralleli* della superficie; dunque ogni piano perpendicolare all'asse seca la superficie in un parallelo. Ne consegue quindi che la superficie può essere generata anche da un cerchio variabile che, mantenendosi col suo piano sempre normale all'asse, corra col suo centro su questo appoggiandosi continuamente alla linea γ considerata. I punti di γ di massima e di minima distanza dall'asse descrivono dei paralleli particolari che si chiamano *paralleli massimi* o *equatoriali*, quelli descritti dai punti di massima distanza, e *paralleli minimi* o di *gola*, quelli descritti dai punti di minima distanza. I piani condotti per l'asse tagliano la superficie secondo curve tutte eguali fra loro ed aventi in comune i soli punti in cui la superficie è incontrata dal suo asse; tali curve, ciascuna delle quali è disposta in simmetria ortogonale rispetto all'asse stesso, si chiamano *meridiani* della superficie ed i piani cui essi appartengono si chiamano *piani meridiani*. È evidente che la superficie può considerarsi generata dalla rotazione completa di un semimeridiano intorno all'asse. Per ogni punto P di Σ passa un solo meridiano ed un solo parallelo; conducendo in P la tangente

al meridiano della superficie Σ passante per P e la tangente al parallelo passante per lo stesso P, queste due tangenti determinano il piano tangente alla superficie in P. Le tangenti ai meridiani condotte nei punti ove esse incontrano uno stesso parallelo formano un cono o cilindro di rotazione avente il vertice sull'asse e circoscritto alla superficie Σ lungo il parallelo medesimo. Variando questo parallelo la Σ può considerarsi come *inviluppo* di questi infiniti coni e cilindri. Si immagini condotto in un punto M di un meridiano μ la tangente t e la normale n alla tangente medesima; la n sarà evidentemente perpendicolare al piano tangente alla superficie nel punto M e si chiama *retta normale* alla superficie nel punto M. Indichiamo con Q il punto di incontro della n con l'asse della superficie e descriviamo nel piano del meridiano μ il cerchio di centro Q e di raggio QM. Nella rotazione, per generare Σ, tale cerchio genera una sfera che tocca Σ lungo il parallelo passante per M. Quindi, variando questo parallelo, la Σ può considerarsi come inviluppo di queste infinite sfere.

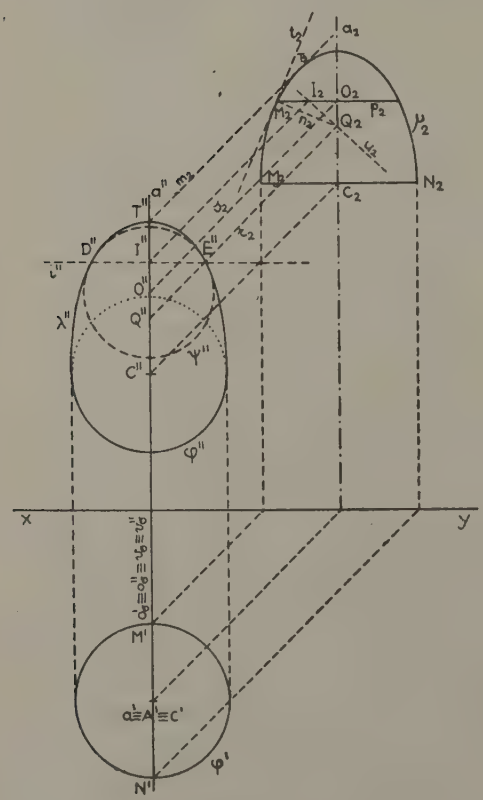


Fig. 24

Ci proponiamo ora di rappresentare una superficie di rotazione nel metodo di rappresentazione considerato, supponendo la superficie disposta nel semidiedro (1') con l'asse $a \sim (a', a'')$ perpendicolare al piano fondamentale (Fig. 24).

Consideriamo la superficie Σ generata dalla rotazione di una semiellisse intorno ad un suo asse e sia quello maggiore; essa sarà la metà di una superficie denominata *ellissoide di rotazione*. Si ribalti sul quadro il piano di profilo σ passante per l'asse a e sia μ_2 il ribaltamento del meridiano di Σ appartenente al piano σ. Indichiamo con $C \sim (C', C'')$ il centro dell'ellissoide di rotazione il cui ribaltamento è il punto C_2 su a_2, ribaltamento dell'asse a, e con φ il parallelo di raggio massimo di Σ, il quale appartiene al piano α parallelo al piano fondamentale condotto per C ed è secato dal piano σ secondo un diametro il cui ribaltamento è $M_2 N_2$.

La rappresentazione del primo contorno apparente della superficie Σ è il cerchio φ' di centro $A' \equiv a'$, prima proiezione dell'asse a, e di raggio eguale a quello di φ cioè eguale a $\frac{M_2 N_2}{2}$. Infatti φ' è la proiezione sul quadro nella direzione perpendicolare al secondo piano bisettore del cerchio $\varphi_0' = \varphi$, intersezione col piano fondamentale π' del cilindro circoscritto alla superficie Σ e perpendicolare a π', il quale cilindro tocca la superficie stessa lungo il detto parallelo φ.

Per ottenere la rappresentazione del secondo contorno apparente di Σ occorre considerare l'intersezione col quadro del cilindro circoscritto a Σ e perpendicolare al secondo piano bisettore ovvero la seconda proiezione λ'' della curva λ di contatto di detto cilindro con la superficie. Proiettando quindi sul quadro π'' i diversi paralleli di Σ nella direzione perpendicolare al secondo piano bisettore si otterranno tanti cerchi, il cui inviluppo rappresenterà il secondo contorno apparente della superficie Σ.

Potendosi inoltre considerare, per quanto si è detto innanzi, la superficie come inviluppo delle sfere ad essa tangenti lungo i diversi paralleli, si otterrebbe egualmente la rappresentazione del secondo contorno apparente di essa rappresentando i contorni apparenti delle varie sfere tangenti alla superficie e costruendone l'inviluppo.

Ci proponiamo di determinare i punti in cui il secondo contorno apparente λ'' di Σ tocca la seconda proiezione ψ'' di un parallelo ψ. Per un punto M_2 di μ_2 si conducano la perpendicolare a questo, che incontrerà la retta a_2 in un punto Q_2, e la perpendicolare alla a_2, che intersecherà la a_2 stessa nel punto O_2; questo e Q_2 sono rispettivamente i ribaltamenti del centro O di un parallelo ψ di Σ e del centro Q della sfera tangente a Σ lungo ψ. Si tracci per Q_2 la retta r_2 inclinata di 45° a a_2 nel senso indicato nella Fig. 24, essa rappresenta il ribaltamento della retta condotta per Q, appartenente a σ e perpendicolare al secondo piano bisettore; il suo punto d'incontro Q' con a'', seconda proiezione dell'asse a, è la seconda proiezione del centro Q della sfera considerata. La perpendicolare u_2 condotta da Q_2 alla r_2 è il ribaltamento della intersezione del piano σ col piano β condotto pel centro della sfera e parallelo al secondo piano bisettore; a β appartiene il cerchio massimo ω della sfera, contorno apparente di questa rispetto al quadro. Conduciamo per O_2 la parallela s_2 alla r_2 e sia O'' il suo punto d'intersezione con a''; il cerchio ψ'' di centro O'' e di raggio eguale a $M_2 O_2$ è la seconda proiezione del parallelo ψ

I punti di λ'' appartenenti a ψ'' sono i punti d'incontro di questo con la retta i'', seconda proiezione della retta i d'intersezione del piano β col piano τ del cerchio ψ, che è parallelo al piano fondamentale. Infatti il cerchio ω ed il parallelo ψ, appartenenti a due piani diversi, hanno generalmente una corda c in comune che appartiene ad una retta i perpendicolare al piano di profilo σ, essendo β e τ entrambi perpendicolari a σ.

Negli estremi D e E della c i piani tangenti alla sfera considerata, che sono tangenti anche a Σ, sono perpendicolari al secondo piano bisettore, quindi i punti D e E, disposti in simmetria ortogonale rispetto a σ, appartengono alla curva λ, contorno apparente di Σ rispetto al quadro, e le loro seconde proiezioni devono trovarsi sia sulla retta i'', seconda proiezione della retta i, che sul cerchio ψ'' ed anche su ω'', rappresentazione del secondo contorno apparente della sfera.

Osserviamo che la i deve essere parallela alla fondamentale $X\,Y$, quindi, conoscendone la direzione, per determinarla basta individuare un punto pel quale essa deve passare. Per ottenere questo ci avvarremo ancora del ribaltamento del piano di profilo σ, considerando le rette u_2 e p_2, ribaltamenti delle rispettive intersezioni u e p di σ coi piani β e τ. La prima di queste si è già precedentemente costruita, l'altra coincide con la retta $M_2\,O_2$, anche nota; il punto I_2 in cui la u_2 incontra la p_2 è il ribaltamento del punto $I \equiv u\,p$ appartenente alla retta i. Il punto I'', seconda proiezione di I, che appartiene alla a'', si ottiene intersecando questa con la retta parallela alla r_2 condotta per I_2. Infine la parallela alla fondamentale condotta per I'' è la i'' cercata; i punti E'' e D'' in cui essa incontra ψ'' rappresentano due punti del secondo contorno apparente di Σ e propriamente sono le seconde proiezioni dei punti E e D del parallelo ψ appartenenti alla curva λ.

Le due seconde proiezioni, di cui una del punto più alto di λ e l'altra del punto più basso, appartenendo entrambi i punti al piano σ, si determinano conducendo a μ_2 le tangenti parallele alla r_2; le intersezioni di queste con a'' sono le proiezioni richieste, delle quali quella più lontana dalla fondamentale rappresenta il punto più alto. Nella Fig. 24 si è determinata la seconda proiezione T'' del punto più alto T, di cui T_2 è il ribaltamento.

Manifestazioni effusive subterminali della primavera del 1942 e fenomeni termici attuali interessanti la medesima zona del versante meridionale vesuviano.

Nota del socio ordinario **Giuseppe Imbò**

(Adunanza del dì 1 aprile 1950

Sunto. — Viene data notizia di un' eruzione subterminale verificatasi nella primavera del 1942 per la quale, in base ad un' analisi critica di svariati fenomeni, si riesce da un canto a fissare la data dei relativi efflussi nella prima quindicina di maggio e d' altro canto a stabilire l' eventuale causa, da porsi in relazione a fratturazioni che avrebbero successivamente interessato il sistema meridionale di fenditure del 1906. Il distacco di masse magmatiche, iniettatesi nel detto sistema anche nel corso della fase preparatoria dell' eruzione del 1944, renderebbe sufficientemente conto degli importanti fenomeni termici osservati lungo il versante meridionale fin dal 1946.

Nei primi mesi del 1946 fu constatata l' esistenza di una ristretta zona presentante temperature relativamente alte, già apparsa probabilmente da qualche mese lungo il versante meridionale esterno del Gran Cono Vesuviano. Avutane cortese comunicazione dal Sig. A. Matrone nell' agosto, i fenomeni divennero subito oggetto di particolari ricerche, dirette principalmente all' individuazione della genesi, in relazione alla quale prima (in base alle assunte informazioni) si suppose, poi (in base alle deduzioni relative a dirette osservazioni effettuate il 28 agosto) si ritenne altamente probabile, ed oggi direi certo, che essi dovessero essere messi in relazione con episodi del periodo eruttivo chiusosi con l' eruzione del 1944, dei quali si ebbe indizio anche con le manifestazioni effusive subterminali, verificatesi nella primavera del 1942 ed aventi, almeno in parte, la medesima sede dei fenomeni termici.

Di queste manifestazioni si ebbe purtroppo conoscenza solo dopo la loro totale, almeno apparente, cessazione. La mancata osservazione diretta è però giustificata dalla contemporaneità con manifestazioni effusive diffuse e copiose interessanti la medesima zona e derivanti da lave sgorganti alla base del conetto e successivamente riversantisi all' esterno.

In occasione del sopraluogo del 25 giugno 1942 si eseguirono svariate osservazioni, delle quali si riportano le più importanti.

1. — La generatrice SSE intersecante la strada Matrone meridionale mostrava, all' incirca tra quota m. 1000 e m. 850 ed entro una zona della

larghezza non oltrepassante la ventina di metri: fessurazioni dell' ampiezza fino a 10-15 cm.; faglie con rigetti di oltre 50 cm.; avvallamenti, crolli o vistose lesioni, spesso anche con rotazioni, di muri di cinta della strada. L' orientamento delle fessure risultava in prevalenza parallelo (v. Fig. 3) alla generatrice, ma vi erano anche fessure con direzioni normali ed oblique.

2. — Le temperature misurate presso il margine delle fenditure risultarono varianti tra 46° e 58° nel tratto superiore, di circa 30° nel tratto medio e presso a poco uguali a quelle ambientali nel tratto inferiore.

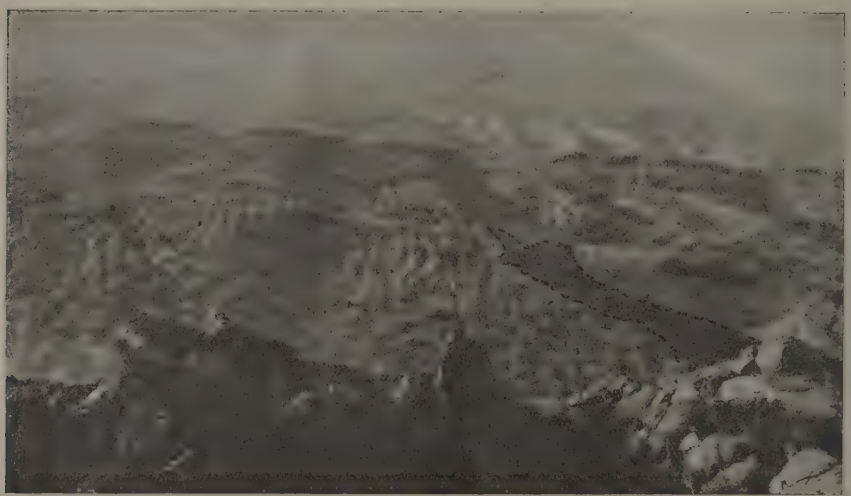


Fig. 1 — Colata inferiore subterminale del maggio 1942, sottoposta, dopo un percorso di c. 100 m. alle lave terminali, visibili in primo piano

Fot. G. Imbò, *25 giugno 1942*

3. — A circa 930 metri di quota aveva origine una esigua colata della larghezza di 8-10 metri, dello spessore di circa 1 m. e che si stendeva verso valle per una lunghezza di non oltre 50 m.

4. — Altra colata (v. Figg. 1 e 2) alquanto più copiosa risultava sgorgata da una bocca situata sempre lungo la stessa generatrice ad una quota di circa 830 m.. Detta colata, di spessore di 1-2 m. circa, raggiungente una larghezza anche di 20 m. ca., era visibile per una lunghezza di un 100 m. ca. e per il resto (certo limitato a solo qualche decina di metri) era sottoposta alle lave provenienti direttamente dalla base del conetto, la cui zona frontale nella seconda quindicina di giugno, oltre al solito spostamento a valle, manifestava una decisa tendenza ad una estensione verso oriente, parallelamente all' asse del tratto trasversale della strada Matrone, presso a poco a quota 750.

5. — Entrambe le colate non rivelarono, in tutta la loro estensione temperature diverse da quelle ambientali.

Un primo problema da risolvere riguarda la determinazione delle date, almeno approssimative, delle manifestazioni. Un elemento abbastanza sicuro, atto a limitare il campo di variazione, venne fornito da osservazioni sullo stato della vegetazione ai margini delle colate o tra le colate stesse. Ed infatti le condizioni identiche di crescita dell'erba apparsa tra le lave della colata superiore o, lungo i fianchi del monte, in zone poco discoste da queste, lasciarono dedurre che lo sgorgo dovette evidentemente effettuarsi prima dell'emersione dello stelo tra la sabbia che costituiva, nelle adiacenti zone ancora scoperte di lave, il mantello del Gran Cono.

Fig. 2 — La colata inferiore, a monte della interrotta strada Matrone ed in prossimità della bocca da cui emerse.

Fot. G. Imbò, *25 giugno 1942*

Nei riguardi della colata inferiore, si potè constatare un identico sviluppo sia delle foglie disseccate (evidentemente all'atto dell'efflusso) di piante di acacie prossime alle colate sia di quelle verdi relative a medesime piante alquanto discoste dalle lave stesse.

Mentre tali considerazioni consentono evidentemente di stabilire che la colata inferiore era sgorgata in una data non lontana dal giorno del sopraluogo, tutt'al più nel maggio, nei riguardi della superiore risulta alquanto esteso il possibile intervallo di tempo in cui essa sarebbe emersa, in quanto il rilievo indicato consente solo di stabilire l'anteriorità all'inizio dell'apparizione della vegetazione alla quota indicata (non certo successiva alla prima quindicina di maggio). D'altro canto la già espressa condizione di contemporaneità con lave fluenti di origine terminale (giustificante, come è stato detto, la mancata osservazione diretta del fenomeno)

consente di fare coincidere l'altro estremo dell'intervallo con l'inizio degli efflussi copiosi interessanti piuttosto estesamente il medesimo versante sud-orientale. La colata superiore si sarebbe pertanto verificata tra il novembre 1941 e, per segnare una data estrema, il 15-20 maggio 1942.

Una notevole riduzione nella estensione dell'intervallo potrebbe inoltre essere consentita in base alla considerazione di una altamente probabile concomitanza, almeno nel corso della fase iniziale delle manifestazioni, con fenomeni sismici sicuramente sensibili almeno nelle immediate vicinanze delle zone, successivamente sede degli effimeri ed esigui efflussi lavici. La suddetta ammissione sarebbe giustificata dalla relativa vistosità delle riscontrate fessurazioni (v. Fig. 3). Giova pertanto osservare che dal novembre fin quasi alla fine di aprile mancò una vera attività sismica di origine vesuviana, ed anche le abituali agitazioni: armonica o spasmodica, alternativamente o contemporaneamente presenti, risultarono in genere deboli. Un primo terremoto di probabile origine locale fu registrato solo all'Osservatorio il 24 aprile 942 a $15^h\ 30^m$. In seguito si ebbe una scossa (non registrata) a circa $12^h\ 45^m$ del 17 maggio, avvertita nella sola parte alta del monte fino a Funicolare Inferiore. Le guide e turisti, che trovavansi nell'interno del cratere, riportarono l'impressione di un incipiente crollo della platea lavica. Tale fenomeno sismico non deve considerarsi isolato, ma il primo di un raggruppamento di scosse localizzate, del quale si avrebbe una prova nelle diverse fenditure che nei giorni successivi apparvero sempre più numerose in prossimità dei piedi NE, SE, W del conetto, secondo archi concentrici in relazione alla prima direzione e radiali secondo le altre.

Con altro moto solo registrato si chiuse il 1° giugno il breve intervallo di agitazione sismica.

Nonostante una sicura incompletezza delle osservazioni sismiche, si può intanto ritenere che i primi fenomeni subterminali non si siano verificati anteriormente all'inizio dell'intervallo suddetto, tanto più che dal novembre 1941 solo dopo il 24 aprile si ebbero anche crolli della cima del conetto eruttivo, senza che questi potessero essere giustificati da contemporanee variazioni in attività esplosiva o nella copiosità degli efflussi terminali.

Il primo crollo con ricostituzione di un'ampia voragine, profonda almeno una trentina di metri, si verificò tra la fine di aprile ed i primi di maggio. Sebbene la constatazione del fenomeno sia avvenuta soltanto il 9 maggio, l'assenza di lanci e la tenuità delle esalazioni, osservate nei primi giorni di maggio dall'Osservatorio, costituirebbero una prova del già avvenuto crollo, in quanto provocate da parziali ostruzioni del condotto.

L'altro crollo si ebbe solo due giorni prima del sopraluogo, ossia il 23 giugno, con la formazione di una voragine ancora più profonda della precedente, già quasi ricolma. Il riempimento aveva avuto inizio il 17

maggio con la brusca ripresa dei lanci di scorie e di brandelli lavici, e cioè concomitante alla scossa avvertita lo stesso giorno, la prima di un raggruppamento di scosse, che, come è stato detto, sarebbero avvenute nei giorni successivi. L'attività terminale, bruscamente vivace, proseguì debolmente, con lievi ed impercettibili intensificazioni ed anche riduzioni a semplici esalazioni, nei giorni successivi.

L'esame critico dei raccolti elementi consente pertanto di ritenere o che le due colate siano sgorgate quasi contemporaneamente tra la fine di aprile ed i primi di maggio in quanto sarebbe lecito ritenere che lo sprofondamento terminale del conetto si sarebbe verificato per mancato sostegno in conseguenza di iniezioni magmatiche entro fenditure sviluppantisi sin dalla prima manifestazione sismica del 24 aprile; oppure che solo la colata superiore si sia verificata in detta data, mentre la inferiore sia stata posteriore. La probabile data della nuova manifestazione effusiva potrebbe coincidere con l'abbassamento della colonna magmatica immediatamente successiva all'effimera recrudescenza esplosiva del 17 maggio. Non vi sarebbero però motivi sufficienti da lasciare escludere la probabilità che anche la colata superiore si sarebbe verificata in quest'ultima data, salvo un lieve spostamento rispetto all'estremo prossimo del relativo intervallo. I casi possibili sarebbero pertanto i seguenti: entrambe le colate sarebbero sgorgate contemporaneamente al principio o poco dopo la prima metà di maggio, oppure la superiore alla prima data e l'inferiore alla seconda. Sebbene non sia possibile propendere per ciascuno dei tre indicati casi, certo il fenomeno risulta sufficientemente circoscritto nel tempo, potendosi indicare in complesso come: attività effusiva subterminale del maggio 1942.

Per l'individuazione almeno ipotetica della genesi dell'eccezionale fenomeno, si ritiene opportuno di porre in evidenza alcuni elementi atti ad agevolarne lo studio.

1. — Si constata innanzi tutto una coincidenza così rigorosa, da non potersi ritenere casuale, della generatrice interessata dai fenomeni estracraterici vesuviani del 1942 con quella relativa a manifestazioni effusive del 1906 (v. Fig. 3). Molte furono le bocche che nella prima fase di questa eruzione (4 7 aprile) dettero luogo ad efflussi lavici. Di queste bocche, salvo una, situata nel versante settentrionale, le altre si aprirono a varie quote di quello sud-orientale ed in genere lungo direzioni diverse rispetto alla traccia dell'asse eruttivo. Sembra però che la fratturazione del Gran Cono, progressivamente estesasi a valle sino a quota di circa 600 m., sia stata unica, presso a poco secondo SE e che la dispersione delle bocche sia stata originata da irrobustimento superficiale. Secondo il Malladra fu la cupola lavica 1881-1883 che « nello sforzo di rottura.... resistette come un monolito, ed il terreno non cedette che alla sua periferia », ove effettivamente si

stabilirono tutte le bocche effusive. La prima bocca del versante si aprì ad una quota di circa 1200 m., da cui scaturì una lenta colata lavica. Dopo un percorso di solo qualche chilometro, la lava in serata era già ferma. Questa cessazione dell'efflusso fu evidentemente provocato dal prolunga-

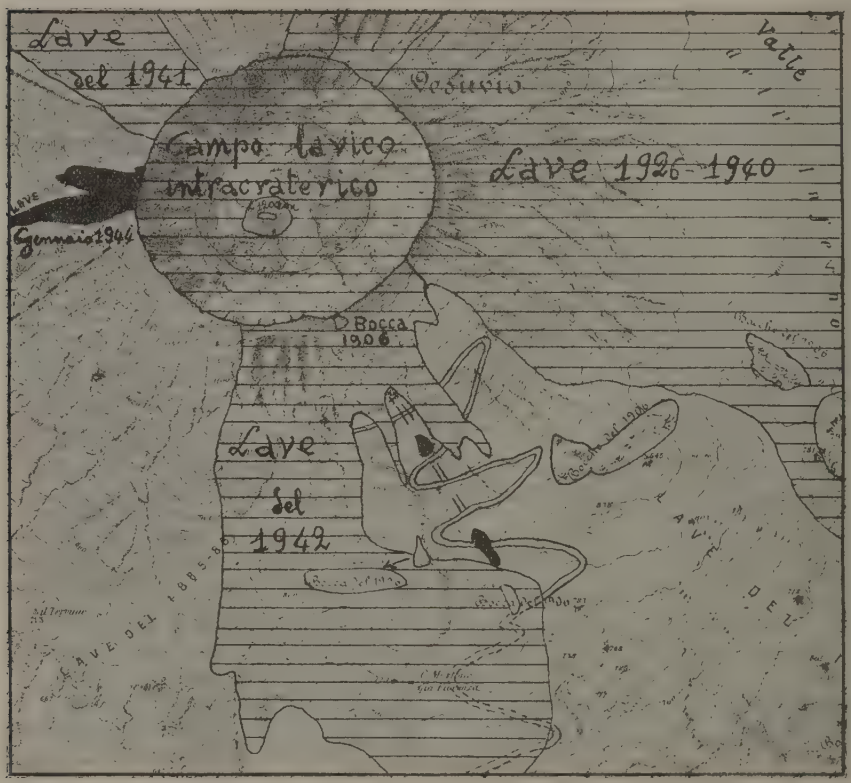


Fig. 3 — Le due minuscole colate (in nero) lungo il versante meridionale emerse da bocche allineate con due bocche del sistema meridionale di fenditure dell'eruzione del 1906. L'indicato allineamento mostra féssure prevalentemente parallele alla generatrice nelle zone segnate con tratti paralleli. La parte superiore della zona fessurata (indicata con crocette) il 25 giugno 1942 risultava fumante. Nella figura si è approssimativamente rappresentata la distribuzione delle lave terminali riversatesi all'esterno dal nov. 1926 al genn. 1944.

mento della spaccatura a valle, in modo che verso mezzanotte del medesimo giorno un nuovo e più abbondante sgorgo si ebbe da un'altra bocca determinatasi ad una quota di circa 800 m..

Anche a non voler tener conto della già ammessa unicità di frattura per il complesso delle bocche meridionali, emerge evidente che le due indicate bocche effusive del 4 aprile, dislocate entrambe secondo il radiante S 20° E, segnante anche la direzione seguita dalla fratturazione della primavera del 1942, sono disposte, in relazione alle due bocche di tale

manifestazione subterminale, rispettivamente alquanto a monte della bocca superiore del 1942 ed appena più a valle della inferiore.

2. — Nè può ritenersi casuale la coincidenza della suddetta direzione con quella di persistenti e svariate manifestazioni tettoniche e termochimiche verificatesi negli ultimi anni del periodo eruttivo (se pure prevalentemente localizzate a zone piuttosto prossime ai piedi del conetto) e rivelanti la esistenza di una fratturazione radiale interessante profondamente la platea lavica.

La prima determinazione di una lacerazione radiale a SE, almeno evidente e non limitata agli abituali crepacciamenti dei soli fianchi del conetto, costituì il fenomeno iniziale dell'intervallo eruttivo incominciato il 28 aprile 1936; in occasione del quale una bocca effusiva principale si stabilì a circa 150 m dalla base del conetto. Nessun carattere di eccezionalità venne attribuito alle deformazioni del fondo craterico secondo la direzione presumibilmente seguita dalla corrente lavica, in quanto abituali e giustificate dalle variazioni di portata delle lave interfluenti nel tratto intracraterico. Ma, al chiudersi dell'intervallo, le deformazioni al piede SE del conetto non cessarono; anzi, insieme ad un'intensa attività fumarolica, si resero sempre più appariscenti: fratturazioni, avvallamenti, sollevamenti.... ed ancora ripetuti efflussi lavici, spesso effimeri, sia contemporanei ad efflussi interessanti altri versanti, sia nel corso di temporanee, almeno apparenti, pause effusive. Un'accentuazione di tali fenomeni si manifestò nel biennio 1938-1939. Tra questi debbono ricordarsi: il profondo e vasto scoscendimento di metà luglio 1938, della capacità di oltre 10.000 m.^{3}, che venne ricolmato da effimera colata il 9 agosto; e più ancora il progressivo sollevamento della base sud orientale già sensibile alla fine del 1938 e che nei primi mesi del 1939 dette gradualmente luogo alla formazione di un gradino dell'altezza di circa 5 metri. Entrambi i fenomeni debbono essere considerati indizi di attività del sistema di fenditure sud-orientale. Il primo, provocato da mancato sostegno per abbassamento magmatico, dette agio di confermare, attraverso osservazioni dirette, la pluralità degli efflussi episuperficiali che avevano interessato la regione. Il secondo, probabilmente originato da spinte dovute ad iniezioni magmatiche relativamente profonde, come lasciarono rilevare alcune anormali variazioni nella deviazione apparente della verticale, avrebbe mostrato una tendenza ad emersioni magmatiche, di cui però non si ebbe alcuna evidente manifestazione.

Anche in seguito si ebbero fenomeni del tipo di quelli descritti, ma essi risultarono appariscenti sino all'agosto 1940; nei mesi successivi, sino all'inizio dell'intervallo eruttivo di fine ottobre 1941, i fenomeni, pur supposti, non furono tanto evidenti da essere direttamente seguiti. La vivace attività a fontane laviche lungo la fenditura orientale con interessamento anche della base del conetto nella zona più volte menzionata, nonchè la successiva localizzazione al piede sud-orientale del conetto dei fenomeni

effusivi in occasione dello sgretolamento quasi totale del conetto, determinatosi nella notte sul 2 novembre 1941, devono ritenersi ancora una prova delle ammesse condizioni tettoniche della zona.

Le effettuate considerazioni suggeriscono pertanto una plausibile spiegazione del fenomeno del 1942. E cioè nell'ulteriore sviluppo del sistema di fenditure sud-orientali (del quale mai, a partire dal 1936, si è potuto constatare la totale cessazione dell'attività) sarebbero state interessate da lacerazioni, sempre secondo la medesima direzione radiale, anche le pareti del Gran Cono. Non è improbabile che un'accentuazione nell'attività del sistema, determinante un più rapido progresso delle fenditure, si sia avuta in occasione della fase parossistica del 2-3 novembre 1941. Attraverso le fenditure vi sono stati moti magmatici, connessi con ripetute iniezioni e dei quali si hanno evidenti prove: negli efflussi episuperficiali e superficiali, nelle deformazioni, nell'attività termo-chimica, nell'andamento delle deviazioni apparenti della verticale. L'allontanamento medio delle masse magmatiche dalla sorgente fu, specie all'inizio, limitato a zone relativamente prossime all'asse eruttivo, ma, con l'estendersi delle zone fessurate, le distanze evidentemente crebbero, sino a che le masse magmatiche si sarebbero immesse in fenditure ancora beanti del sistema superiore della eruzione 1906. La conseguente facilità di progresso dovette determinare: un più rapido moto, un abbassamento magmatico nel condotto, ed ancora, per mancato sostegno, il crollo della cima del conetto. Questi fenomeni si sarebbero verificati appena precedentemente all'efflusso superiore estracraterico; anzi costituirebbero con questo il primo episodio della manifestazione effusiva della primavera del 1942. In base alle considerazioni effettuate, si può ritenere che tale episodio sarebbe avvenuto solo qualche giorno dopo il fenomeno sismico del 24 aprile 1942.

L'immediata cessazione dell'efflusso superiore deve essere attribuito all'ulteriore spostamento a valle, attraverso sempre la fenditura del 1906, delle masse alimentanti.

Un probabile arresto frontale, derivante eventualmente da parziale o totale suturazione del successivo tratto della frattura, avrebbe provocato un rigurgito magmatico nel condotto con affioramento terminale, rilevato il 17 maggio dalla brusca ripresa dei lanci copiosi e continui di scorie e brandelli lavici. Il successivo abbassamento della colonna, a distanza di solo alcune ore dall'inizio della recrudescenza esplosiva, dimostrato dal quasi immediato ritorno dell'attività a tranquille esalazioni, insieme alla considerazione dei fenomeni sismici e tettonici già descritti, permette di costruire uno schema ordinato delle vicende susseguitesi a partire dalla emersione della colonna magmatica del 17 maggio.

E pertanto i fenomeni verificatisi sarebbero stati i seguenti: aumentata pressione magmastatica; rottura della volta della galleria di drenaggio

delle lave già insinuate tra le fratture del 1906 (fratturazioni radiali intracrateriche a SE, W ed estracrateriche a SE); sgorgo, dalla base di questa, della colata inferiore; abbassamento della colonna; sensibile cedimento del conetto nel suo insieme, rivelato dalle lesioni arcuali alla base NE. Anche il secondo episodio effusivo fu effimero, prevalentemente a causa di cessata alimentazione.

Se da un canto l'interpretazione suggerita delle manifestazioni effusive estracrateriche del maggio 1942 lascia dedurre un'alimentazione diretta da parte della colonna magmatica; d'altro canto è necessario ancora ammettere che lo squarcio nelle pareti del condotto, attraverso il quale si sarebbero verificate le iniezioni magmatiche, dovesse risultare relativamente prossimo alla superficie e certamente meno profondo della base della fenditura orientale o sud-orientale, alimentante invece gli efflussi terminali, che nell'intervallo di tempo considerato non subirono alcuna riduzione nella copiosità.

Se si eccettuano alcuni sicuri moti di salita e di discesa magmatica nel condotto, connessi eventualmente con ripetute esigue iniezioni nel solito sistema di fenditure, tra le quali una più copiosa potrebbe essersi verificata in concomitanza dello sprofondamento terminale del 23 giugno, nessun fenomeno interessante evidentemente il versante sud-orientale, fu posteriormente osservato fino al 1944. Il parossismo del marzo di tale anno, preceduto, a partire dal febbraio, da una riduzione progressiva nella intensità dei fenomeni esplosivi, ebbe per prodromo il crollo quasi totale del conetto con formazione di profonda voragine, verificatosi il 13 marzo. Entrambe le manifestazioni sono attribuite ad abbassamento della colonna magmatica, lento dal febbraio al 12 marzo, brusco e sensibile all'ultima data. La discesa sarebbe stata provocata da iniezioni magmatiche entro fenditure gradualmente riaprenlisi, come potrebbe suggerire l'accentuata attività pseudospasmodica successiva ai primi di febbraio, con moti quasi sensibili e provocanti all'Osservatorio vibrazioni di vetrine.

In entrambi i casi si hanno elementi atti a giustificare l'ammissione di iniezioni magmatiche entro le solite fratture sud-orientali. Contemporaneamente alla riduzione della copiosità degli efflussi osservati sin dalla fine di gennaio (26 gennaio) si notarono fessurazioni alla base SSE del conetto che, in seguito a contemporanea decapitazione, subì anche una perdita di altezza di circa un dieci metri. Ed ancora l'estensione delle zone sconvolte da fratture secondo la medesima direzione radiale SSE, contemporanea al crollo del conetto del 13 marzo, dovrebbe egualmente essere considerata una prova indiretta della riattivazione del sistema 1942. Deve però escludersi in modo sicuro l'eventuale emersione in tali occasioni di colate laviche anche esigue direttamente sgorganti da bocche aprentisi

lungo il versante esterno meridionale. Tale affermazione, può essere sostenuta :

1. — in base all'esame di una fotografia (v. Fig 4) della zona effettuata da un aereo nel corso della prima fase dell' eruzione (il 19) sulla quale sono appena ed ancora discernibili le sole due colate della primavera del 1942;

2. — in base alla considerazione che non sarebbe sfuggita all' osservazione uno sgorgo estracraterico in zone non confondibili con quelle interessate da efflussi terminali riversatisi nel versante meridionale.

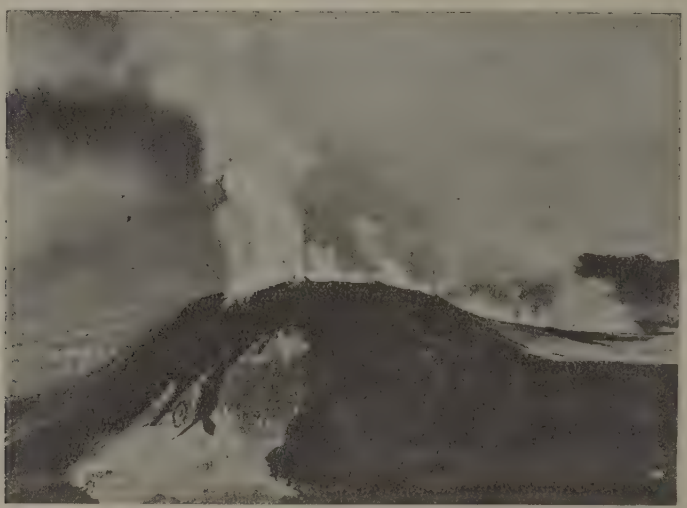


Fig. 4 — Fotografia da aereo del Gran Cono vesuviano nel secondo giorno dell' eruzione (19 marzo) del 1944. Oltre alla distribuzione delle lave esterne del periodo eruttivo interessante i versanti settentrionale, orientale e meridionale sono visibili le due minuscole colate subterminali del maggio 1942. A meglio distinguerle sono state circondate (a distanza) da tratteggio. La superiore è isolata ; mentre la inferiore appare (nel tratto inferiore) sottoposta a lave terminali.

Una tale assenza contrastante almeno apparentemente con le precedenti ammissioni delle iniezioni magmatiche può giustificarsi con la nuova ammissione di una suturazione della frattura in seguito allo sconvogimento subito dall' apparato terminale.

Se anche si volesse escludere la parziale attivazione del sistema di fenditure sud-orientali in concomitanza del parossismo del 1944, a quanto è stato detto prima, rimarrebbe sufficientemente provato la quasi superficialità del crepaccio alimentante, nonchè il distacco delle masse iniettate da quelle della colonna, altrimenti non si potrebbe egualmente giustificare l' assenza di manifestazioni estracrateriche nel corso dell' eruzione. Tali considerazioni lascerebbero pertanto dedurre l' esistenza di masse magmatiche a vita indipendente, quasi episuperficiali, dislocate nella zona esterna

sud-orientale e delle quali le manifestazioni termiche, ricordate all'inizio della nota, costituirebbero un elemento probativo, almeno dell'esistenza. D'altro canto le vicende termiche della zona, mentre confermano le esposte vedute, ricevono da queste una completa spiegazione. Ed infatti dalle indagini effettuate emergono i seguenti interessanti dati:

1. — La zona in cui si ebbero le prime manifestazioni di relativamente alta termicità (nel 1946) corrisponde, in base ad effettuate misure altimetriche e direzionali, alla posizione della bocca inferiore del 1942.

2. — La zona termica si è gradualmente estesa verso ovest.

3. — I valori massimi di temperatura dal 1946 si sono mantenuti tutt'al più costanti; se non devono ritenersi sensibilmente diminuiti. Il 26 agosto 1946 fu riscontrata alla sola fumarola, allora esistente, la temperatura di 583° C. In prossimità del crepaccio fu osservato un avvallamento estendentesi in direzione quasi normale alla generatrice del Cono per una lunghezza di circa 10 metri. Il 9 luglio 1949, mentre alla stessa fumarola la temperatura più elevata riscontrata è stata di 405° C., presso le altre fumarole, alquanto più a W, sono state osservate temperature varianti tra 270 e 330°. Nella ultima escursione le temperature ottenute risultarono per svariate circostanze inferiori alle effettive, in modo da poter ritenere, almeno in via approssimativa, l'ammesso andamento termico.

4. — Nessuna vera attività fumarolica o puramente termica era rilevabile alla bocca inferiore nel giugno 1942, nè, a quel che sembra, successivamente fino al 1944.

5. — Il versante meridionale venne ricoperto da una spessa coltre prevalentemente detritica nel corso del parossismo del 1944.

6. — Al di sotto del manto detritico la zona successivamente interessata da manifestazioni termiche era già ricoperta da potente strato di lave che, diramatesi dal campo lavico terminale, s'erano nel giugno sovrapposte parzialmente alla colata inferiore.

Dal coordinamento degli esposti rilievi ed indipendentemente dalle considerazioni effettuate, a proposito dell'attività effusiva estracraterica del 1942, si può agevolmente dedurre:

1. — la posteriorità dell'inizio dell'attività termica rispetto alle manifestazioni del 1942 (assenza di attività fumarolica o termica dal giugno 1942 al parossismo del 1944);

2. — anteriorità alle prime notizie del 1946 per l'ammissione di una gradualità più o meno rapida negli aumenti di temperature, (al principio del 1946 già si avevano manifestazioni caratteristiche con temperature presso a poco eguali a quelle riscontrate in agosto);

3. — interessamento della fenditura alimentante la colata del 1942, anzi del sistema superiore delle fenditure meridionali del 1906;

4. — superficialità della sorgente alimentante il campo termico (dimo-

strabile: dalla quasi costanza delle temperature nel tempo, dall'estensione del campo a temperature pressochè eguali).

Le considerazioni effettuate nelle due parti della nota con risultati concordanti nei riguardi della genesi dei fenomeni esaminati consentono pertanto, in conclusione, di poter affermare:

1. — che le manifestazioni effusive della primavera del 1942 si effettuarono in tempi presumibilmente diversi: la superiore alla fine di aprile o ai primi di maggio, mentre la inferiore il 17 maggio o qualche giorno dopo;

2. — che i fenomeni termici attinsero la loro attività da masse magmatiche, relativamente degassate, staccatesi dalla colonna, forse nel 1944, ed annidatesi nel sistema di fenditure del 1906.

Questa seconda ammissione mentre dà una spiegazione dell'estensione ad W del campo termico con interessamento della zona compresa tra la bocca inferiore del 1942 ed altra bocca del 1906, situata presso a poco alla medesima altezza della precedente ed a levante delle bocche di Casa Fiorenza (v. Fig. 3), dà ancora conto del variabile ritardo tra iniezione ed apparizione del fenomeno termico, in quanto giustificato dal diverso spessore e dalla diversa natura della sovrapposta coltre detritico-lavica.

Corpovarietà e varietà algebriche ed iperalgebriche di un S_r ipercomplesso.

Nota del socio **Nicolò Spampinato**

(Adunanza del dì 1 aprile 1950)

Sunto. — S'introducono le nozioni fondamentali relative alle corpovarietà e varietà algebriche ed iperalgebriche di un S_r ipercomplesso legato ad una qualunque algebra, di ordine n, dotata di modulo, definita in un corpo numerico Γ qualunque, con particolare riguardo al caso in cui Γ è il corpo complesso.

1. *Premessa.* — La nozione di *catena* (unidimensionale) di Staudt della retta complessa è stata estesa, da Corrado Segre, per un S_r complesso o bicomplesso, nelle *varietà iperalgebriche*, (in particolare algebriche) di un tale S_r [1]). Tali varietà, in relazione alla teoria delle algebre, ven-

[1]) Segre C., *Sulle rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici*, Mathematische Annalen, XL Band. 1892. Id., *Un nuovo campo di ricerche geometriche*, Atti dell'Accademia di Torino, voll. XXV e XXVI. Id., *Le geometrie proiettive nei campi duali*, Atti Accad. Sc. Torino, 1911-12.

gono studiate, dopo l'introduzione della teoria generale degli S_r ipercomplessi [1]), nell'S_r bicomplesso e biduale [2]). Ebbene, passando ad un S_r ipercomplesso qualunque, dopo aver considerato quegli enti che abbiamo chiamato *catene t-dimensionali* di un tale S_r ipercomplesso [3]), ci proponiamo ora di estendere tale nozione introducendo quegli enti che chiameremo *corpovarietà e varietà algebriche ed iperalgebriche* t-dimensionali, di pertinenza della Geometria corpoproiettiva (in particolare proiettiva) per un S_r ipercomplesso.

2. *Definizione di corpovarietà di un* S_r *ipercomplesso.*

Consideriamo un S_r ipercomplesso e la sua I. rappresentazione nell'S_N, definito nel corpo numerico Γ in cui è definita l'algebra, ad n unità, dotata di modulo, a cui è legato detto S_r. Sarà

$$N = (r+1)n - 1 .$$

Consideriamo in S_N la congruenza di ordine 1, (S_{n-1}), che dà detta I. rappresentazione dell'S_r ipercomplesso considerato. Mentre un punto P descrive una varietà V_t, con $t \leq n r - 1$, genericamente assegnata in S_N, l'S_{n-1} della congruenza (S_{n-1}) uscente da P, varierà, ed in corrispondenza il punto X dell'S_r ipercomplesso rappresentato da tale S_{n-1} varierà descrivendo un insieme di punti che diremo *corpovarietà* dell'S_r ipercomplesso, di dimensione t, rispetto al corpo numerico Γ. La varietà di S_N, V_{t+n-1}, composta dagli S_{n-1} della congruenza (S_{n-1}) uscenti dai punti P di V_t, ci dà, con i suoi S_{n-1} *generatori, la I. rappresentazione della corpovarietà suddetta di* S_r *in* S_N. [Dalla I. rappresentazione si passa, al solido modo, alle altre due rappresentazioni, II. e III. [4])].

Nel caso in cui il corpo numerico Γ sia *infinito*, una corpovarietà, dell'S_r ipercomplesso considerato, di dimensione $t = 1$ (rispetto a Γ) si dirà *filo*; per $t = 2$ si dirà *tela*. Sono così estese ad un qualunque S_r ipercomplesso (di I. specie sinistro o destro) delle definizioni già introdotte da

---

[1]) Spampinato N., *Teoria delle caratteristiche in un'algebra ed* S_r *ipercomplessi*. Rend. Reale Accad. Lincei, Serie 5ª, vol. IV, fasc. 2.

[2]) Spampinato N., *Varietà iperalgebriche del* Segre *dell'* S_r *complesso o bicomplesso*. Atti Reale Accad. Sc. Torino, 1935-36. Id., *Geometria dell'* S_r *biduale proiettivo*. Memorie Accad. Lincei, serie 6ª, vol. VII, 1938.

[3]) Spampinato N., *Le catene t-dimensionali e la Geometria corpoproiettiva dell'* S_r *ipercomplesso di 1ª specie, sinistro o destro, legato ad un'algebra dotata di modulo e definita in un qualunque corpo numerico*, Rend. Accad. Sc. Fis. e Mat. di Napoli s. 4ª, vol. XVI, 1949.

[4]) Spampinato N., *Le riemanniane degli* S_r *ipercomplessi*. Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. Napoli, serie 4ª, vol. XIII, 1942-43.

Corrado SEGRE per l'S_r bicomplesso e che avevamo già esteso per l'S_r biduale nella memoria citata in [3]).

Si osservi esplicitamente che se la V_t fissata in S_N è un S_t, la corpovarietà di dimensione t, di S_r, sopra definita si riduce ad una catena C_t t-dimensionale che abbiamo già introdotto nella nota citata in [3]).

3. *Corpovarietà iperalgebriche ed algebriche di un* S_r *ipercomplesso legato ad un' algebra* A, *di ordine* n, *definita nel corpo complesso.*

Se Γ è il corpo complesso, e se la V_{t+n-1} dell'S_N, di cui al n. precedente è algebrica, la corpovarietà dell'S_r ipercomplesso, sopra definita, si dirà *iperalgebrica*. Nelle memorie citate in [3]) abbiamo già studiato le varietà iperalgebriche (in particolare algebriche) nei casi particolari dell'S_r bicomplesso e dell'S_r biduale.

La possibilità di considerare fra le corpovarietà iperalgebriche quelle algebriche, nel caso dell'S_r bicomplesso o biduale, dipende dalla circostanza che tali S_r sono legati ad algebre, non solo definite sul corpo complesso, ma anche *commutative*. Ciò dipende dalla circostanza che in una tale algebra si può introdurre la nozione di polinomio omogeneo $f(x_1, \ldots, x_{r+1})$ di grado m godente della proprietà che moltiplicando per un fattore ρ, elemento dell'algebra, non nullo nè divisore dello zero, le $r+1$ variabili, il valore assunto da $f(x_i)$ viene moltiplicato per ρ^m, che risulta, quindi, pure non nullo e non divisore dello zero. L'equazione $f(x_i) = 0$ è atta pertanto a definire un ente [ipersuperficie *algebrica* dell'S_r ipercomplesso considerato, se i coefficienti di f formano una matrice (ad una riga) di caratteristica massima] dell'S_r ipercomplesso *proiettivo. Tale nozione di ipersuperficie algebrica*, (e conseguente nozione di varietà algebrica) *si può, pertanto, introdurre in ogni* S, *ipercomplesso legato ad una qualunque algebra commutativa definita nel corpo complesso.* I punti di una tale varietà saranno rappresentati, nella I. rappresentazione, degli S_{n-1} della congruenza (S_{n-1}), componenti una varietà algebrica di S_N. Cioè *tali varietà algebriche di* S_r *risultano, sempre, particolari corpovarietà iperalgebriche dell'* S_r *stesso.*

Nota. È interessante, però, notare, che nel caso che l'algebra A sia commutativa, non solo è possibile estendere, come abbiamo osservato, il concetto di ipersuperficie e varietà algebriche *ordinarie* dell'S_r proiettivo complesso, ma, come vedremo, anche i concetti di ipersuperficie e varietà algebriche *con indice di algebricità qualunque* (in particolare *virtuali* e *ideali*) che abbiamo già introdotti, con metodo analitico, nell'S_r proiettivo complesso [1]). Pertanto, per gli S_r ipercomplessi legati ad algebre *commu-*

---

[1]) SPAMPINATO N., *Lezioni di Geometria Superiore*, vol. III e vol. IV, Parte Seconda, Casa Editrice Pironti, Napoli. ID., *Nozioni introduttive alla teoria delle iper-*

tative le due nuove teorie generali, che abbiamo introdotte, degli spazi legati ad un'algebra e delle ipersuperficie e varietà algebriche d'indice di algebricità qualunque nell'S_r complesso, *convergono in un'unica teoria: Geometria algebrica, con indice di algebricità qualunque, di un* S_r *ipercomplesso legato ad un'algebra commutativa, dotata di modulo definita nel corpo complesso.*

La differenza fondamentale di tali ricerche fra il caso commutativo e quello non commutativo è in relazione al fatto che: *gli sviluppi in serie provenienti dalle funzioni totalmente olomorfe nel caso che l'algebra* A *non è commutativa sono serie speciali* [1]. Ora le ridotte di tali serie, non sono polinomi generali, nell'algebra *A* ma *speciali. Nel caso non commutativo si potrà pervenire, quindi ad enti algebrici speciali.* Una prima ricerca in tal senso, per es., nell'S_4 sinistro di Study, legato all'algebra del 3° ordine non commutativa dei numeri di Study [2] porta, come vedremo, a *gruppi algebrici speciali* che sono rappresentati sulla riemanniana W_3^5 di tale S_4, da *gruppi di piani generatori.*

---

superficie algebriche di indice n *dell'* S_r *proiettivo complesso*, Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat., serie 4ª, vol. XIV, XV e XVI (1946-47-48-49-50), Nota I., .., VI.

[1]) Spampinato N., *Sulle funzioni in un'algebra complessa dotata di modulo*, Rend. di Matematica e delle sue applicazioni, serie 5ª, vol. II, 1941, pag. 204.

[2]) Spampinato N., *Lezioni di Geometria Superiore*, vol. V, Parte Settima, Casa Editrice Pironti, Napoli.

Le corpoproiettività dell'S_4 proiettivo legato all'algebra A

Nota di **Angelo Fadini**, *presentata dal socio ord.* **N. Spampinato**

(Adunanza del dì 1. aprile 1950)

Sunto. — Si dimostra, seguendo il metodo generale indicato dal prof. Spampinato, che le corpoproiettività dell'S_4 legato all'algebra A, di ordine 2, dotata di modulo, definita nel corpo numerico $C[2]$ o sono proiettività o sono trasposizioni.

Premessa. — In una mia nota precedente [1]), introdotta l'algebra A, di ordine 2, dotata di modulo, definita nel corpo $C[2]$, costituito dalle classi mod. 2, come la totalità delle matrici $\alpha = \begin{Vmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{Vmatrix} = xu_1 + tu_2$, le cui unità u_1 ed u_2 si moltiplicano con una tabella identica a quella dei numeri bireali, definiti nel corpo reale, ho mostrato che, seguendo i metodi generali indicati dal prof. Spampinato, si può definire una congruenza biassiale Γ di rette dell'S_3 proiettivo, definito nel corpo $C[2]$, costituente la prima rappresentazione dell'S_4 proiettivo legato all'algebra A.

Mi propongo di studiare qui le corpoproiettività di tale S_4 proiettivo.

1. *Il gruppo di proiettività* $[\Phi]$. È noto che lo studio delle corpoproiettività dell'S_4 proiettivo legato ad un'algebra dipende da quello del gruppo delle proiettività che trasformano in sè stessa la congruenza costituente la prima rappresentazione dell'S_4. Occorre quindi studiare il gruppo, che indicheremo con $[\Phi]$, delle proiettività dell'S_3 del $C[2]$, che trasforma in sè stessa la congruenza Γ, costituita dalle 9 rette che si appoggiano a due rette sghembe r ed s. Indico con Φ_1 le proiettività che ammettono r ed s come rette unite e con Φ_2 quelle che trasformano r in s ed s in r. Le Φ_1 formano un gruppo che indicherò con $[\Phi_1]$. L'insieme delle Φ_2, che non è un gruppo, può considerarsi come prodotto del gruppo $[\Phi_1]$ per una determinata Φ_2, che dirò $\Phi_2{}^*$; mentre una qualunque delle Φ_2 può ottenersi come prodotto di una Φ_r per una $\Phi_2{}^*$, essendo Φ_r e Φ_s le proiettività che ammettono rispettivamente le rette r ed s come rette di punti uniti. Ricordando che il gruppo $[\Phi]$ è somma del sottogruppo $[\Phi_1]$ e dell'insieme $[\Phi_2]$ si ha:

$$[\Phi] = [\Phi_r][\Phi_s] + [\Phi_r]\cdot[\Phi_s]\cdot\Phi_2{}^* . \tag{1}$$

Si deduce quindi che lo studio delle corpoproiettività dell'S_4 legato all'al-

---

[1]) A. Fadini, *La prima rappresentazione degli* S_4 *proiettivi legati a due algebre doppie definite nel corpo* $C[2]$. Rend. Acc. di Napoli, serie 4ª, vol. XVII, 1950.

gebra A è ricondotto a quello della proiettività Φ_3^* e dei gruppi $[\Phi_r]$ e $[\Phi_s]$ di proiettività dell'S_3 del $C[2]$, ambiente della congruenza Γ.

2. *Le equazioni del gruppo* $[\Phi]$. Le equazioni del gruppo $[\Phi_4]$ sono:

$$(2)\qquad \begin{cases} x'_1 = a_{11}\, x_1 + a_{13}\, x_3 \\ x'_2 = a_{22}\, x_2 + a_{24}\, x_4 \\ x'_3 = a_{31}\, x_1 + a_{33}\, x_3 \\ x'_4 = a_{42}\, x_2 + a_{44}\, x_4 \end{cases}$$

In esse figurano otto parametri omogenei, variabili nel corpo $C[2]$, quindi il gruppo $[\Phi_4]$ è di ordine 256; le proiettività Φ_4 non degeneri sono però solo 36 e si ottengono combinando i sei valori seguenti della quaterna di coefficienti $a_{11}, a_{13}, a_{31}, a_{33}$:

$$(3)\qquad \begin{cases} a_{11} = (1\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 1) \\ a_{13} = (0\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 1) \\ a_{31} = (0\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 0) \\ a_{33} = (1\ ,\ 1\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 1) \end{cases}$$

coi sei valori seguenti della quaterna di coefficienti $a_{22}, a_{24}, a_{42}, a_{44}$:

$$(4)\qquad \begin{cases} a_{22} = (1\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 1) \\ a_{24} = (0\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 1) \\ a_{42} = (0\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 0) \\ a_{44} = (1\ ,\ 1\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 1) \end{cases}$$

Il sottogruppo $[\Phi_3]$ è di ordine 16 e le sue equazioni sono:

$$(5)\qquad \begin{cases} x'_1 = x_1 \\ x'_2 = a_{22}\, x_2 + a_{24}\, x_4 \\ x'_3 = x_3 \\ x'_4 = a_{42}\, x_2 + a_{44}\, x_4 \end{cases}$$

Le sole proiettività non degeneri del gruppo sono le sei che si ottengono dando alle a_{ij} i sei valori indicati nella tabella (4).

Analogamente il sottogruppo $[\Phi_r]$ è di ordine 16 e le sue equazioni sono:

$$(6)\qquad \begin{cases} x'_1 = a_{11}\, x_1 + a_{13}\, x_3 \\ x'_2 = x_2 \\ x'_3 = a_{31}\, x_1 + a_{33}\, x_3 \\ x'_4 = x_4 \end{cases}$$

Soltanto sei proiettività del gruppo non sono degeneri e si ottengono dando alle a_{ij} i sei valori indicati dalla tabella (3).

Infine l'insieme, non gruppo, delle Φ_2 ha le equazioni:

$$(7) \qquad \begin{cases} x'_1 = a_{12}\, x_2 + a_{14}\, x_4 \\ x'_2 = a_{21}\, x_1 + a_{23}\, x_3 \\ x'_3 = a_{32}\, x_2 + a_{34}\, x_4 \\ x'_4 = a_{41}\, x_1 + a_{43}\, x_3 \end{cases}$$

poichè queste dipendono da otto parametri non omogenei, possiamo affermare che le proiettività dell'insieme sono 256; di esse però solo 36 sono non degeneri e le corrispondenti equazioni si ottengono dalle (7) dando ai coefficienti a_{ij} gli stessi valori indicati nelle tabelle (3) e (4); ma con opportuni cambiamenti di indici.

3. *Le corpoproiettività corrispondenti alla proiettività* Φ_2^*. Fra le 36 proiettività non degeneri Φ_2 considero quella di equazioni:

$$(8) \qquad \begin{cases} x'_1 = x_4 \\ x'_2 = x_3 \\ x'_3 = x_2 \\ x'_4 = x_1 \end{cases}$$

che indico con Φ_2^*. Essa trasforma la retta $g \equiv RS$ della congruenza Γ, con $R\,(0, \rho, 0, \sigma)$ ed $S\,(\lambda, 0, \mu, 0)$, nella retta g' di Γ, congiungente i punti $R'\,(\sigma, 0, \rho, 0)$ ed $S'\,(0, \mu, 0, \lambda)$ rispettivamente omologhi di R ed S nella proiettività (8). La retta g è, in Γ, l'immagine del punto X dell'S_1 proiettivo legato all'algebra A, le cui coordinate omogenee sono:

$$\begin{cases} \xi_1 = \lambda u_1 + \rho u_2 \\ \xi_2 = \mu u_1 + \sigma u_2 \end{cases}.$$

Così pure la retta g' è, in Γ, l'immagine del punto X' dell'S_1 proiettivo legato all'algebra A, le cui coordinate omogenee sono:

$$\begin{cases} \xi'_1 = \sigma u_1 + \mu u_2 \\ \xi'_2 = \rho u_1 + \lambda u_2 \end{cases}.$$

Si riconosce subito che per passare dalle coordinate di X a quelle di X' basta scambiare u_1 con u_2 nelle ξ_1 e ξ_2 ed invertire le due coordinate così trasformate.

Per esprimere con elementi dell'algebra le coordinate di X' in funzione di quelle di X, introduco la funzione $\bar{\xi}$ ponendo:

$$\bar{\xi} = \beta u_1 + \alpha u_2 \qquad \text{se è:} \qquad \xi = \alpha u_1 + \beta u_2.$$

Si riconosce allora che le coordinate omogenee di X' sono legate a quelle

di X dalle relazioni:

$$\begin{cases} \xi_1' = \overline{\xi}_2 \\ \xi_2' = \overline{\xi}_1 \end{cases}$$

e pertanto i punti X ed X' dell'S_4 proiettivo legato all'algebra A, rappresentati in Γ dalle rette g e g', corrispondentisi nella proiettività Φ_2^* hanno le coordinate non omogenee ξ e ξ' legate dalla relazione:

$$\xi' = \overline{\xi}. \tag{9}$$

Questa equazione determina la corpoproiettività dell' S_4 *in esame, rappresentata nella congruenza* Γ *dell'* S_3 *ambiente, definito nel corpo* C [2], *dalla corrispondenza subordinatavi dalla proiettività* Φ_2^* *di equazioni* (8).

Applicando all'S_4 proiettivo legato all'algebra A una denominazione introdotta dal prof. Spampinato [1]), chiamerò *trasposizione* la corpoproiettività di equazione (9). Dunque *la proiettività* Φ_2^* *determina nell'* S_4 *proiettivo legato all'algebra* A *una trasposizione.*

4. *Le corpoproiettività corrispondenti alle proiettività* $[\Phi_1]$. Sia $g = RS$ una retta di Γ e g' la retta di Γ congiungente i punti R' ed S', omologhi di R e di S in Φ_3; per le (5) si ha: $S'(\lambda, 0, \mu, 0)$, $R'[0, (a_{22}\rho + a_{24}\sigma), 0, (a_{42}\rho + a_{44}\sigma)]$. La retta g è l'immagine in Γ del punto X dell'S_4 proiettivo legato all'algebra A, di coordinate omogenee:

$$\begin{cases} \xi_1 = \lambda u_1 + \rho u_2 \\ \xi_2 = \mu u_1 + \sigma u_2 \end{cases} \tag{10}$$

ed analogamente la retta g' è l'immagine in Γ del punto X' dell'S_4 proiettivo in esame, le cui coordinate omogenee sono:

$$\begin{aligned} \xi_1' &= (u_1 + a_{22}u_2)(\lambda u_1 + \rho u_2) + a_{24}u_2(\mu u_1 + \sigma u_2) \\ \xi_2' &= (u_1 + a_{44}u_2)(\mu u_1 + \sigma u_2) + a_{42}u_2(\lambda u_1 + \rho u_2) \end{aligned}$$

ponendo:

$$\begin{aligned} u_1 + a_{22}u_2 &= \alpha \\ a_{24}u_2 &= \beta \\ a_{42}u_2 &= \gamma \\ u_1 + a_{44}u_2 &= \delta \end{aligned}$$

[1]) N. Spampinato, *Sulla geometria dell'* S_3 *rigato considerato come* S_4 *ipercomplesso.* Rend. R. Acc. di Napoli, vol. XX, serie 2ª 1938.

e tenendo conto delle (10) si ha:

$$(11) \qquad \begin{cases} \xi_1' = \alpha\xi_1 + \beta\xi_2 \\ \xi_2' = \gamma\xi_1 + \delta\xi_2 \end{cases}$$

dalle quali, passando a coordinate non omogenee, si ha:

$$(12) \qquad \xi' = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}.$$

Le (11) e (12) determinano nell'S_4 proiettivo legato all'algebra A, le corpoproiettività rappresentate nella congruenza Γ dell'S_3 del $C[2]$ dalle corrispondenze subordinatevi dalle proiettività Φ_s di equazioni (5).

Una formola analoga alla (12) sussiste per le corpoproiettività corrispondenti alle proiettività del gruppo $[\Phi_r]$ perchè le equazioni delle Φ_r si ottengono da quelle delle Φ_s con una semplice permutazione ciclica degli indici; inoltre poichè ogni Φ_1 può considerarsi come prodotto di una Φ_r per una Φ_s e, d'altra parte nell'S_4 legato all'algebra A, il prodotto di due corrispondenze del tipo (12) e ancora una corrispondenza dello stesso tipo, si deduce che: *le corpoproiettività dell'* S_4 *legato all'algebra* A, *rappresentate nella congruenza* Γ *dell'* S_3 *del* $C[2]$ *dalle corrispondenze subordinatevi dalle proiettività* Φ_1 *sono caratterizzate da equazioni lineari fratte del tipo* (12).

Esse quindi sono corrispondenze dell'S_4 in esame, analoghe alle proiettività dell'S_4 ordinario, che chiamerò perciò egualmente proiettività.

5. *Conclusione.* — È facile constatare che il prodotto di una trasposizione per una proiettività è una trasposizione; pertanto ricordando la (2) si può affermare che: *le corpoproiettività dell'* S_4 *legato all'algebra* A *o sono proiettività o sono trasposizioni.*

Sul fenomeno di Peano nelle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine.

Nota II del dott. **Federico Cafiero**, *presentata dal socio* **C. Miranda**

(Adunanza del dì 6 maggio 1950)

Sunto. — Supposta $f(x, y, \lambda, \gamma)$ continua nello strato:

$$S: a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ |\lambda| < +\infty,\ |\gamma| < +\infty$$

e ivi crescente (decrescente) rispetto a γ, si dimostra che gli integrali dell'equazione differenziale $y' = f(x, y, \lambda, \gamma)$ sono quasi ovunque in $R: a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d$ univocamente determinati dal punto iniziale per quasi tutte le coppie (λ, γ) di numeri reali.

In questa Nota riprendo le considerazioni svolte in un mio precedente lavoro [1]) sullo stesso argomento, per osservare come in base ai risultati ivi conseguiti si pervenga al seguente:

Teorema I. — *Sia* $f(x, y, \lambda, \gamma)$ *continua nello strato*:

$$S: a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ |\lambda| < +\infty,\ |\gamma| < +\infty$$

ed ivi crescente (decrescente) rispetto a γ.

Allora gli integrali dell'equazione differenziale:

$$(a) \qquad y' = f(x, y, \lambda, \gamma),$$

dipendente dai parametri λ *e* γ, *sono quasi ovunque in* $R: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ *univocamente determinati dal punto iniziale per quasi tutte le coppie* (λ, γ) *di numeri reali.*

Si noti che da tale teorema si deduce:

Teorema II. — *Sia* $f(x, y, \lambda, \gamma)$ *continua nello strato* S *ed ivi crescente (decrescente) rispetto a* γ.

Allora per ogni γ, *non appartenente ad un insieme* I *di misura lebesguiana nulla, gli integrali dell'equazione differenziale:*

$$(a) \qquad y' = f(x, y, \lambda, \gamma)$$

---

[1]) F. Cafiero, *Sul fenomeno di* Peano *nelle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine*. Rend. Acc. Sc. fis. e mat., Napoli, S. 4ª, vol. XVII, 1950.

sono quasi ovunque in R *univocamente determinati dal punto iniziale per quasi tutti i valori di* λ.

Mi sono riferito per semplicità ad equazioni differenziali a secondo membro continuo; le estensioni dei teoremi enunciati al caso in cui l'equazione (a) soddisfa ad ipotesi più generali del tipo di CARATHÉODORY sono immediate e discendono in modo ovvio dai teoremi stabiliti nella mia precedente Nota sullo stesso argomento. Ovvia è anche l'estensione del teorema I al caso in cui l'equazione (a) dipenda da n parametri.

1. — Introduciamo la funzione ausiliaria:

$$\bar{f}(x, y, \lambda, \gamma) = \begin{cases} f(x, y, \lambda, \gamma) & \text{per} \quad (x, y) \subset R \\ f(x, c, \lambda, \gamma) & \text{per} \quad y < c \\ f(x, d, \lambda, \gamma) & \text{per} \quad y > d \end{cases}$$

definita nello strato:

$$\bar{S} : a \leq x \leq b, \ |y| < +\infty, \ |\lambda| < +\infty, \ |\gamma| < +\infty,$$

ivi continua, crescente (decrescente) rispetto a γ e per ogni coppia di valori (λ, γ) limitata nella striscia:

$$\sigma : a \leq x \leq b, \ -\infty < y < +\infty.$$

Ciò posto indichiamo con Γ la famiglia di equazioni differenziali generata dalla equazione:

$$(\bar{a}) \qquad y' = \bar{f}(x, y, \lambda, \gamma)$$

al variare di λ e γ nell'insieme dei numeri reali e, detto $\{P_n\}$ un insieme numerabile di punti della striscia σ, ivi ovunque denso, indichiamo con E l'insieme dei punti del piano (λ, γ) che danno luogo ad equazioni differenziali di Γ, per le quali il fenomeno di PEANO si verifica in qualche punto della successione $\{P_n\}$.

Dimostriamo in primo luogo che *l'insieme* E *è misurabile secondo Lesbegue.*

A tale scopo indichiamo con E_n $(n = 1,2,\ldots)$ il sotto-insieme di E costituito dai punti di E che danno luogo ad equazioni differenziali della famiglia Γ, per le quali il fenomeno di PEANO si verifica in P_n $(n = 1,2,\ldots)$.

Si ha ovviamente:

$$E = E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots$$

Fissata una successione decrescente $\{\varepsilon_r\}$ di numeri positivi, tendente a zero, indichiamo inoltre con $E_n^{(r)}$ $(n = 1,2,\ldots; r = 1,2,\ldots)$ il sotto-insieme

di E_n costituito dai punti di E_n che danno luogo ad equazioni differenziali della famiglia Γ, per le quali il fenomeno di PEANO si verifica in P_n con un divario maggiore od eguale ad ε_r $(r = 1,2,\ldots)$ [1]).

Risulta evidentemente:

$$E_n = E_n^{(1)} + E_n^{(2)} + \ldots + E_n^{(r)} + \ldots$$

e quindi per dimostrare la misurabilità di E basta far vedere che $E_n^{(r)}$ è chiuso. Ciò è d'immediata verifica.

Infatti, detto $Q_0(\lambda_0, \gamma_0)$ un punto di accumulazione di $E_n^{(r)}$, indichiamo con $\{Q_\nu(\lambda_\nu, \gamma_\nu)\}$ una successione di punti dell'insieme $E_n^{(r)}$ convergente ad esso ed osserviamo che per la continuità uniforme della $\overline{f}(x, y, \lambda, \gamma)$ in ogni dominio limitato del piano (λ, γ) si ha:

$$\lim_{\nu \to \infty} \overline{f}(x, y, \lambda_\nu, \gamma_\nu) = \overline{f}(x, y, \lambda_0, \gamma_0) \tag{1}$$

uniformemente in σ.

Detto $G_\nu(x)$ $(\nu = 1,2,\ldots)$ l'integrale superiore dell'equazione:

$$y' = \overline{f}(x, y, \lambda_\nu, \gamma_\nu) \qquad (\nu = 1,2,\ldots) \tag{2}$$

passante per P_n, per la (1), com'è noto [2]), dalla successione $\{G_\nu(x)\}$ se ne può estrarre una $\{G_{k_\nu}(x)\}$ convergente uniformemente in (a, b) verso un integrale $y_1(x)$ dell'equazione:

$$y' = \overline{f}(x, y, \lambda_0, \gamma_0). \tag{3}$$

Analogamente, detto $g_\nu(x)$ $(\nu = 1,2,\ldots)$ l'integrale inferiore dell'equazione differenziale (2), dalla successione $\{g_\nu(x)\}$ se ne può estrarre una $\{g_{k_\nu}(x)\}$ convergente uniformemente in (a, b) verso un integrale $y_2(x)$ della (3).

---

[1]) Data l'equazione differenziale:

$$y' = \varphi(x, y), \tag{1}$$

con $\varphi(x, y)$ continua nella striscia σ, si dice che per essa, in un punto $P(\zeta, \eta)$ ha luogo il fenomeno di PEANO con un divario maggiore od eguale ad un numero positivo ε, se risulta:

$$\underset{a \leq x \leq b}{Max} \left| G(x; \zeta, \eta) - g(x; \zeta, \eta) \right| \geq \varepsilon,$$

avendo indicato con $G(x; \zeta, \eta)$ e $g(x; \zeta, \eta)$ rispettivamente l'integrale superiore ed inferiore della (1) passante per $P(\zeta, \eta)$.

[2]) G. SANSONE. *Equazioni differenziali nel campo reale*, Parte seconda, Zanichelli, Bologna, (1949), pp. 92-94.

Poichè per ipotesi è:

$$\underset{a \leq x \leq b}{Max} \left[G_\nu(x) - g_\nu(x) \right] \geq \varepsilon_r \qquad (\nu = 1,2,\ldots),$$

risulta anche:

$$\underset{a \leq x \leq b}{Max} \left[y_1(x) - y_2(x) \right] \geq \varepsilon_r$$

e ciò dimostra che per l'equazione differenziale (3) si verifica in P_n il fenomeno di Peano con un divario maggiore od uguale ad ε_r.

Il punto $Q_0(\lambda_0, \gamma_0)$ appartiene quindi all'insieme $E_n^{(r)}$ ad il nostro asserto è così dimostrato.

Dimostriamo ora che *l'insieme* E *è di misura lebesguiana nulla.*

A tale scopo, in virtù del teorema di Fubini-Tonelli sulla riduzione degli integrali doppi, basta osservare che l'insieme E ha su ogni retta parallela all'asse γ al più un numero finito od un'infinità numerabile di punti.

Ciò è d'immediata verifica. Infatti, per la supposta crescenza (decrescenza) di $\bar{f}(x, y, \lambda, \gamma)$ rispetto a γ, in base a un noto teorema di H. Nakano [1]), gli integrali dell'equazione $(\bar{a})$, per ogni λ fissato, sono univocamente determinati dal punto iniziale in tutti i punti della successione $\{P_n\}$ per tutti i valori di γ, ad eccezione al più di un numero finito o di una infinità numerabile di essi.

Ricordando la definizione di E possiamo quindi in definitiva asserire che gli integrali della $(\bar{a})$ sono univocamente determinati dal punto iniziale in tutti i punti dell'insieme $\{P_n\}$ per quasi tutte le coppie (λ, γ) di numeri reali.

Poichè gli integrali di un'equazione differenziale del primo ordine, a secondo membro continuo in una striscia σ, sono quasi ovunque in σ univocamente determinati dal punto iniziale, qualora lo siano in un insieme di punti ovunque denso in σ [2]), da quanto finora si è dimostrato segue ovviamente il teorema I enunciato in prefazione.

Per la dimostrazione del teorema II basta osservare che l'insieme E è intersecato da quasi tutte le rette del piano (λ, γ) parallele all'asse λ in insiemi di misura lineare nulla.

---

[1]) H. Nakano, *Ueber die verteilung der Peanoschen Punkte einer Differentialgleichung* $y' = f(x, y)$, Proc. Phys. Math. Soc. Japan, Serie 3, vol. XIV (1932), pp. 41-43. - Cfr. anche F. Cafiero, *Sul fenomeno di* Peano *nelle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine*, loc. cit.

[2]) Cfr. F. Cafiero, *Sul fenomeno di* Peano *nelle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine*, loc. cit.

Sulla classe delle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine, i cui punti di Peano costituiscono un insieme di misura lebesguiana nulla.

Nota del dott. **Federico Cafiero**, *presentata dal socio* **C. Miranda**

(Adunanza del dì 6 maggio 1950)

Sunto. — Si danno due teoremi relativi alla misura dell'insieme delle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine, i cui punti di Peano costituiscono un insieme di misura lebesguiana nulla.

È noto come la nozione d'integrale di Lebesgue possa essere introdotta in uno spazio astratto dove una misura è definita per gli insiemi di una famiglia completamente additiva [1]). Tale nozione, dovuta principalmente a J. Radon ed a M. Fréchet, ha dato luogo ad una suggestiva teoria dell'integrazione lebesguiana negli spazi astratti, che ha avuto una sistemazione definitiva per merito di S. Saks.

L'integrale di una funzione di punto di uno spazio astratto gode delle più importanti proprietà dell'integrale di Lebesgue, principalmente di quelle non legate alle proprietà metriche degli spazi euclidei. In particolare, in uno spazio astratto Σ, che sia il prodotto combinatorio di due spazi Σ_1 e Σ_2, può essere enunciato un teorema analogo a quello di Fubini sulla riduzione degli integrali doppi. Tale estensione del teorema di Fubini è basata sulla possibilità, segnalata per la prima volta da S. Ulam, di definire una misura nello spazio $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2$ mediante le misure date negli spazi fattori [2]).

In questa Nota do due teoremi relativi alla misura dell'insieme delle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine, i cui integrali sono quasi ovunque univocamente determinati dal punto iniziale.

---

[1]) Una famiglia F d'insiemi di punti di uno spazio astratto Σ dicesi completamente addittiva se:

j) L'insieme vuoto appartiene ad F.

jj) Il complementare C E *di un insieme* E *di F, appartiene ad F.*

jjj) La somma di un numero finito o di una infinità numerabile d'insiemi appartenenti alla famiglia F, è un insieme di F.

[2]) Per una trattazione approfondita della teoria lebesguiana negli spazi astratti, della quale daremo un breve cenno nel N. 1 di questo lavoro, e per una vasta bibliografia sull'argomento, cfr. S. Saks. *Theory of the Integral*, Monografie Matematyczne Komitet Redakcyjny, Tomo VII, Second Edition (1937), pp. 1-37. pp. 82-88.

I risultati cui pervengo, dei quali passo a dare un breve cenno, sono basati sull'osservazione di S. Ulam, nella forma ad essa data dal Saks, e costituiscono pertanto un'interessante applicazione, alle equazioni differenziali ordinarie, della teoria dell'integrazione lebesguiana negli spazi astratti.

Sia Σ lo spazio delle funzioni $f(x, y)$ continue in uno stesso rettangolo R. Esso può considerarsi, come sarà specificato nel N. 2, come il prodotto combinatorio di un suo sotto-spazio Σ_1 e dell'insieme Σ_2 dei numeri reali.

Introdotta nello spazio Σ_1 una misura μ definita per gli insiemi di una famiglia B completamente additiva, contenente tutti gli insiemi chiusi rispetto alla metrica lagrangiana, ed introdotta nello spazio Σ_2 la misura m secondo Lebesgue, come abbiamo già acccennato, nello spazio $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2$ può introdursi una misura μm definita per la più piccola famiglia completamente additiva contenente tutti gli insiemi prodotto $E \times E'$, dove E è un insieme di Σ_1, appartenente a B ed E' è un insieme di Σ_2 misurabile secondo Lebesgue.

Orbene, comunque s'introduca nello spazio Σ_1 la misura μ, definita per gli insiemi della famiglia B, sussiste il seguente:

Teorema I. — *Tutti i punti dello spazio* $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2$, *eccettuati quelli di un insieme di misura* (μm) *nulla, sono immagini di equazioni differenziali, i cui integrali sono, quasi ovunque in* R, *univocamente determinati dal punto iniziale.*

Da tale teorema deduco quindi il seguente:

Teorema II. — *Per ogni numero reale* λ, *non appartenente ad un insieme* I *di misura lebesguiana nulla, si può determinare un insieme* A *di* Σ_1 *di misura* μ *nulla, tale che, se* $f(x, y)$ *è un punto di* Σ_1 *non appartenente ad* A, *gli integrali dell'equazione differenziale:*

$$y' = f(x, y) + \lambda ,$$

sono quasi ovunque in R *univocamente determinati dal punto iniziale.*

Particolareggiando nello spazio Σ_1 la misura μ, la proposizione ora enunciata può dar luogo a nuovi risultati relativi alle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine.

1. — Per maggior chiarezza premettiamo alcuni cenni sulla nozione d'integrale negli spazi astratti.

Sia F una famiglia completamente additiva d'insiemi di uno spazio astratto Σ_1. Gli insiemi della famiglia F diconsi *misurabili* (F) o semplicemente insiemi (F).

Una funzione d'insieme $\mu(\Gamma)$ definita per ogni insieme Γ misurabile (F) dicesi una *misura* (F) se soddisfa alle seguenti condizioni:

i) La funzione $\mu(\Gamma)$ *è non negativa.*

ii) Dato un numero finito od un'infinità numerabile d'insiemi Γ_n *misurabili* (F)*, a due a due privi di punti in comune, risulta:*

$$\mu\left(\sum_n \Gamma_n\right) = \sum_n \mu(\Gamma_n)$$

Per ogni insieme Γ misurabile (F), il numero $\mu(\Gamma)$ si dice la *misura* (μ) di Γ.

Una funzione $f(X)$ di punto dello spazio Σ_1, definita in un insieme E, si dice *misurabile* (F) se l'insieme E è misurabile (F) e se, per ogni numero reale a, anche l'insieme dei punti X di E in cui $f(X) > a$ è misurabile (F).

Data una funzione non negativa $f(X)$ misurabile (F) in un insieme E, dicesi *integrale definito* (F, μ) *di* $f(X)$ *su* E, e si indica col simbolo:

$$(F)\int_E f(X)\, d\mu(X),$$

l'estremo superiore della somma:

$$\sum_{k=1}^{n} v_k\, \mu(E_k),$$

dove $\{E_k\}$ è un'arbitraria famiglia finita d'insiemi (F) soddisfacenti alla condizione:

$$E = E_1 + E_2 + \ldots + E_n, \quad E_i E_k = 0 \text{ per } i \neq k \qquad (k, i = 1,2,\ldots n)$$

e dove v_k $(k = 1,2,\ldots n)$ denota l'estremo inferiore di $f(X)$ su E_k.

Se l'integrale (F, μ) di $f(X)$ su E è finito, si dice che la funzione $f(X)$ è ***integrabile*** (F, μ).

Poichè non necessaria per la trattazione delle questioni che formano l'argomento di questa Nota, ometttiamo di riportare la definizione d'integrale definito (F, μ) per un'arbitraria funzione misurabile (F), passando a dare brevi cenni sulla possibilità di definire una misura negli spazi prodotto mediante le misure date negli spazi fattori.

Dati due spazi astratti Σ_1 e Σ_2 si denota con $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ l'insieme delle coppie di elementi (X, Y) per $X \in \Sigma_1$ ed $Y \in \Sigma_2$.

Lo spazio $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ è chiamato *prodotto combinatorio o cartesiano* degli spazi Σ_1 e Σ_2.

Date le famiglie F e G, completamente additive d'insiemi degli spazi Σ_1 e Σ_2 rispettivamente, si indica con $F\,G$ la più piccola famiglia comple

tamente additiva d'insiemi dello spazio $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ contenente tutti gli insiemi prodotto $E \times E'$ dove $E \subset F$ ed $E' \subset G$.

Introduciamo nello spazio Σ_1 una misura μ e nello spazio Σ_2 una misura m, in modo che sia soddisfatta la seguente ulteriore condizione:

iii) È possibile determinare le successioni d'insiemi $\{\Gamma_n^{(1)}\}$ *e* $\{\Gamma_n^{(2)}\}$, *rispettivamente di* F *e* G, *in modo da aversi:*

$$\Sigma_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n^{(1)}, \quad \Sigma_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n^{(2)}$$

$$\mu(\Gamma_n^{(1)}) < +\infty, \quad m(\Gamma_n^{(2)}) < +\infty \qquad (n = 1,2,\ldots).$$

Sussiste allora il seguente teorema:

Per ogni insieme $Q \subset \Sigma_1 \times \Sigma_2$ *misurabile* $(F\,G)$ *le funzioni:*

$$\mu\left\{\underset{X}{E}[(X,Y) \subset Q]\right\}, \quad m\left\{\underset{Y}{E}[(X,Y) \subset Q]\right\}^{1})$$

sono misurabili rispettivamente (G) *ed* (F) *è risulta:*

$$(G)\int_{\Sigma_2} \mu\left\{\underset{X}{E}[(X,Y) \subset Q]\right\} dm(Y) = (F)\int_{\Sigma_1} m\left\{\underset{Y}{E}[(X,Y) \subset Q]\right\} d\mu(X).$$

Data quindi una coppia di misure μ ed m, definite rispettivamente per gli insiemi misurabili (F) e misurabili (G), soddisfacenti alla ulteriore condizione *iii)*, il precedente teorema permette di definire una misura, detta μm, per gli insiemi di $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ misurabili $(F\,G)$ ponendo:

$$\mu m(Q) = (G)\int_{\Sigma_2} \mu\left\{\underset{X}{E}[(X,Y) \subset Q]\right\} dm(Y) = (F)\int_{\Sigma_1} m\left\{\underset{Y}{E}[(X,Y) \subset Q]\right\} d\mu(X).$$

È immediato verificare che in particolare risulta:

$$\mu m(E_1 \times E_2) = \mu(E_1)\, m(E_2)$$

per ogni coppia d'insiemi $E_1 \subset F$ ed $E_2 \subset G$.

---

[1]) Col simbolo:

$$\underset{X}{E}[(X,Y) \subset Q]$$

indichiamo l'insieme delle ascisse dei punti dell'insieme Q di ordinata Y.

Analogo significato si attribuisce al simbolo:

$$\underset{Y}{E}[(X,Y) \subset Q],$$

2. — Sia Σ lo spazio delle funzioni continue nel rettangolo:

$$R : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d$$

ed indichiamo con Σ_1 il suo sotto-spazio costituito *dalle funzioni* $f(x, y)$ *continue in* R *ed assumenti in un fissato punto* $\overline{P}(\overline{x}, \overline{y})$ *di* R *un valore fissato* k. È ovvio allora che ogni elemento Z di Σ individua in modo univoco un elemento X di Σ_1 ed un numero reale Y tali che:

$$Z = X + Y.$$

Reciprocamente ogni coppia di elementi (X, Y), dove X è un punto di Σ_1 ed Y un numero reale, individua l'elemento $Z = X + Y$ di Σ.

Posto allora:

$$(X, Y) \equiv X + Y$$

ed indicato con Σ_2 l'insieme dei numeri reali, lo spazio Σ può considerarsi come il prodotto cartesiano dello spazio Σ_1 e dello spazio Σ_2.

Introdotta nello spazio Σ_1 la metrica lagrangiana e nello spazio Σ_2 quella ordinaria, introduciamo nello spazio prodotto $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ una metrica definendo la distanza $|Z_1 - Z_2|$ di due suoi punti $Z_1 \equiv (X_1, Y_1)$ e $Z_2 \equiv (X_2, Y_2)$ mediante la formula:

$$|Z_1 - Z_2| = \sqrt{|X_1 - X_2|^2 + |Y_1 - Y_2|^2},$$

dove con $|X_1 - X_2|$ e $|Y_1 - Y_2|$ abbiamo indicato la distanza rispettivamente dei punti X_1 ed X_2 nello spazio Σ_1 e dei punti Y_1 ed Y_2 nello spazio Σ_2.

Adottando una dizione ormai d'uso comune, noi chiameremo Σ_1 e Σ_2 gli *assi* dello spazio Σ ed X ed Y *le coordinate*, rispettivamente *ascissa* ed *ordinata*, del punto (X, Y).

Diremo poi *proiezione* di un insieme A di Σ sull'asse Σ_1 [Σ_2] l'insieme delle ascisse [ordinate] dei punti di A.

Notiamo che per la metrica introdotta nello spazio $\Sigma_1 \times \Sigma_2$, la convergenza di una successione $\{Z_n\}$ di suoi punti verso un punto Z, porta come conseguenza la convergenza della successione $\{X_n\}$ delle ascisse verso l'ascissa X di Z, nonchè la convergenza della successione $\{Y_n\}$ delle ordinate verso l'ordinata Y di Z.

Inversamente, se la successione $\{X_n\}$ di punti di Σ_1 converge verso il punto X e la successione $\{Y_n\}$ converge verso il punto Y, la successione $\{Z_n \equiv (X_n, Y_n)\}$ converge verso $Z \equiv (X, Y)$.

Osserviamo infine, poichè ci sarà utile nel numero seguente, che lo spazio $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ è separabile e cioè che può costruirsi un insieme numerabile di suoi punti denso in esso.

A tale scopo, indicato con $\{P_n(x,y)\}$ l'insieme dei polinomi in due variabili, a coefficienti razionali, poniamo:

$$\overline{P}_n(x,y) = P_n(x,y) - [P_n(\bar{x},\bar{y}) - k] \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Essendo:

$$\overline{P}_n(\bar{x},\bar{y}) = k \qquad (n=1,2,\ldots),$$

l'insieme A_1 dei polinomi $\{\overline{P}_n(x,y)\}$ appartiene a Σ_1

Orbene, è facile far vedere che tale insieme A_1 costituisce una base per lo spazio Σ_1.

Infatti, detto $f(x,y)$ un punto di Σ_1, per un notissimo teorema di WEIERSTRASS, si può determinare una successione $\{P_{h_n}(x,y)\}$ estratta dalla successione $\{P_n(x,y)\}$, convergente uniformemente in R verso $f(x,y)$. Ma allora, essendo $f(\bar{x},\bar{y}) = k$, è evidente che anche la successione $\{\overline{P}_{h_n}(x,y)\}$ converge verso $f(x,y)$ e che la convergenza è uniforme in R.

Infine, fissata come base dello spazio Σ_2 l'insieme A_2 dei numeri razionali, è ovvio che l'insieme prodotto $A_1 \times A_2$ costituisce una base dello spazio $\Sigma_1 \times \Sigma_1$.

3. — Indichiamo con B una famiglia completamente additiva d'insiemi di Σ_1 contenente tutti gli insiemi chiusi ed introduciamo nello spazio Σ_1 una misura (B) mediante una funzione d'insieme $\mu(\Gamma)$ soddisfacente anche alla condizione *iii*).

Nello spazio Σ_2 introduciamo la misura m secondo LEBESGUE ed indichiamo con L la famiglia degli insiemi misurabili secondo LEBESGUE.

Poichè la misura m secondo LEBESGUE soddisfa alla condizione *iii*), nello spazio $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ può introdursi la misura $(\mu\, m)$ definita per tutti gli insiemi appartenenti alla più piccola famiglia completamente additiva di insiemi del detto spazio contenenti gli insiemi prodotto $E \times E'$ dove $E \subset B$ ed $E' \subset L$.

Ciò posto, dimostriamo la seguente proposizione essenziale per gli scopi propostici:

a) Gli insiemi aperti dello spazio $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ sono insiemi misurabili (BL).

A tale scopo premettiamo alcune semplici considerazioni.

Detto X_0 un punto di Σ_1 ed Y_0 un punto di Σ_2, indichiamo con $I_1(X_0,\rho)$ ed $I_2(Y_0,\rho)$ rispettivamente l'intorno chiuso di X_0 e l'intorno chiuso di Y_0 di raggio ρ.

Per semplicità di linguaggio, l'insieme:

$$I_1(X_0,\rho) \times I_2(Y_0,\rho)$$

sarà detto *intorno elementare chiuso del punto* $Z_0 \equiv (X_0, Y_0)$ *di semidimensione* ρ e sarà indicato col simbolo $I[Z_0,\rho]$.

Ciò posto osserviamo che, *fissata una successione* $\{\varepsilon_r\}$ *di numeri positivi, tendente a zero, per ogni punto* Z_0 *di un insieme aperto* E *di* $\Sigma_1 \times \Sigma_2$, *può determinarsi un* ε_k *di* $\{\varepsilon_r\}$ *ed un punto* Z_h *della base di* $\Sigma_1 \times \Sigma_2$, *in modo tale che l'intorno elementare chiuso di* Z_h, *di semidimensione* ε_k, *sia contenuto in* E *e contenga* Z_0.

Sia infatti $C(Z_0, \rho)$ un intorno chiuso di Z_0 appartenente ad E.

Detto ε_k un elemento della successione $\{\varepsilon_r\}$ soddisfacente alla limitazione:

$$(1) \qquad \varepsilon_k < \frac{\rho}{2\sqrt{2}},$$

indichiamo con Z_h un punto della base di $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ tale che:

$$(2) \qquad |Z_h - Z_0| \leq \varepsilon_k.$$

È allora immediato verificare che l'intorno elementare chiuso, $I[Z_h, \varepsilon_k]$, di Z_h, contenente per la (2) il punto Z_0, è contenuto in E. Basta a tale scopo osservare che per la (2) l'intorno chiuso, $C\left(Z_h, \frac{\rho}{2}\right)$, di Z_h di raggio $\frac{\rho}{2}$ è contenuto in $C(Z_0, \rho)$ e che per la (1) risulta:

$$I[Z_h, \varepsilon_k] \subset C\left(Z_h, \frac{\rho}{2}\right).$$

Siamo ora in grado di dimostrare, con considerazioni pressocchè immediate, la proposizione *a*) enunciata all'inizio di questo numero.

A tale scopo, detto $\{Z_n\}$ l'insieme dei punti base di $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ contenuti in E e fissata la successione $\{\varepsilon_r\}$, indichiamo con T_1 l'insieme, finito o numerabile, degli elementi della successione $\{Z_n\}$ i cui intorni elementari chiusi di semidimensione ε_1 sono contenuti in E, con T_2 l'insieme, finito o numerabile, degli elementi della successione $\{Z_n\}$, non appartenenti a T_1, i cui intorni elementari chiusi di semidimensione ε_2 sono contenuti in E, e così via.

Con tale procedimento, ad ogni punto della successione $\{Z_n\}$ viene associato un suo intorno elementare chiuso contenuto in E, ed è ovvio, per l'osservazione prima fatta, che la somma di tali intorni è l'insieme E stesso.

Il nostro asserto è così dimostrato.

Notiamo che, essendo la famiglia BL completamente additiva, dalla proposizione *a*) discende:

Gli insiemi chiusi di $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ *sono misurabili* (BL).

4 — Per ogni punto $Z \equiv f(x, y)$ di Σ può considerarsi l'equazione differenziale:

$$(a) \qquad y' = f(x, y)$$

oppure l'equazione:

$$(\bar{a}) \qquad y' = \bar{f}(x, y),$$

dove:

$$\bar{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) \text{ per } (x, y) \subset R \\ f(x, a) \text{ per } x < c \\ f(x, d) \text{ per } x > d. \end{cases}$$

Esprimeremo ciò dicendo brevemente che il punto Z è l'*immagine* della equazione differenziale (a) $[(\bar{a})]$, oppure che l'equazione (a) $[(\bar{a})]$ ha per *immagine* il punto Z.

Intenderemo inoltre riferirci ad equazioni del tipo (a) ogni qual volta ometteremo di specificare il tipo di equazione differenziale che vogliamo prendere in esame.

Ciò posto, sia $\{P_n\}$ un insieme numerabile di punti della striscia $S: a \leq x \leq b, -\infty < y < +\infty$, ivi ovunque denso, ad esempio l'insieme dei punti razionali di S.

Indichiamo con H l'insieme dei punti dello spazio Σ immagini di equazioni differenziali $(\bar{a})$, per le quali il fenomeno di Peano si verifica in qualche punto della seccessione $\{P_n\}$.

Orbene, ci proponiamo di dimostrare che:

L'insieme H è misurabile $(B\,L)$.

A tale scopo indichiamo con H_n $(n = 1,2,\ldots)$ l'insieme dei punti dello spazio Σ immagini di equazioni differenziali $(\bar{a})$ per le quali il fenomeno di Peano si verifica in P_n.

Si ha ovviamente:

$$H = H_1 + H_2 + \ldots + H_n + \ldots$$

Pigliamo in esame l'insieme H_n e, fissata una successione decrescente $\{\varepsilon_r\}$ di numeri positivi, tendente a zero, indichiamo con $H_n^{(r)}$ il sotto-insieme di H_n costituito dai punti di H_n immagini di equazioni differenziali del tipo $(\bar{a})$, per le quali il fenomeno di Peano si verifica in P_n con un divario maggiore od eguale ad ε_r [1]).

---

[1]) Si dice che per l'equazione differenziale $(\bar{a})$ ha luogo, in un punto P di S, il fenomeno di Peano con un *divario* maggiore od uguale ad un numero positivo ε, se risulta:

$$\underset{a \leq x \leq b}{Max} [G(x) - g(x)] \geq \varepsilon,$$

Si ha ovviamente:

$$H_n = H_n^{(1)} + H_n^{(2)} + \ldots + H_n^{(r)} + \ldots \qquad (n = 1,2,\ldots).$$

Per dimostrare il nostro asserto basta allora far vedere che $H_n^{(r)}$ $(n = 1,2,\ldots;\ r = 1,2,\ldots)$ è chiuso.

Sia infatti $f_0(x,y)$ un punto di accumulazione di $H_n^{(r)}$ ed indichiamo con $\{f_\nu(x,y)\}$ una successione di punti di $H_n^{(r)}$ convergente verso $f_0(x,y)$.

Per la metrica introdotta in $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2$ la convergenza della successione $\{f_\nu(x,y)\}$ è uniforme e quindi tale è anche la convergenza della successione $\{\overline{f}_\nu(x,y)\}$ verso $\overline{f}_0(x,y)$.

Indichiamo con $G_\nu(x)$ e $g_\nu(x)$ $(\nu = 1,2,\ldots)$ rispettivamente l'integrale superiore e l'integrale inferiore dell'equazione:

$$y' = \overline{f}_\nu(x,y) \qquad (\nu = 1,2,\ldots)$$

passanti per H_n.

Com'è noto [1]), nelle nostre ipotesi, dalla succesione $\{G_\nu(x)\}$ $[\{g_\nu(x)\}]$ può estrarsi una successione convergente uniformemente verso un integrale $y_1(x)$ $[y_2(x)]$, passante per P_n, dell'equazione:

$$(3) \qquad y' = \overline{f}_0(x,y).$$

Poichè per ipotesi:

$$\underset{a \le x \le b}{Max}\,[G_\nu(x) - g_\nu(x)] \ge \varepsilon_r \qquad (\nu = 1,2,\ldots),$$

risulta ovviamente:

$$\underset{a \le x \le b}{Max}\,[y_1(x) - y_2(x)] \ge \varepsilon_r$$

e ciò dimostra che anche per l'equazione differenziale (3) si verifica in P_n il fenomeno di Peano con un divario maggiore od eguale ad ε_r.

L'insieme $H_n^{(r)}$ risulta quindi chiuso ed il nostro asserto è così dimostrato.

---

avendo indicato con $G(x)$ e $g(x)$ rispettivamente l'integrale superiore ed inferiore della $(\bar{a})$ passante per P.

Cfr. F. Cafiero, *Sul fenomeno di Peano nelle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine*, Rend. Acc. Sc. fis. e mat., Napoli, S. 4ª, vol. XVII, 1950.

[1]) G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Parte seconda, Zanichelli Bologna (1949), pp. 92-94.

5. — Abbiamo nel numero precedente osservato che l'insieme H è misurabile $(B\,L)$, vogliamo ora dimostrare che:

L'insieme H *è di misura* (μ m) *nulla.*

A tale scopo osserviamo che:

L'insieme:

$$(4) \qquad \underset{Y}{E}\,[(X,\,Y) \in H]$$

è, per ogni X *appartenente alla proiezione,* H_X, di H *sull'asse* Σ_1. *costituito da un numero finito o da un'infinità numerabile di punti di* Σ_2.

Detto infatti:

$$X \equiv \varphi\,(x,\,y)$$

un punto di H_X, i punti di H di ascissa X sono dati da:

$$\varphi\,(x,\,y) + Y$$

al variare di Y nell'insieme (4), che, ricordiamo, è costituito da numeri reali.

Per la definizione di H, l'equazione differenziale, del tipo $(\bar{a})$, che ha per immagine il punto $Z \equiv (X,\,Y)$:

$$y' = \varphi\,(x,\,y) + Y,$$

deve, per ogni Y dell'insieme (4) ammettere il fenomeno di Peano almeno in un punto della successione $\{P_n\}$.

Per dimostrare quanto asserito basta allora osservare che, in virtù di un noto teorema [1]), gli integrali dell'equazione differenziale:

$$y' = \varphi\,(x,\,y) + \lambda \qquad (-\infty < \lambda < +\infty)$$

sono univocamente determinati dal punto iniziale in ogni punto della successione $\{P_n\}$ per tutti i valori di λ, eccettuato al più un numero finito od un'infinità numerabile di essi.

Dalle considerazioni fin qui svolte segue:

$$(5) \qquad m\left\{\underset{Y}{E}\,[(X,\,Y) \in H]\right\} = 0$$

per ogni X di H_X.

---

[1]) H. Nakano. *Ueber die verteilung der Peanoschen Punkte Differentialgleichung* $y' = f(x,\,y)$, Proc. Phys-Math. Soc. Japan., S. 3ª, vol. XIV (1932). pp. 41-43, cfr. anche lav. cit. di F. Capiero.

È quindi immediato verificare che l'insieme H è di misura $(\mu\, m)$ nulla. Per la misura $(\mu\, m)$ di tale insieme si ha infatti:

$$(6)\quad \mu\, m(H) = (B)\int_{\Sigma_1} m\left\{E_Y[(X,Y)\subset H]\right\} d\mu(X) = (L)\int_{\Sigma_2} \mu\left\{E_X[(X,Y)\subset H]\right\} dm(Y)$$

ed il primo integrale è ovviamente nullo per la (5).

Possiamo quindi asserire che *tutti i punti dello spazio* $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$, *eccettuati quelli di un insieme di misura* $(\mu\, m)$ *nulla, sono immagini di equazioni differenziali* $(\bar{a})$ *i cui integrali sono univocamente determinati dal punto iniziale in tutti i punti dell'insieme* $\{P_n\}$ *di* S, *ivi ovunque denso.*

Poichè, com'è noto [1]), *gli integrali di un'equazione differenziale*:

$$y' = f(x, y),$$

con $f(x, y)$ *continua e limitata in* S, *sono quasi ovunque in* S *univocamente determinati dal punto iniziale, qualora lo siano in un insieme di punti di* S, *ivi ovunque denso*, il teorema I enunciato in prefazione è dimostrato.

Osserviamo che, essendo $\mu\, m(H) = 0$, per la (6) risulta:

$$(L)\int_{\Sigma_2} \mu\left\{E_X[(X,Y)\subset H]\right\} dm(Y) = 0$$

e da ciò segue:

$$\mu\left\{E_X[(X,Y)\subset H]\right\} = 0$$

per tutti i punti dello spazio Σ_2 ad eccezione di quelli di un insieme I di misura lebesguiana nulla.

Da tale osservazione discende in modo ovvio il teorema II enunciato in prefazione.

---

[1]) F. Cafiero, *Sul fenomeno di Peano nelle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine*, loc. cit.

Sulla maggiorazione dell'errore di approssimazione nei procedimenti di integrazione numerica delle equazioni della Fisica matematica [1])

Nota del prof. **Gaetano Fichera,** *presentata dal socio* **M. Picone**

(Adunanza del dì 6 maggio 1950)

Sunto. — Si dimostrano formole di maggiorazione di tipo globale, valevoli per le soluzioni delle equazioni e derivate parziali lineari della Fisica matematica e da queste si deduce una maggiorazione per l'errore d'approssimazione commesso impiegando taluni metodi per il calcolo numerico delle dette soluzioni.

Scopo della presente Nota è far conoscere un procedimento, di pratica applicazione, mediante il quale è possibile maggiorare l'errore di approssimazione nel calcolo numerico delle soluzioni dei problemi al contorno della Fisica matematica secondo i metodi in uso nell'Istituto nazionale per le applicazioni del calcolo.

Per fissare le idee, esporrò il procedimento in questione riferendomi ad un ben determinato problema al contorno, e, dato che, dal punto di vista concettuale, il metodo è sempre lo stesso, onde evitare inutili complicazioni formali, considererò dapprima uno dei casi più semplici, e cioè il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace $\Delta_2 u = 0$ in uno spazio euclideo a tre dimensioni. Sussiste il seguente teorema:

I. — *Il funzionale*

$$I[u] = \frac{\int_D u^2 \, dT}{\int_{FD} u^2 \, d\sigma}$$

è limitato nella classe Γ *delle funzioni armoniche e biregolari* [2]) *nel dominio regolare e limitato* D.

Introdotta la funzione di Green $G(P, Q)$ del problema di Dirichlet relativa al dominio D, si ha per ogni punto P interno a D

$$u(P) = \int_{FD} u(Q) \frac{d}{dn_Q} G(P, Q) \, d_Q\sigma$$

---

[1]) Lavoro eseguito nell'Istituto nazionale per le applicazioni del calcolo.

[2]) Cfr. M. Picone, *Appunti di Analisi superiore*, Rondinella, Napoli, 1940, pag. 49.

e quindi, tenendo presente che

$$(1) \qquad \left| \frac{d}{dn_Q} G(P, Q) \right| < \frac{A}{\overline{PQ}^2}$$

con A costante, si trae:

$$\int_D u^2 \, dT = \int_D d_P T \int_{FD} u(Q) \frac{d}{dn_Q} G(P, Q) \, d_Q\sigma \int_{FD} u(M) \frac{d}{dn_M} G(P, M) \, d_M\sigma =$$

$$= \int_{FD} \int_{FD} H(Q, M) \, u(Q) \, u(M) \, d_Q\sigma ,$$

avendo posto

$$H(Q, M) = \int_D \frac{d}{dn_Q} G(P, Q) \frac{d}{dn_M} G(P, M) \, d_P T$$

Ne segue per la (1)

$$| H(Q, M) | < \frac{B}{\overline{QM}}$$

con B costante. Sarà allora, dette C ed E costanti opportune

$$\left[\int_D u^2 \, dT \right]^2 \leq \left\{ B \int_{FD} \int_{FD} \frac{1}{\overline{QM}} \, | u(Q) | \, | u(M) | \, d_Q\sigma \, d_M\sigma \right\}^2 \leq$$

$$\leq B^2 \int_{FD} [u(Q)]^2 \, d_Q\sigma \int_{FD} \left[\int_{FD} | u(M) | \frac{d_M\sigma}{\overline{QM}} \right]^2 d_Q\sigma \leq$$

$$\leq B^2 \int_{FD} u^2 \, d\sigma \int_{FD} \int_{FD} C \log \frac{C}{\overline{QM}} \, | u(Q) | \, | u(M) | \, d_Q\sigma \, d_M\sigma \leq E \left[\int_{FD} u^2 \, d\sigma \right]^2$$

e quindi la tesi.

Dal teorema I segue che se u è continua in D ed armonica in D-FD poichè essa può ottenersi come limite di una successione di funzioni armoniche e biregolari in D uniformemente convergente in tutto D [1]), per essa sussiste la seguente maggiorazione globale

$$(2) \qquad \int_D u^2 \, dT \leq K \int_{FD} u^2 \, d\sigma$$

avendo indicato con K l'estremo superiore di $I[u]$ in Γ.

---

[1]) Cfr. G. Fichera, *Applicazioni della teoria del potenziale di superficie ad alcuni problemi di analisi funzionale lineare*, Giorn. Mat. Battaglini, 78, 1948, 71-78.

Naturalmente per le applicazioni pratiche occorrerà conoscere numericamente K. A tal scopo si consideri il sistema $\{v_i\}$ di particolari funzioni armoniche già introdotto in altri lavori [1]) e che se D è limitato da un'unica superficie si riduce a quello dei polinomi armonici omogenei. Sussiste il seguente teorema

II. — *Detto* K_n *il massimo della funzione delle* n *variabili* $c_1, c_2, \ldots c_n$

$$F_n(c_1, c_2, \ldots, c_n) = I[c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n]$$

si ha

$$\lim_{n \to \infty} K_n = K. \tag{3}$$

Sia $\{u_n\}$ una successione di funzioni di Γ tale che

$$I[u_n] > K - \frac{1}{n}$$

È possibile determinare una successione $\{w_n^{(p)}\}$ di cui ogni termine è una combinazione di un numero finito di funzioni del sistema $\{v_i\}$ e tale che riesca uniformemente in D

$$\lim_{p \to \infty} w_n^{(p)} = u_n.$$

Poichè si ha:

$$\lim_{p \to \infty} I[w_n^{(p)}] = I[u_n],$$

può assumersi $p = p_n$ in modo che sia

$$I[w_n^{(p_n)}] > K - \frac{1}{n}.$$

Supposto che $w_n^{(p_n)}$ sia una combinazione delle prime q_n funzioni di

---

[1]) G. Fichera, loc. cit. (1), pag. 3.

$\{v_i\}$ si ha:

$$K_{q_n} \geq I[w_n^{(P_n)}] > K - \frac{1}{n}.$$

ciò che dimostra, essendo K_n non decrescente, la (3).

Supposto che si voglia calcolare la soluzione del problema di DIRICHLET con assegnato $u = f$ su FD, uno dei procedimenti di calcolo della u consiste nell'assumere

$$u_n = \sum_{h=1}^{n} c_h^{(n)} v_h$$

come n-esima approssimazione della u, essendo le $c_h^{(n)}$ determinate dalla condizione

$$\mu_n = \int_{FD} [f - \sum_{h=1}^{n} c_h^{(n)} v_h]^2 \, ds = \text{minimum}$$

Poichè — com'è noto — $\lim_{n \to \infty} \mu_n = 0$, della (2) segue che u_n converge in media in D verso la u e, quindi, uniformemente con tutte le derivate parziali nell'interno di D.

Detto P un punto interno a D e indicata con $\rho(P)$ la distanza di P da FD è noto che si ha

$$(4) \qquad |u(P)|^2 \leq \frac{3}{4\pi [\rho(P)]^3} \int_D |u|^2 \, dT$$

Si ottiene così la seguente formola di maggiorazione dell'errore puntuale di approssimazione

$$(5) \qquad |u(P) - u_n(P)| \leq \left(\frac{3K}{4\pi [\rho(P)]^3}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int [f - u_n]^2 \, ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

D'altra parte poichè sussistono formole del tipo seguente

$$\left| \left[\frac{\partial^m u}{\partial x_1^{s_1} \partial x_2^{s_2} \partial x_3^{s_3}} \right]_P \right|^2 \leq g(P) \int_D u^2 \, dT$$

con $g(P)$ nota funzione del punto P [1]), si ottengono anche formole di mag-

---

[1]) Cfr. M. PICONE, *Teoremi di media caratteristici per le soluzioni di talune equazioni alle derivate parziali*, Rend. Circ. mat. Palermo, Tomo LI, 1927.

giorazione per l'errore puntuale di approssimazione di una derivata di ordine comunque elevato della u.

La (2) può anche essere impiegata — dopo le considerazioni che verrò a fare — nella valutazione dell'errore di approssimazione in un altro metodo di calcolo. Occorre premettere il seguente teorema.

III. — *Indicata con* Γ_0 *la classe delle funzioni armoniche e biregolari in* D, *aventi valor medio nullo su* FD, *il funzionale*

$$I[u] = \frac{\int_D |\operatorname{grad} u|^2 \, dT}{\int_{FD} u^2 \, ds}$$

ha estremo inferiore positivo in Γ_0.

Diciamo $N(P,Q)$ la funzione di GREEN per il problema di NEUMANN relativo al dominio D [1]).

Ogni funzione di Γ_0 può rappresentarsi in D al modo seguente

$$u(P) = -\int_{FD} \varphi(Q) \, N(P, Q) \, d_Q\sigma ,$$

avendo posto

$$\varphi(Q) = \frac{du}{dn} \quad (n \text{ normale interna a } D \text{ su } FD).$$

Poichè si ha

$$\int_D |\operatorname{grad} u|^2 \, dT = -\int_{FD} u \frac{du}{dn} \, d\sigma ,$$

ne viene

$$I[u] = \frac{\int_{FD}\int_{FD} N(M, Q) \, \varphi(M) \, \varphi(Q) \, d_Q\sigma \, d_M\sigma}{\int_{FD} \left[\int_{FD} N(M, Q) \, \varphi(Q) \, d_Q\sigma\right]^2 d_M\sigma}$$

---

[1]) La $N(P, Q)$ è la funzione armonica di Q che su FD verifica la condizione

$$\frac{d}{dn_Q} N(P, Q) = -\frac{1}{4\pi} \frac{d}{dn_Q} \frac{1}{\overline{PQ}} + \frac{1}{\text{mis } FD} .$$

È ben noto che un funzionale siffatto ha estremo inferiore $q > 0$.
Dal teorema dimostrato segue

$$\int_{FD} u^2\, ds \leq \frac{1}{q} \int_D |\operatorname{grad} u|^2 dT. \tag{7}$$

Per il calcolo di q sussiste un teorema analogo al II.
Si consideri ora il metodo di calcolo della u che consiste nel porre

$$u_n = c_0^{(n)} + \sum_{h=1}^{n} c_h^{(n)} v_h,$$

essendo le $c_h^{(n)}$ — ammesso che dal sistema $\{v_i\}$ si sia esclusa la costante — determinate dalla condizione

$$\sum_{h=1}^{n} c_h^{(n)} \int_{FD} \frac{dv_h}{dn} v_i\, ds = \int_{FD} f \frac{dv_i}{dn} ds \qquad (i = 1,2, \ldots n) \tag{8}$$

$$\int_{FD} (f - u_n)\, ds = 0$$

Si dimostra che le (8) equivalgono alla condizione

$$\int_D [\operatorname{grad} u - \sum_{h=1}^{n} c_h^{(n)} \operatorname{grad} v_h]^2\, dT = \text{minimum}$$

e che riesce

$$\lim_{n \to \infty} \mu_n = 0 \text{ [1]}$$

Dalle (7), (2) segue che la successione u_n converge in media su FD come pure in D, sussistendo la (5) per la maggiorazione dell'errore puntuale di approssimazione.

Credo ormai sia ovvio in qual modo si estendano le cose dette nel caso di altri tipi di equazioni o di sistemi di equazioni e di altri tipi di condizioni al contorno.

Ad esempio, se si considera il sistema di equazioni relativo all'equilibrio di un solido elastico, sistema che, sotto forma vettoriale, si scrive

[1]) Cfr. G. Fichera, *Sull' esisteuza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno relativi all' equilibrio di un corpo elastico*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1950.

al modo seguente, detto U il vettore spostamento

$$\Delta_2 U + k \operatorname{grad} div\, U = 0 \qquad \left(k > \frac{1}{3}\right) \tag{9}$$

e si considera il problema al contorno che consiste nell'assegnare su una parte F_1D di FD il vettore U e sulla restante parte F_2D il vettore

$$L[U] = (k-1)\, div\, U\, \nu + 2\frac{dU}{d\nu} + (\nu \wedge rot\, U)$$

(ν indica il versore normale a FD) cioè la forza superficiale che agisce sul solido, si ottiene la seguente estensione dei teoremi I e II.

IV. — *Il funzionale*

$$I[U] = \frac{\displaystyle\int_D |U|^2\, dT}{\displaystyle\int_{F_1D} |U|^2\, d\sigma + \int_{F_2D} |L[U]|^2\, d\sigma}$$

è limitato superiormente nella classe dei vettori soluzioni di (9) *e biregolari in* D.

Detto $\{V_i\}$ *un sistema completo di soluzioni particolari di* (9) [1]) *e detto* K *l'estremo superiore di* I[U] *e* K_n *il massimo della funzione*

$$F_n(c_1, c_2, \ldots, c_n) = I\left[\sum_{i=1}^{n} c_i V_i\right]$$

si ha

$$K = \lim_{n \to \infty} K_n$$

In modo analogo si estenda il teor. III basta sostituire grad u con il potenziale $\Pi[U]$ delle deformazioni elastiche.

Teoremi analoghi sussistono per le equazioni $\Delta_4 u = 0$ o in generale $\Delta_{2n} u = 0$ e per i corrispondenti problemi al contorno. Per le soluzioni di tali equazioni sussistono formole analoghe alla (4), che permettono di pas-

---

[1]) La frase « sistema completo di soluzioni » va intesa nel senso specificato nel cap. III di loc. cit. (1), pag. 6.

sare dalle maggiorazioni globali alle puntuali [1]. La formola (4) è altresì estendibile alla equazione generale del secondo ordine di tipo ellittico [2]).

Qualora in un dato punto P_0 interno a D occorresse una maggiorazione più stretta di quella fornita dalla (5), alla costante che moltiplica $\left(\int_{FD} |f - u_n|^2 \, ds\right)^{\frac{1}{2}}$ può sostituirsi l'esterno superiore — in virtù della (4), certamente finito — del funzionale

$$I_{P_0}[u] = \frac{|u(B)|^2}{\int_{FD} u^2 \, ds}$$

al cui calcolo provvede un teorema analogo al II. Lo stesso dicasi per i problemi al contorno di altro tipo.

---

[1]) Loc. cit. (1) pag. 6, cap. IV.

[2]) Cfr. G. Fichera *Analisi esistenziale per le soluzioni dei problemi al contorno misti, relativi all'equazione ed ai sistemi di equazioni del secondo ordine di tipo ellittico.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1949.

Sulla scelta della distribuzione udometrica annuale per Napoli Capodimonte

Nota del dott. **Cristofaro Mennella,** *presentata dal socio* **C. Colamonico**

(Adunanza del dì 6 maggio 1950)

Sunto. — Sui dati della serie pluviometrica 1866-1945 dell'Osservatorio Astronomico di Capodimonte si conduce una analisi mirante a stabilire i rapporti tra l'andamento del fenomeno delle precipitazioni per annate civili e secondo altre distribuzioni aventi una diversa periodicità stagionale. Si desume come le annate che ho dette pluviometriche (dal settembre all'agosto successivo) siano le più idonee per rendere percepibili le più spiccate caratteristiche del fenomeno, al di fuori di effetti fittizi che si determinano con le altre distribuzioni più o meno convenzionali.

Ho voluto indagare se e sino a qual punto possa influire la distribuzione udometrica prescelta nel corso di una lunga serie di anni, e ciò mi è stato suggerito dal fatto che la fase preminente della pioggia annua, che a Napoli si verifica, generalmente, nell'autunno, si ha però con notevole frequenza anche nell'inverno inoltrato, dando così due massimi vistosi alla stessa annata civile. A tal fine mi sono servito dei totali mensili ed annuali dell'ottantennio 1866-1945 registrati all'Osservatorio di Capodimonte, operando su essi ben cinque distribuzioni annuali diverse, per ciascuna delle quali ho determinato gli elementi statistici essenziali. Dette distribuzioni sono:

1 — per *annate civili* (gennaio-dicembre) di uso comune;

2 — per *annate meteorologiche* (dicembre-novembre successivo) comunemente adoperate per la concordanza con le stagioni a partire dall'inverno;

3 — per *annate idrologiche* (ottobre-settembre successivo) generalmente impiegate per lo studio dei regimi dei corsi d'acqua;

4 — per *annate pluviometriche* (settembre-agosto successivo), da me proposte e che decorrono dal minimo principale annuo al successivo;

5 — per *annate pluviometriche invertite* (marzo febbraio successivo) particolarmente indicate ai fini agricoli.

Riporto nel seguente specchietto i medii mensili, ricavati dalla distribuzione per annate civili:

G	F	M	A	M	G	L	A	S	O	N	D
98,76	74,34	71 91	68,41	51,13	36,09	16,92	24,31	73,61	125,76	115,93	120,73

Per le altre distribuzioni sono stati eliminati alcuni dei totali mensili del 1866, sostituiti con quelli dei mesi corrispondenti del 1946.

Rilevo subito come dai medi normali suddetti non risulti il massimo secondario primaverile, che pure figurava per i periodi 1866-1900 studiato dall'ALBERTI. e 1901-1925 studiato dall'AURINO, e che veniva considerato, generalmente, come una delle caratteristiche principali dell'andamento annuale per Napoli; tale scomparsa è dovuta al singolare andamento di carenza della primavera per il periodo 1925-1945, sensibilmente al di sotto della propria media normale.

Nel seguente specchietto riporto, per ciascuna delle distribuzioni indicate, la Media normale dell'ottantennio, M, il totale annuo più elevato, l'amplitudine della serie, il numero degli scarti positivi, quello dei negativi, lo scarto quadratico medio calcolato con la nota formula:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma (M - r)^2}{n}} \quad ;$$

la deviazione media, la deviazione probabile, l'errore probabile della Media determinati, rispettivamente, con le formole:

$$d_m = \frac{\| v \|}{\sqrt{n\,(n-1)}} \quad ; \qquad d_p = 0{,}845\, d_m \quad ; \qquad l_m = \frac{d_p}{\sqrt{n}} \quad .$$

Distribuzione annuale	Media normale	Totale p : elev.	Totale meno el.	Amplitudine	N. scarti +	N. scarti −	Scarto quadrat. medio	Deviaz. media	Deviaz. probab.	Errore probabile della Med.
ann. civili	878,01	1403,7	415,4	987,9	44	36	164,4	121,6	102,1	± 11,42
» meteorolog.	876,5	1513,4	408,7	1104,7	34	46	184,0	139,2	117,7	± 13,16
» idrologiche	875,5	1376,3	392,1	978,2	43	37	169,6	131,9	111,5	± 13,47
» pluviometr.	876,5	1242,2	472,3	769,9	40	40	166,0	137,7	115,7	± 12,94
» pluv. invert.	877,9	1294,5	527,9	766,6	41	39	176,6	143,6	120,6	± 12,48

Sono facilmente rilevabili le forti differenze tra i totali più elevati, quelli meno elevati e le amplitudini per annate civili e meteorologiche da una parte e annate pluviometriche e pluviometriche invertite dall'altra, con valori meno eccezionali per queste ultime; all'incontro, la deviazione probabile è molto più limitata per le annate civili.

Per ciascuna delle cinque distribuzioni ho operato la classificazione delle annate, utilizzando il valore della deviazione probabile. Ho ottenuto così:

Distribuzione Categoria	Annate civili		Annate meteorolog.		Annate idrologiche		Annate pluviometriche		Ann pluviometr. invertite	
	Limiti	Num.	Limiti	Num.	Limiti	Num.	Limiti	Num.	Limiti	Num.
Anni ordinari	980 - 775,9	42	758.8- 994,1	44	764,0- 986.9	44	760,8- 992,2	42	757.3- 998.5	42
Lievemente piovosi	980,1-1082,2	8	994,1-1111,8	10	986.9-1898.4	8	992,2-1107,9	10	998,5-1119,1	14
piovosi	1082,2-1184,2	5	1111.8-1229.4	3	1098.4-1209,9	5	1107,9-1223.6	7	1119,1-1239.7	4
Eccezional. piovosi	oltre 1184.3	3	oltre 1229.4	4	oltre 1209 9	2	oltre 1223.6	1	oltre 1239,7	2
Lievemente asciutti	775,9- 672,8	14	758,8- 641,1	13	764,0- 652,5	15	760,8 645.1	14	757.3- 636.7	10
asciutti	672,8- 571,8	6	641,1- 523,5	5	652,5- 541,0	4	645,1- 529,4	4	636,7- 516,1	8
Eccezional. asciutti	meno 571.7	2	meno 523,5	1	meno 541,0	2	meno 529,4	2	meno 516,1	0

Annate ordinarie, tra $M \pm d_p$; lievemnete piovose, tra $M + d_p$ ed $M + 2d_p$; piovose, tra $M + 2d_p$ ed $M + 3d_p$; eccezionalmente piovose, con oltre $M + 3d_p$; lievemente asciutte, tra $M - d_p$ ed $M - 2d_p$; asciutte, tra $M - 2d_p$ ed $M - 3d_p$; eccezionalmente asciutte, con meno di $M - 3d_p$.

Nel precedente specchietto riporto, per ciascuna distribuzione, i limiti delle diverse categorie di annate, nonchè il numero delle annate che figurano in ciascuna di esse (limiti e totali sono espressi in mm.).

Si rileva come in tutte le distribuzioni, tranne che nella pluviometrica invertita, il numero degli anni lievemente asciutti sia sempre più elevato dei lievemente piovosi, il numero complessivo degli anni con andamento generale di carenza è ugualmente inferiore al numero degli anni con andamento di sovrabbondanza, tranne che nella stessa distribuzione dei pluviometrici invertiti.

Poichè il numero e l'entità dei totali degli anni piovosi ed eccezionalmente piovosi e di quelli asciutti ed ecccezionalmente asciutti interessano particolarmente ai fini di questa ricerca, riporto i dati e degli uni e degli altri, nonchè le medie per le singole categorie, nei due seguenti specchietti

a) — *Anni piovosi ed eccezionalmente piovosi*:

	Annate civili	Ann. meteorol.	Ann. idrolog.	Ann. pluviom.	Ann. pl. inv.
Anni eccez. piovosi	1403,7	1513,1	1370,3	1242,2	1294,5
»	1329,0	1437,1	1249,0		1254,2
»	1291,5	1260,0			
»		1240,7			
Media	1341,4	1362,8	1309,6	1242,2	1274,3
Anni piovosi	1154,2	1199,5	1198,8	1188,5	1216,4
»	1142,8	1149,0	1176,3	1188,1	1184,0
»	1126,7	1119,6	1163,2	1169,4	1183,0
»	1121,7		1140,6	1159,1	1132,6
»	1097,4		1116,4	1114,2	
»				1113,2	
»				1110,1	
Media	1128,5	1156,0	1159,0	1148,9	1179,0
Media piov. ed ecc. piov.	1208,3	1274,1	1202,0	1160,6	1210,7
Anni con oltre 1050 mm. (Num. e Media)	10-1179,9	12-1185,7	10-1162,3	11-1132,9	12-1151,3

Si rileva come la distribuzione che presenta i più rilevanti totali eccezionali, sia effettivi che medi, sia quella per annate meteorologiche, seguita dall'altra per annate civili; all'incontro, i totali meno eccezionali si ritrovano nella distribuzione per annnate pluviometriche.

b) *Anni asciutti ed eccezionalmente asciutti:*

	Annate civili	Ann. meteorol.	Ann. idrolog.	Ann. pluviom.	Ann. pl. inv.
Anni eccez. asciutti	415,4	408,7	392,1	472,3	
»	571,1		448,0	519,7	
Media	493,2	408.7	420.0	496,0	
Anni asciutti	620,2	552,5	588,5	550,3	527,9
»	624,2	585,8	596,2	580,0	545,4
»	649,2	599.8	612,3	597,7	546,1
»	650,7	611,6	626,0	620,5	549,6
»	655,1	628,2			551,9
»	664,3				555,4
»					589,9
»					609,9
Media	643.9	595,5	605,7	587,1	559.5
Media asc. ed eccez. asc.	606,2	564.3	543,8	556,7	
Anni con meno di 700 mm. (Num. e Media)	10-622,5	12-623.9	14 618,9	12-627,2	13-602,6

La distribuzione per annate idrologiche è quella che presenta i totali di anni asciutti più eccezionali, sia come valori reali che come medie; però considerando per tutte le distribuzioni i totali annui inferiori al limite comune dei 700 mm., la media più bassa risulta quella per annate pluviometriche invertite, e la media più elevata compete alla distribuzione per annate pluviometriche dirette.

Nel seguente specchietto riporto le frequenze dei totali annui, ripartite per intervalli di 40 in 40 mm., per ciascuna distribuzione. Da esse può desumersi il valore modale:

Intervalli	Ann. civili	Annate meteor.	Ann. idrol.	Annate pluv.	Annate pl. inv.	Intervalli	Ann. civili	Annate meteor.	Ann. idrol.	Annate pluv.	Annate pl. inv.
361-401			1			961-1001	7	8	11	8	6
401-441	1	1				1001-1041	1	4	3	5	6
441-481			1	1		1041-1081	1	5	2	5	4
481 521				1		1081-1121	2	1	2	3	3
521-561		1		1	6	1121-1161	4	1	1	1	1
561-601	1	2	2	2	1	1161-1201		1	3	3	2
601-641	2	2	2	2	1	1201-1241		1			1
641-681	5	3	2	4	4	1241-1281		1	1	1	1
681-721	4	5	7	5	4	1281-1321	1				1
721-761	5	5	6	5	2	1321-1361	1				
761-801	5	7	5	6	10	1361-1401			1		
801-841	7	10	4	7	4	1401-1441	1	1			
841-881	7	10	8	7	5	1441 1481					
881-921	16	5	9	4	6	1481-1521		1			
921-961	9	5	10	10	12	1521-1561					

Per ciascuna distribuzione ho anche determinato il valore modale per intervallo di 10 in 10 mm. e di esso mi sono servito per ottenere il coefficiente di asimmetria γ. Infine ho determinato il coefficiente di variabilità, sia per mezzo della deviazione media, sia con lo scarto quadratico medio. Riporto detti elementi in questo ultimo specchietto:

Distribuzione	Media	*Mda*	$\Upsilon = \frac{M - Mda}{\sigma}$	$C.V_1 = \frac{e}{M} \times 100$	$C.V_2 = \frac{\sigma}{M} \times 100$
Anni civili	878,01	886,5	— 0,05	13,8	18,7
Anni meteorolog.	876.5	846,5	0,16	15,8	20,9
Anni idrolog.	875,5	976,5	— 0,59	15,0	19,3
Anni pluviom.	876.5	946,5	— 0,42	15,7	18,9
Anni pluv. inv.	877,9	956,5	— 0,44	16,3	20,1

Per la limitatezza dell'intervallo adoperato (di 10 in 10 mm.) il valore della Moda e alquanto aleatorio dal momento che le frequenze per altri intervalli differiscono di pochissimo da quelle risultate più elevate; sono pertanto più probativi i valori di CV_1 e di CV_2.

Per la natura dell'elemento studiato, i cui valori più eccezionali per deficienza o per sovrabbondanza provocano non pochi inconvenienti pratici, il criterio per la scelta della distribuzione pluviometrica annuale più idonea dev'essere quello che tien conto e dell'amplitudine e della entità dei totali eccezionali nell'uno e nell'altro verso. Pertanto, alla stregua di quanto è stato esposto in questa Nota, i vantaggi maggiori appartengono alla distribuzione detta pluviometrica (settembre-agosto successivo), che, tra l'altro, si presta benissimo ad una suddivisione in semestri e stagioni la cui successione verrà da me studiata in altri lavori.

A rigore, una periodicità che elimini del tutto gli effetti fittizi sarebbe quella dall'agosto al luglio successivo, dato che il minimo principale dell'annata si ha appunto in luglio. Ma le differenze con la distribuzione pluviometrica sarebbero minime, e notevoli, invece, gli inconvenienti pratici, per cui la scelta non può cadere che su quest'ultima.

Casamicciola, marzo 1950.

Indagini sulla dilatazione reversibile di alcune rocce silicee

Nota del Dr. **Riccardo Sersale**, *presentata dal socio* **G. Malquori**

(Adunanza del dì 3 giugno 1950)

Sunto. — L'Autore analizza il fenomeno della scomparsa apparente del quarzo e delle altre varietà di silice, in taluni campioni di arenaria silicea sottoposti a trattamento termico.

In un lavoro eseguito precedentemente presso questo Istituto [1]) fu posto in evidenza l'anormale comportamento termo-dilatometrico di alcuni campioni di roccia silicea. Fu osservato, fra l'altro, che mentre al primo riscaldamento, fino a circa 900°, codesti campioni presentavano, sulle curve rilevate con l'apparecchio Chevenard a registrazione fotografica, la dilatazione caratteristica dell'inversione $\beta \rightarrow \alpha$ del quarzo, ad un secondo trattamento termico, sempre fin verso i 900°, detto quarzo — il quale può apprezzarsi sulla curva di riscaldamento appunto dall'entità della dilatazione: $\beta \rightleftarrows \alpha$ [2]) — appariva notevolmente ridotto.

---

[1]) Giannone A., Zaffuto G., Caruso E., *Ricerche sui materiali silicei nazionali suscettibili di applicazione nella fabbricazione dei refrattari*. Ricerca Scient., 13, 294 (1942).

[2]) Malquori G., e Giannone A., *L'esame delle materie prime da destinarsi alla produzione dei refrattari silicei*, Questo Rendiconto (4), vol. 9, 83 (1938-1939).

L'apparente scomparsa di parte del quarzo originariamente presente nei campioni di quelle rocce si accompagnava sempre con l'apparizione di una dilatazione permanente del materiale.

Riscaldando i provini a temperatura superiore ai 1200°, prima di sottoporli alla prova termo-dilatometrica, si poteva far addirittura sparire la trasformazione: $\beta \rightleftarrows \alpha$ (575°) del quarzo senza che subentrassero al suo posto — sulle curve dilatometriche — delle quantità equivalenti di tridimite e di cristobalite: le forme a più basso peso specifico del quarzo che prendono origine a seguito del riscaldamento dei materiali silicei alle alte temperature.

Tale comportamento, da considerarsi anormale rispetto a quello osservato per la più gran parte dei materiali silicei allora presi in esame, fu interpretato — dato che i campioni anomali erano i più ricchi di costituenti accessori, cioè di impurezze — attribuendolo o alla vetrificazione del quarzo alle alte temperature raggiunte con il trattamento termico, o alla presenza di α cristobalite instabile a temperatura ordinaria, oppure ad una causa puramente meccanica, e cioè che i cristalliti di β quarzo dilatandosi a seguito della trasformazione $\beta \rightarrow \alpha$ al riscaldamento, scostano i costituenti mineralogici accessori, i quali, al successivo raffreddamento non seguiranno più la contrazione che accompagna la trasformazione inversa: $\alpha \rightarrow \beta$ del quarzo, di guisa che quest'ultimo perdendo, in parte, il contatto con essi, non potrà più comunicare all'aggregato, in un nuovo riscaldamento, la totalità dell'effetto di espansione termica.

Portevin e Chevenard [1]) per spiegare l'andamento delle curve termo-dilatometriche di campioni di graniti e di micascisti ricorrono appunto a questa interpretazione meccanica che tien conto della tessitura e della porosità della roccia.

Per quel che riguarda la porosità, ricordo tuttavia le indagini di Travers e de Goloubinoff [2]), i quali studiando delle rocce silicee destinabili alla fabbricazione dei refrattari omonimi, avevano trovato che variazioni anche notevoli della porosità non interferiscono sulla interpretabilità delle curve termo-dilatometriche.

Più di recente il Sig. Pierre Munier, Directeur général de l'Institut de Céramique Française a Sevres, [3]) esaminando il comportamento termo-

[1]) Portevin A., e Chevenard P., *Analyse dilatométrique de quelques substances non métalliques: minéraux, roches, produits industriels*, VIII Congrès Chim. Industrielle, Chimie et Industrie, num. spec., 343 (1929).

[2]) Travers, e de Goloubinoff, *Contribution a l'étudedes briques de silice: analyse dilatométrique; essais de la matière première* Revue Métall., 23, 27, 100 (1926)

[3]) Munier P., *Influence de la texture des produits céramiques sur leur dilatation thermique. L'effet d'évanouissement du quartz et de la cristobalite*, Silicates industriels, 15, 67 (1950).

dilatometrico delle paste ceramiche contenenti quarzo e cristobalite, si è trovato di fronte alla necessità di indagare su di un fenomeno analogo a quello osservato precedentemente in questo Istituto per i già ricordati campioni di rocce silicee, fenomeno che egli chiama di « évanouissement du quartz et de la cristobalite ».

È noto che la dilatazione degli impasti ceramici non segue esattamente la regola di addittività e per tanto è inesatto di valutare quantitativamente a mezzo dei diagrammi termo-dilatometrici le differenti forme di silice: quarzo, cristobalite, tridimite, presenti nella miscela. È curioso tuttavia di notare che mentre l'andamento della curva di dilatazione termica delle paste crude è, grosso modo, in rapporto col per cento di sabbia quarzosa presente nell'impasto, dopo cottura al disotto dei 1000°, la dilatazione in corrispondenza della trasformazione: $\beta \rightleftarrows \alpha$ del quarzo è molto più piccola, donde appare che del quarzo è scomparso. I medesimi impasti che presentano, se cotti al disotto dei 1000°, il fenomeno dell'evanouissement del quarzo o della cristobalite (qualora in miscela si sia adoperato del quarzo previamente trattato ad alta temperatura), cotti invece a temperature alle quali si iniziano i fenomeni di agglomerazione, accusano sulle curve termo-dilatometriche la ricomparsa sia del quarzo sia della cristobalite.

La spiegazione che il Munier da ai fenomeni osservati è esattamente la stessa alla quale — come ho ricordato più sopra — Portevin e Chevenard erano ricorsi per spiegare il comportamento termo-dilatometrico di campioni di graniti e di micascisti. Essa non presenta per tanto quel carattere di originalità che l'Autore sembra volerle attribuire.

Avendo a disposizione alcuni campioni di arenaria silicea ho voluto esaminare da vicino il meccanismo del fenomeno della scomparsa apparente del quarzo e delle altre varietà di silice eventualmente presenti nel materiale sottoposto a trattamento termico.

Ho lavorato con due campioni: il primo ha la seguente composizione:

1) — perdita al fuoco	0.87 %
2) — titolo di silice	92.54 »
3) — titolo di sesquiossidi di alluminio e ferro, più biossido di titanio	4.83 »
4) — titolo di calce	1,04 »
5) — alcali e non dosato	0,72 »
	100,00 %
Refrattarietà	C. S. 32 ÷ 33

Il coefficiente di imbibizione del materiale è risultato: 3,61 %, mentre la porosità: 11,03 %.

La tessitura è riprodotta dalla microfotografia N. 1 della Tav. 1 la quale

mostra come la roccia consti di cristalliti di quarzo di differenti dimensioni, collegati da cemento siliceo e contornati da velature di limonite che in alcune zone si accentua in aree di notevoli dimensioni. Sono presenti altresì elementi micacei e feldspatici sempre in cristalliti di piccole dimensioni e inframmezzati al cemento.

Questa roccia è stata cotta a differenti temperature e per tempi diversi, dopo di chè si son ricavati i provini per il dilatometro Chevenard (lunghezza: 2 cm. per tutti i provini).

I risultati dei saggi termo-dilatometrici sono riportati nella Tav. II, nella loro documentazione fotografica originale.

La curva N. 1 si riferisce alla roccia tal quale, cioè alla roccia che non ha subito trattamento termico. Si noti come l'entità della variazione dimensionale che accompagna l'inversione reversibile del quarzo sia più piccola al raffreddamento e come il provino subisca, per effetto dell'avvenuto riscaldamento fino a circa 850°, una dilatazione permanente.

La spiegazione di tale comportamento è abbastanza semplice: A seguito della forte tensione conseguente alla dilatazione del quarzo, al riscaldamento, il cemento non tiene a sufficienza e per tanto si distrugge o comunque si allenta la primitiva tessitura del materiale, di guisa che, alteratosi il contatto fra grani di quarzo e cemento, al successivo raffreddamento la contrazione all'inversione non sarà sentita dall'assieme come la dilatazione al riscaldamento.

Da qui l'osservata differenza fra le entità della dilatazione e della contrazione, non che la dilatazione permanente ben visibile sul diagramma termo-dilatometrico.

Il diagramma N. 2 si riferisce alla medesima roccia cotta per 4 ore a 1200°. È evidente il fenomeno di «evanoussement» del quarzo; nello stesso tempo si noti che alla scomparsa del quarzo non corrisponde la comparsa di cristobalite, la quale sulle curve di andata e di ritorno, avrebbe dovuto rilevarsi a mezzo della trasformazione reversibile $\beta \rightleftarrows \alpha$ a circa 230°.

La spiegazione è la stessa di quella invocata per illustrare il diagramma precedente. La cottura e la conseguente dilatazione del quarzo ha scardinato la tessitura originale del materiale per modo che i granelli avendo perduto in parte il contatto con il cemento e fra di loro, al successivo raffreddamento non riacquistano più le posizioni di partenza.

Sottoponendo il materiale così trattato all'esame termo-dilatometrico, dato che i granelli di quarzo risultano più liberi, la loro dilatazione si trasmetterà all'assieme molto meno, ciò che sulla curva si tradurrà in un'apparente disparizione di parte del quarzo.

Finalmente, la curva N. 3 ci mostra il comportamento della roccia trattata a temperatura più alta: per cinque ore fra 1400° e 1450°.

Di quarzo libero ne è rimasto pochissimo ed al suo posto appare solo un pò di cristobalite, appare cioè che la silice libera è presso che scomparsa.

Esaminato in sezione sottile il materiale cotto a 1400° ÷ 1450° si mostra — Tav. 1; micro N. 3 — costituito da grossi granuli di quarzo fratturati a seguito delle tensioni conseguenti alle trasformazioni nelle forme a più alto volume specifico, e circondati da materiale vetroso in discrete quantità, con numerose bolle e vacuoli. La porosità è risultata del 12 %.

L'esistenza di questi vacuoli è posta ancor meglio in evidenza dall'osservazione a luce riflessa, per la quale il provino è stato preparato mediante imbibizione con stirolo (contenente il 2 % di condensante: perossido di benzoile) nel vuoto e successiva polimerizzazione a 60°.

Nella micro N. 2 della Tav. 1 i vacuoli riempiti di stirolo sono caratterizzati dall'aspetto tondeggiante e dall'alone scuro.

Simile tessitura giustifica quanto è indicato dal diagramma termodilatometrico. Le fratture dei cristalli di quarzo ed i numerosi vacuoli esistenti nell'intera massa dovranno evidentemente attenuare, e nel nostro caso quasi annullare, le variazioni di volume conseguenti alle trasformazioni della silice-quarzosa nelle forme a più basso peso specifico: tridimite e cristobalite.

Che effettivamente a codesta tessitura sia da imputarsi quanto si è osservato, è in fine dimostrato chiaramente dal diagramma N. 4 della Tav. II. Esso si riferisce al medesimo materiale cotto a 1400° ÷ 1500° per cinque ore, portato di poi alla finezza di 0 % di residuo sul setaccio di 4900 maglie/cm², e successivamente agglomerato per forte pressione in forma di acciaio, usando come legante qualche goccia di soluzione di silicato sodico. È evidente la ricomparsa del quarzo e della cristobalite.

Un altro campione di roccia da me esaminato per indagare sui medesimi fenomeni aveva la seguente composizione:

1) — perdita al fuoco. . . . . :	3,69 %
2) — titolo di silice	82,72 »
3) — titolo di sesquiossidi di alluminio e ferro, più biossido di titanio	12,20 »
4) — alcali e non dosato	1,39 »
	100,00 %

ed appariva costituito da sabbia quarzosa legata abbastanza tenacemente da argilla.

I diagrammi N. 5 e 6 che si riferiscono: il primo a materiale crudo, il secondo allo stesso cotto a 850° per alcune ore, mostrano chiaramente la scomparsa del quarzo, a giustificare la quale serve la medesima interpretazione meccanica fornita circa i fenomeni che avvengono al riscaldamento ed al successivo raffreddamento del materiale illustrato precedentemente.

Napoli — Istituto di Chimica industriale dell' Università.

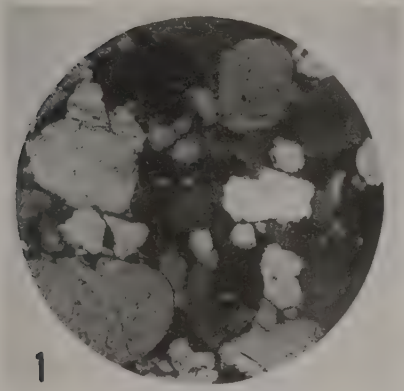


Fig. 1. — Microfotografia di sezione sottile di arenaria silicea. Campione N. 1.
Luce polarizzata; nicols incr. ingr. 50 volte.
Cristalliti di quarzo, collegati da cemento siliceo e contornati da velature di limonite.

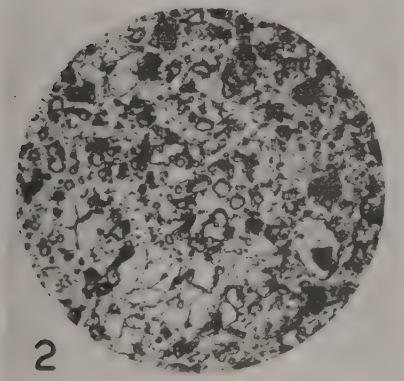


Fig. 2. — Microfotografia di sezione lucida dello stesso campione di arenaria silicea, cotto a 1400 ÷ 1450° C.
Luce riflessa; senza nicols, ing. 20 volte.
Vacuoli riempiti di stirolo, caratterizzati dall'aspetto tondeggiante e dall'alone scuro.

Fig. 3. — Microfotografia di sezione sottile dello stesso campione di arenaria silicea, cotto a 1400 ÷ 1450° C.
Luce polarizzata; nicols incr. ingr. 50 volte.
Granuli di quarzo fratturati, circondati da materiale vetroso, con numerose bolle e vacuoli.

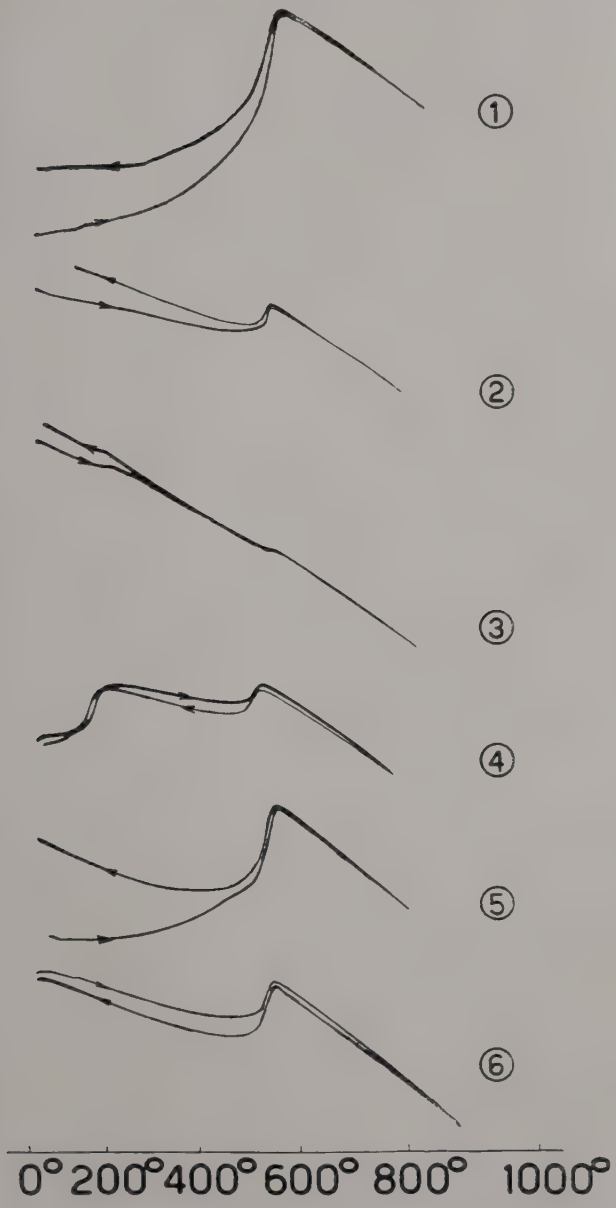


Fig. 1. — Diagramma dilatometrico di arenaria silicea. Campione N. 1, tal quale. Provino della lunghezza di cm. 2.

Fig. 2. — Diagramma dilatometrico dello stesso campione di arenaria silicea, cotto per 4 ore a 1200° C. Provino della lunghezza di cm. 2.

Fig. 3. — Diagramma dilatometrico dello stesso campione di arenaria silicea, cotto per 5 ore a 1400 ÷ 1450° C. Provino della lunghezza di cm. 2.

Fig. 4. — Diagramma dilatometrico dello stesso campione di arenaria silicea; polvere cotta a 1400÷1450°C e successivamente agglomerata con qualche goccia di silicato di sodio e forte pressione. Provino della lunghezza di cm. 2.

Fig. 5. — Diagramma dilatometrico di arenaria silicea. Campione N. 2, tal quale. Provino della lunghezza di cm. 2.

Fig. 6. — Diagramma dilatometrico dello stesso campione N. 2 di arenaria silicea, cotto ad 850° C. Provino della lunghezza di cm. 2.

Sull' attivazione termica delle bauxiti

Nota del Dr. **Riccardo Sersale**, *presentata dal socio* **G. Malquori**

(Adunanza del dì 3 giugno 1950)

Sunto. — È stato esaminato il comportamento termico di due campioni rappresentativi delle bauxiti campane dei tenimenti di: Cusano Mutri e Dragoni.

Le due rocce sono entrambe del tipo boehmitico ($\gamma\ Al_2O_3 \cdot H_2O$) e differiscono per il contenuto di ferro che, principalmente sotto forma di ematite, è presente in notevole quantità nelle bauxiti rosse di Dragoni.

Il loro comportamento al calore è stato studiato a mezzo dell' analisi termica differenziale e delle analisi: termo-ponderale e termo-dilatometrica, nonchè seguito mediante l' indagine röntgenografica. Si è confermato che la dipartita dell' acqua avviene all' intorno dei 480° e che l' ossido risultante è dell' ossido γ il quale solo a temperature superiori a 900° si trasforma con velocità apprezzabile nell' ossido stabile: $\alpha\ Al_2O_3$.

La disidratazione è accompagnata da una brusca e notevole dilatazione permanente che determina l' alta porosità, cioè la grande superficie specifica totale acquistata dal solido, donde il suo elevato potere adsorbente.

L' impiego della bauxite attivata a mezzo del semplice trattamento termico fu realizzato praticamente dal lontano 1908 per opera dei tecnici della Burmah Oil Company [1]), ma si può dire che soltanto in tempi a noi molto più vicini questo ottimo materiale adsorbente ha trovato largo impiego nell' industria petrolifera sia per le correnti operazioni di raffineria dove, stante il basso costo, compete talvolta con vantaggio con la fuller's earth e comunque con le terre decoloranti dei vari tipi e provenienze, sia in taluni processi di craking e di reforming.

Aggiungo che non soltanto l' industria petrolifera si avvale delle proprietà delle bauxiti opportunamente disidratate; il loro campo di applicazioni si è venuto cioè estendendo ad altre industrie: ad esempio, l' in-

[1]) O' Brien A. M., *The technical use of bauxite in connexion with petroleum refining*, Journ. Soc. Chem. Ind., *43*, 188 (1924). — Dunstan A. E., Thole F. B. e Rempry F. G. P., *Bauxite as a refining agent for petroleum distillation*, Journ. Soc. Chem. Ind., *43*, 179 (1924). — Chimie et Industrie, *12*, 423 (1924). — Krezil F., *Aktive Tonerde*, Samml. Chem. und Chem.-techn. Vorträge, Neue Folge, Heft 41 (1938). — Mantell C. L., Adsorption, New-York (1945). — Adsorption Symposium, Ind. Eng. Chem., *42*, 1279 (1950).

dustria dello zucchero e ad altri differenti processi dove i materiali in questione vengono utilizzati come supporti di catalizzatori e addirittura come catalizzatori.

Le bauxiti sono delle rocce costituite essenzialmente da idrossidi di alluminio accompagnati da quantità più o meno cospicue di minerali siallitici e di ematite. Fra i costituenti minori: i minerali di titanio: ilmenite, rutilo, anatasio; la silice quarzosa e opalina, la limonite, la goethite, i minerali di vanadio ecc.

È noto che le bauxiti americane, sia quelle del territorio U. S. sia quelle della Guiana, sono del tipo gibbsitico o idrargillitico: il loro costituente fondamentale è quindi il triidrato: $Al_2O_3 \cdot 3\,H_2O$. Le bauxiti europee invece, di qualsiasi provenienza: italiane, francesi, jugoslave, ungheresi ecc., accusano una bassa perdita alla calcinazione: 12% ÷ 15%, ed il loro costituente principale è il monoidrato, nelle due forme: $\alpha\,Al_2O_3 \cdot H_2O$ o diasporo e $\gamma\,Al_2O_3 \cdot H_2O$ o boehmite. A pari titolo di allumina e di silice le più pregiate per l'industria dell'alluminio risultano le bauxiti del tipo boehmitico per la loro più pronta solubilità nelle soluzioni alcaline dell'attacco Bayer.

Stante la loro costituzione, l'attivazione termica delle bauxiti, che si accompagna con variazioni notevoli delle proprietà fisiche [1]), è legata alle trasformazioni che per azione del calore subiscono gli idrossidi di alluminio su ricordati.

Dall'abbondante letteratura intorno alla demolizione termica degli idrati di alluminio [2]) si rileva che diasporo e boehmite perdono quasi completamente la loro acqua fra i 450° ed i 500° (*) fornendo: il diasporo dell'$\alpha\,Al_2O_3$, la boehmite, invece, della $\gamma\,Al_2O_3$, che solo a temperatura più alta passa ad ossido stabile: il corindone o $\alpha\,Al_2O_3$.

Per il minerale gibbsite o idrargillite, quale esso si ritrova in natura, si è ammesso e si continua ad ammettere [3]) che la dipartita dell'acqua

---

[1]) Mantell C. L., l. c. — La Lande W. A., Mc. Carter W. S. W., Sanborn J. B., *Bauxite as a drying adsorbent*, Ind. Eng. Chem., *36*, 99 (1944). — Heinemann H., Krieger K. A., Mc. Carter W. S. W., *Some physical properties of activated bauxite*, Ind. Eng. Chem., *38*, 839 (1946).

[2]) Gmelins., *Handbuch der anorgan. Chemie, Aluminium*, Teil B, fasc. 1, Berlino (1934). — Handbuch allg. Chemie, v. IX, Fricke e Hüttig, *Hydroxyde und oxydhydrate*, Akad. Verlagsges, Lipsia, (1937).

(*) A seconda delle condizioni di esperienza. Per le curve di riscaldamento le temperature alle quali si registra l'inizio del fenomeno di disidratazione, dipendono dalla finezza del materiale e dalla velocità di salita della temperatura.

[3]) Norton F. H., *Critical study of the differential thermal method for the identification of the clay minerals*, Journ. Am. Cer. Soc., *22*, 54 (1939).

avvenga in modo brusco e completo a temperatura più bassa di quella indicata per i due precedenti minerali: diasporo e boehmite. L'inizio della disidratazione si verificherebbe fra i 240° e i 280°.

Se non che l'affinarsi dei metodi d'indagine ha posto in evidenza che il fenomeno della disidratazione della gibbsite o idrargillite non è così semplice, come lo si è voluto considerare finora, e accanto a campioni del minerale i quali all'analisi termica differenziale di precisione accusano effettivamente un unico effetto endotermico che si inizia entro l'intervallo di temperatura su indicato, ne sono stati riconosciuti altri per i quali il medesimo metodo d'indagine ha potuto porre in evidenza un andamento per gradi della disidratazione [1]), andamento che si avvicinerebbe a quello, ormai accertato, presentato dal triidrato artificiale cristallino: l'allumina Bayer.

L'allumina Bayer accusa effettivamente un comportamento al calore diverso da quello che è descritto nella letteratura per il minerale gibbsite o idrargillite.

Qui si può constatare sperimentalmente che la disidratazione termica avviene per gradi e si ammette la successione:

$$\text{idrargillite o gibbsite} \xrightarrow{\text{poco sopra i } 200^0} \text{boehmite} \xrightarrow{\text{verso i } 450^0} \gamma\, Al_2O_3$$

Lo schema precedente è quello concordemente accettato, tuttavia il fenomeno è certamente più complesso perchè sensibilizzando i metodi di indagine, tanto l'analisi termica differenziale, quanto l'analisi termo-ponderale hanno permesso a noi e ad altri [2]) di svelare tre e non due gradini nella eliminazione dell'acqua.

Riferendomi all'analisi termica: il primo effetto endotermico si registra fra: 200° e 250°; il secondo fra: 250° e 300°; l'ultimo fra: 450° e 480°.

E per quanto siano ormai chiaramente acquisite le differenze nella struttura cristallina fra l'idrargillite (naturale) e la bayerite (artificiale) e si consideri quest'ultima metastabile rispetto alla prima, non abbiamo ancora una spiegazione soddisfacente circa la presenza del terzo gradino nella disidratazione dell'allumina Bayer.

---

[1]) Kerr P. F., e Kulp J. L., *Multiple differential thermal analysis*, Am. Mineral., *33*, 404 (1948).

[2]) Parravano N., e Malquori G., *La decomposizione termica dell'allumina Bayer*. Rend. Acc. Lincei, (6), 7, 970 (1928). — Montoro V., *Struttura cristallina della bayerite*. Ricerca scientifica, *13*, 565 (1942). — Kauffmann A. J., e Don Dilling E., *Differential thermal curves of certain hydrous and anhydrous minerals, with a description of the apparatus used*, Economic Geology, *45*, 228 (1950).

L'esame röntgenografico segnala soltanto la successione su indicata:

bayerite o idrargillite ⟶ boehmite ⟶ $\gamma\, Al_2O_3$

Nessuna evidenza cioè per un idrato diverso da: $Al_2O_3 \cdot 3\,H_2O$ e $Al_2O_3 \cdot H_2O$.

Quali modifiche importa nel solido la disidratazione?

Secondo La Lande, Mc. Carter e Sanborn [1]) nonchè: Thibon, Maillard e Savon [2]), il massimo dell'attivazione termica dell'idrargillite (*) non corrisponderebbe alla completa dipartita dell'acqua, e siccome codesti materiali parzialmente disidratati fino a tenori d'acqua notevolmente al disotto del richiesto dalla formula: $Al_2O_3 \cdot H_2O$, non mostrerebbero, esaminati ai raggi X, che il solo spettro della boehmite e nessuna riga dello spettro di $\gamma\, Al_2O_3$, affacciano l'ipotesi che alle basse temperature alle quali avviene l'attivazione dell'idrargillite, la velocità di disidratazione sia superiore a quella dell'ordinamento dell'ossido nella struttura reticolare di $\gamma\, Al_2O_3$.

In altre parole, all'assetto disordinato, instabile, dell'ossido ottenuto a bassa temperatura sarebbero dovute le caratteristiche dell'allumina attivata ricavata dalla demolizione termica dell'idrargillite.

Con l'aumentare della temperatura di attivazione, l'assetto disordinato si stabilizza gradatamente nella struttura dell'ossido γ, le cui righe compariscono sempre più nette ed intense nel röntgenogramma e contemporaneamente cadono le caratteristiche utili del materiale.

Ai fini del giudizio di questa interpretazione si tenga presente che sulle curve termiche degli idrossidi di alluminio, naturali e artificiali, spinte fin oltre i 1000°, non è possibile, per quanto si giuochi con la sensibilità degli apparecchi, di rilevare nessun altro effetto oltre quelli endotermici a bassa temperatura, precedentemente segnalati. Non si osservano cioè quei fenomeni di recalescenza, evidentissimi, a temperature differenti, per gli ossidi provenienti dalla demolizione termica del cloruro e del nitrato di alluminio idrati [3]).

L'eventuale stabilizzazione del reticolo del γ ossido e la trasforma-

---

[1]) L. c.

[2]) Thibon H., Maillard A., Savon L., *L'alumine activée: sa préparation, ses propriétés, sa nature*, Chimie et Industrie, *57*, 117 (1947).

(*) Gli studiosi americani hanno esaminato delle bauxiti dell'Arkansas, di tipo gibbsitico o idrargillitico.

[3]) Parravano N., *L'allumina Blanc*, Rend. R. Acc. d'Italia, *1*, 1 (1930).

zione: $\gamma \longrightarrow \alpha$ avvengono quindi con continuità e tanto più velocemente quanto più elevata è la temperatura che si considera.

Recentemente H. C. Stumpf, A. S. Russel, J. W. Newsome e C. M. Tucker [1]) hanno mostrato a mezzo dell'indagine röntgenografica su ossidi ricavati dalla disidratazione termica di idrossidi di differente origine, che la trasformazione: $\gamma \longrightarrow \alpha$ non è così semplice come indicato più sopra e che all'ossido stabile: il corindone, si arriverebbe attraverso una sequenza di fasi differenti.

Le varietà cristalline, fra allumine di bassa e di alta temperatura individuate dai ricercatori americani, sarebbero sette, ed il loro presentarsi a seguito del trattamento termico dipenderebbe oltre che dalla temperatura e dalla durata del trattamento stesso, dal tipo dell'idrato da cui l'ossido prese origine.

Una interessante osservazione di M. J, de Lapparent è riportata in un lavoro di L. Hackspill e E. Stempfel [2]), circa le trasformazioni subìte da un cristallo di bayerite per effetto del riscaldamento a temperature continuamente crescenti.

Il fenomeno venne seguito al microscopio ed il de Lapparent ha potuto così constatare che fin verso i 240° i cristalli non subiscono alcuna alterazione; a partire però da questa temperatura — la quale corrisponde all'inizio della disidratazione registrata sulle curve termiche — i su detti cristalli divengono opachi e tali restano fino a circa 350°, dopodichè, lentamente, si fanno sempre più trasparenti fino a divenirlo totalmente al di là dei 500°.

Nel medesimo tempo, con il progredire della disidratazione, l'aspetto del solido cambia diventando sempre più ricco di pori piccolissimi. Continuando tuttavia il riscaldamento, cioe aumentando la temperatura, codesta porosità si attenua fino a scomparire del tutto all'intorno dei 600°.

È evidente che la porosità di cui fa menzione il de Lapparent deve risultare uno dei fattori principali — se non la causa — dello sviluppo della capacità adsorbente dell'allumina attivata proveniente dagli idrossidi cristallini, essendo, come è noto, l'entità dell'adsorbimento per condensazione capillare, determinata dalle dimensioni dei pori.

---

[1]) Stumpf H. C., Russel A. S., Newsome J. W., e Tucher C. M., *Thermal Transformations of Aluminas and Alumina Hydrates*. Ind. Eng. Chem., *42*. 1398 (1950). - Russell A. S., Cochran N., *Alumina Surface area measurement*. Ind. Eng Chem. *42*, 1332 (1950). — Russell A. S., Cochran N., *Surface areas of heated alumina Hydrates*, Ind Eng. Chem., *42*, 1336 (1950). — Frary F. C., *Adventures with Alumina*, Ind. Eng. Chem., *38*, 129 (1946).

[2]) Hackspill L. e Stempfel E., *Emploi d'un manomètre enregistreur pour l'étude de la décomposition des hydrates*, Chimie et Industrie. (1929). numéro special p. 151.

Una dettagliata ricerca röntgenografica circa il comportamento termico di bauxiti dei tipi: diasporo (α) e boehmite (γ) è stata eseguita da Staesche e Wetzel [1]).

Essi hanno confermato che a seguito della dipartita dell'acqua il diasporo fornisce esclusivamente: $\alpha\ Al_2O_3$; la boehmite: $\gamma\ Al_2O_3$.

La decomposizione della boehmite si inizierebbe verso 450° e sarebbe terminata a 600°; la successiva trasformazione: $\gamma \longrightarrow \alpha$ dell'ossido non incomincerebbe mai prima di 900°. completandosi verso i 1150°.

Hanno confermato altresì che la più gran parte del ferro presente nelle bauxiti rosse trovasi sotto forma di $\alpha\ Fe_2O_3$.

Interessante, in fine, la constatazione che la presenza dei costituenti minori determina un aumento della costante reticolare dell'α-ossido che si ricava per riscaldamento ad alta temperatura di entrambi i tipi di bauxite: a diasporo ed a boehmite, aumento che, secondo quegli studiosi, sarebbe dovuto all'imprigionamento di atomi estranei nel reticolo di $\alpha\ Al_2O_3$.

Le nostre indagini hanno — come prima fase — avuto di mira lo studio del comportamento termico dei tipi più rappresentativi di bauxiti campane.

Come è noto, le bauxiti della regione campana interessano il Sannio e precisamente i distretti del Taburno e del Matese.

Di minor rilievo il primo, per la esiguità degli affioramenti (zona di Vitulano), mentre molto più cospicui si presentano i depositi bauxitici affioranti sulle pendici del Monte Mutria, del Pescolombardo e del Monte Erbano nel tenimento di Cusano Mutri, nonchè quelli delle colline di Monte Maggiore nel tenimento di Dragoni [2]).

Gli affioramenti nella zona di Cusano Mutri si trovano a quote comprese fra i 700 ed i 1200 metri; sono di forma lenticolare e si presentano in grosse tasche nei calcari compatti, ma l'intera zona, rotta e contorta, è attraversata da numerose faglie per modo che gli strati bauxitici si riscontrano spezzati ed irregolarmente dislocati.

L'orizzonte geologico appartiene al cretacico superiore, caratteristica che è comune agli altri giacimenti italiani di bauxiti: dell'Istria, degli Abruzzi, di Puglia e del Goriziano. La potenza dei vari banchi si aggira da uno a due metri: il loro tetto è abbastanza regolare ed è separato

---

[1]) Staesche M., e Wetzel J., *Röntgenographische untersuchungen über die thermischen Umwaldungen von diaspor-und boehmithaltingen Bauxiten*. Metall u Erz., *41*, 101 (1944).

[2]) Franco V., *Il giacimento di Cusano Mutri*. Rivista econ. Sannita, Benevento, 1921, n.ri 1 e 2. — Ronza G., *Note sulle risorse minerarie dell'Italia meridionale*. Napoli, Tip. Piacevole, 1927. — Maranelli A., *I giacimenti bauxitici del Sannio*. Bollettino Soc. Naturalisti, Napoli, *40*, 183 (1938-1939). — Sorasio U. *Nota sull'industria delle bauxiti in Italia e sulle possibilità presenti e future di quest'industria* l'Industria Mineraria, *9*, 301 (1937),

dalla bauxite centrale (la migliore) da uno strato di materiale più scadente, più friabile e più eterogeneo; il letto si presenta invece irregolare, con isole di calcare compatto.

L'estensione dei depositi di Cusano Mutri sarebbe ragguardevole, ma a tutt'oggi — e per quel che è a nostra conoscenza — non esiste una valutazione di massima di codesti depositi.

La roccia è spesso di color chiaro, bianco giallognolo sporco; talvolta di color rosato e ricca di venature ferruginose. Nel medesimo tenimento esistono altresì affioramenti di bauxiti ferrifere, intensamente colorate in rosso.

La tessitura di entrambi i tipi: chiaro e rosso, è sempre oolitica.

Anche le bauxiti del Monte Maggiore (tenimento di Dragoni) si presentano in forma di lenti incassate fra i calcari cretacici con potenze non superiori ai due metri.

A differenza delle bauxiti chiare di Cusano Mutri, qui la roccia, di color rosso scuro, accusa ovunque un alto contenuto di ferro.

I materiali in questione non hanno finora avuto pratica applicazione, nonostante qualche sporadico tentativo che non trovò, sul piano economico, una sua realizzazione stabilmente differibile nel tempo. Per l'elevato titolo di silice, che ha escluso dalla destinazione all'ottenimento dell'allumina Bayer le bauxiti chiare di Cusano Mutri; per il basso titolo di allumina quelle ferruginose del tenimento di Dragoni.

Ricordiamo soltanto che delle bauxiti chiare fu preconizzato l'impiego per la preparazione di materiali refrattari, di abrasivi, di cemento fuso o alluminoso, e delle prove in queste direzioni, eseguite su scala industriale sia in Italia sia all'estero, dettero risultato soddisfacente.

Si sono esaminati diversi campioni di bauxite chiara provenienti dal giacimento di Cusano Mutri, e di bauxite rossa di Dragoni.

La loro composizione chimica è indicata qui di seguito:

(materiali seccati a 110°)

BAUXITE CHIARA

Perdita al fuoco	14,94	15,40	16,01	14,84	14,74	14,45
SiO_2	7,07	8,20	5,82	6,98	6,81	7,70
Al_2O_3	65,11	65,03	66,89	66,00	65,75	66,85
TiO_2	2,00	1,50	1,94	1,81	2,10	2,00
Fe_2O_3	9,16	7,42	8,57	8,78	10,00	7,60
CaO	0,51	1,13	0,18	0,85	0,25	0,91
Non dosato	1,21	1,32	0,66	0,74	0,35	0,49

BAUXITE ROSSA

Perdita al fuoco	13,06	12,29	12,17	10,41	13,13	12,66
SiO_2	5,85	1,10	4,52	2,14	4,40	5,84
Al_2O_3	53,88	54,28	48,59	48,89	50,90	46,50
TiO_2	1,92	1,66	2,61	2,46	2,59	2,60
Fe_2O_3	25,20	30,64	32,04	35,96	28,90	32,00
CaO e non dosato	0,09	0,03	0,07	0,14	0,08	0,40

La tessitura di entrambi i tipi è oolitica, come appare dalle microfotografie della fig. 1, Tav. I, ricavate mediante l'esame in sezione lucida.

Si noti la distribuzione del ferro: il costituente chiaro, più riflettente è appunto l'oligisto.

L'idrossido di alluminio costituente fondamentale di entrambi le bauxiti è la boehmite: $\gamma\ Al_2O_3 \cdot H_2O$. Lo spettro di raggi X (Kα Cu; 10 mA; 45 K V; d = 57,4 mm.), riprodotto nella fig. 2, Tav. 1, è infatti lo spettro della boehmite [1]) salvo alcune righe estranee poco intense.

Lo spettro della bauxite rossa contiene altresì le righe più intense appartenenti allo spettro di $\alpha\ Fe_2O_3$.

Le due bauxiti: la chiara e la rossa, sono state sottoposte all'analisi termica differenziale, all'analisi termo-ponderale ed a quella termo-dilatometrica. Ho adoperato per i tre tipi di indagini degli apparecchi a registrazione fotografica e qui di seguito riporto per tanto le relative documentazioni originali.

All'analisi termica differenziale le due bauxiti accusano (fig. 3) un unico effetto endotermico che si inizia all'intorno dei 480° ed è dovuto alla decomposizione del monoidrato: $\gamma\ Al_2O_3 \cdot H_2O \longrightarrow \gamma\ Al_2O_3 + H_2O$. Non si notano altri effetti termici e quindi si deve escludere la presenza di: caolinite, goethite, limonite ecc., comunque per percentuali tali da essere avvertite da questo sensibile mezzo d'indagine.

I risultati dell'analisi termo-ponderale confermano quelli dell'analisi termica (fig. 4).

Si noti la caratteristica disidratazione per gradi dell'allumina Bayer.

Più interessante ai fini della interpretazione del fenomeno dell'attivazione è quello che si osserva con l'esame termo-dilatometrico, che è stato eseguito a mezzo del dilatometro Chevenard a registrazione fotografica.

---

[1]) Boehm J., *Über aluminium und Eisenhydroxide*, Zeit. anorg. allg. Chemie *149*, 203 (1925).

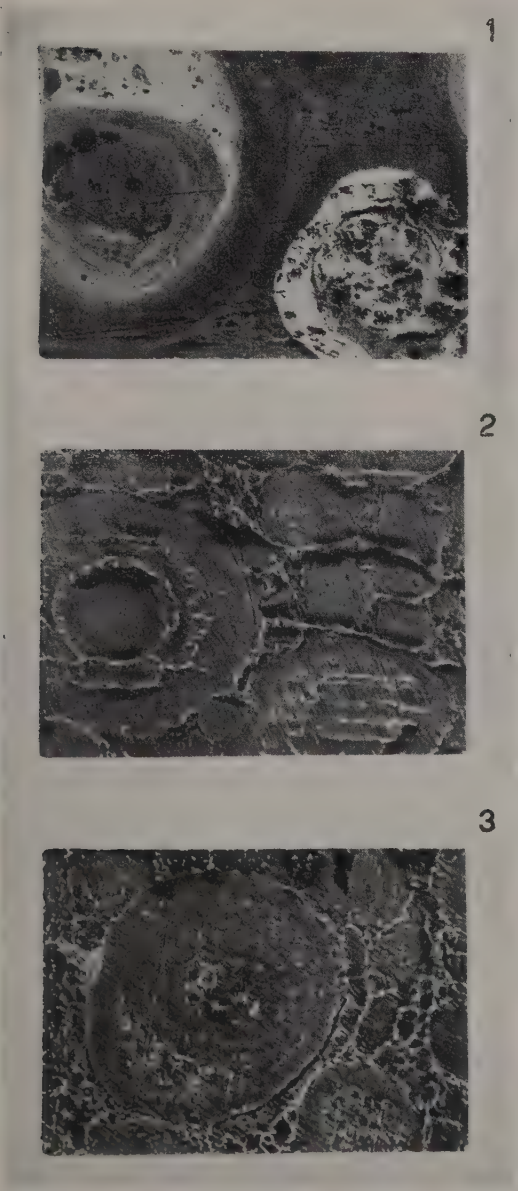


Fig. 1

(1) Bauxite rossa di Dragoni.
(2,3) Bauxiti chiare di Cusano Mutri.

Luce riflessa; Nicols ||; × 150

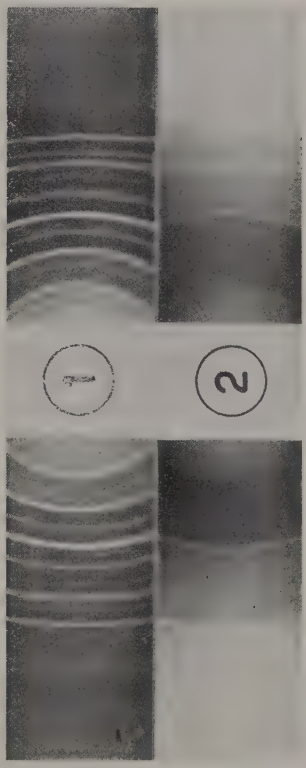


Fig. 2

(1) Bauxite chiara di Cusano Mutri
(2) Bauxite rossa di Dragoni.

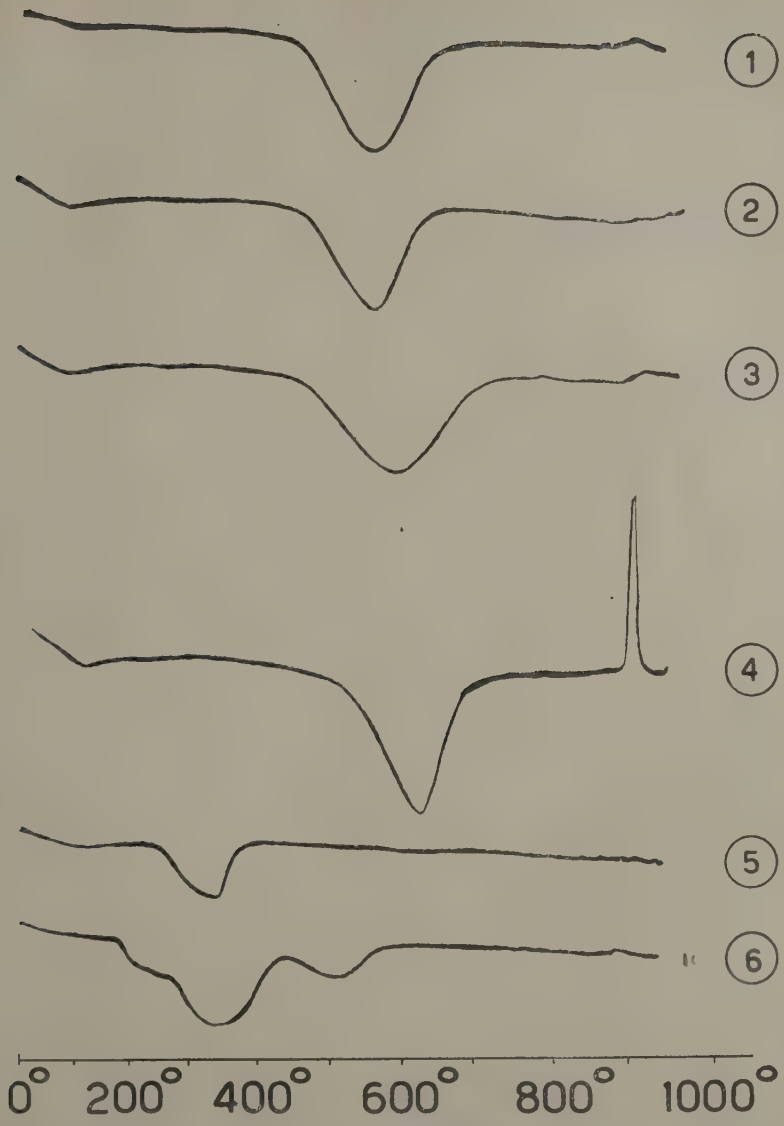


Fig. 3. — Analisi termica differenziale.

(1) Bauxite chiara di Cusano Mutri.
(2) Bauxite rossa di Dragoni.
(3) Bauxite chiara istriana.
(4) Caolino.
(5) Goethite.
(6) Allumina Bayer.

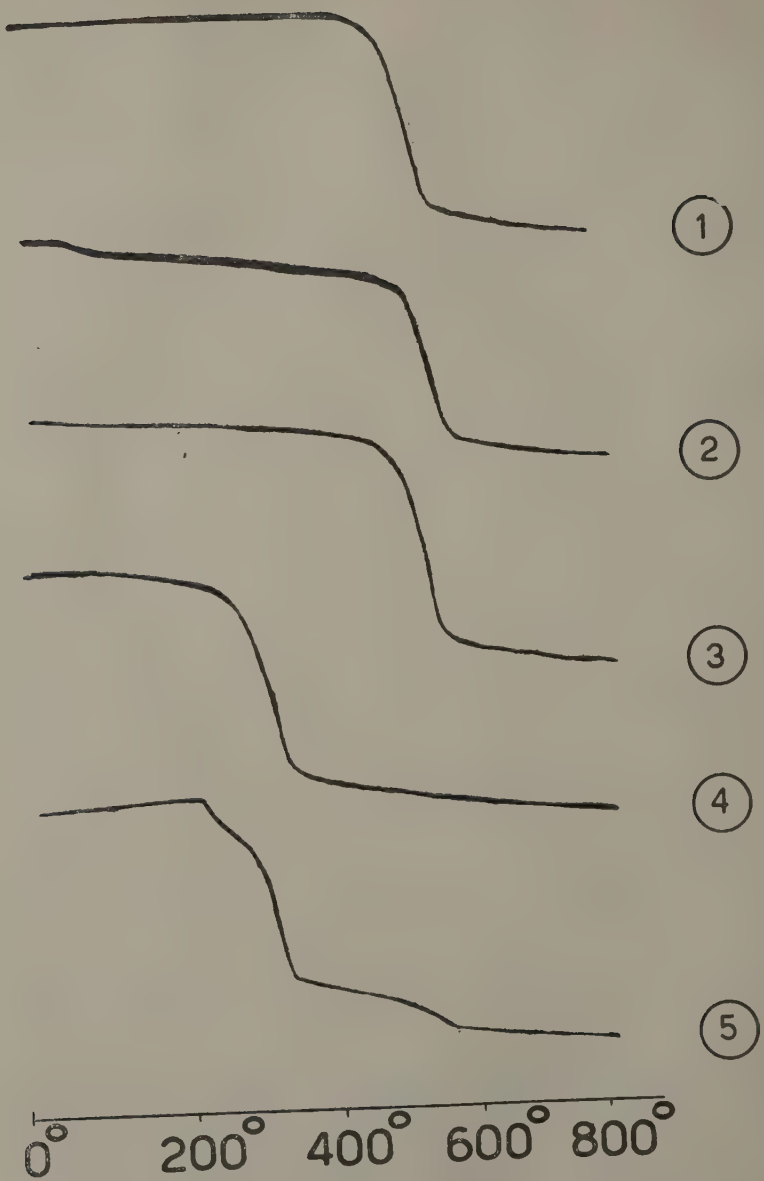


Fig. 4. — Analisi termo-ponderale.

(1) Bauxite chiara di Cusano Mutri;	perdita al fuoco: 15,70 %
(2) Bauxite rossa di Dragoni;	perdita al fuoco: 12,04 %
(3) Bauxite chiara istriana;	perdita al fuoco: 15,08 %
(4) Goethite;	perdita al fuoco: 11,76 %
(5) Allumina Bayer;	perdita al fuoco: 34,49 %

Il comportamento delle due bauxiti: la chiara e la rossa è identico (fig. 5). Si noti la brusca contrazione all'intorno dei 480°, dovuta all'inizio

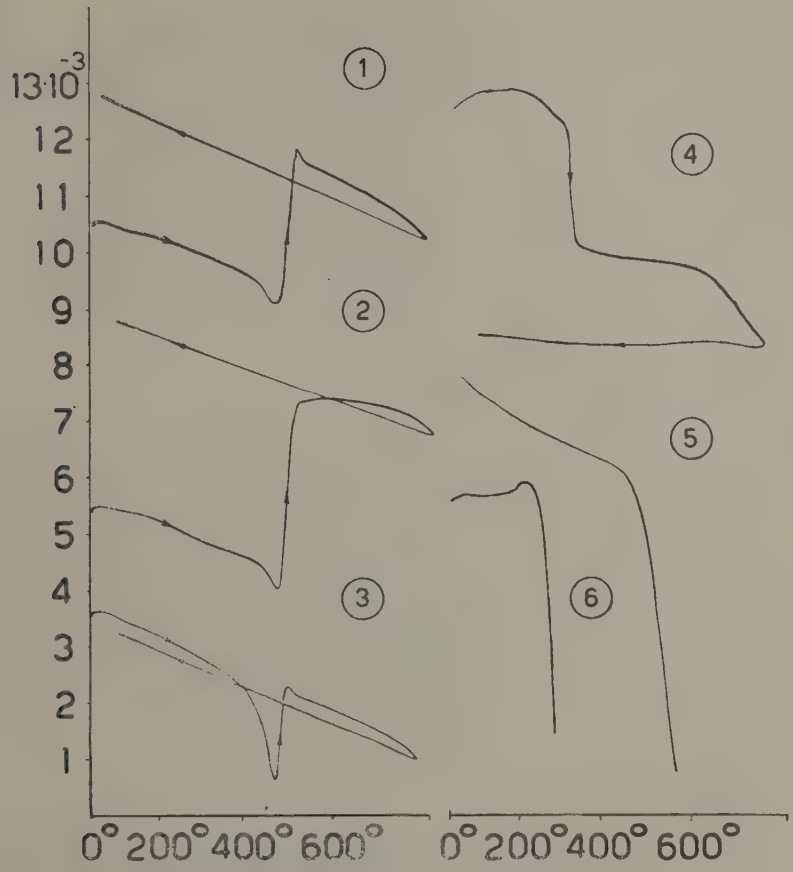


Fig. 5. — Analisi termo-dilatometrica (provini della lunghezza di cm. ?)

(1) Bauxite chiara di Cusano Mutri.
(2) Bauxite rossa di Dragoni.
(3) Bauxite chiara istriana.
(4) Goethite.
(5) Caolino.
(6) Allumina Bayer.

della disidratazione, a cui segue una repentina notevolissima dilatazione durante la quale viene ad eliminarsi la più gran parte dell'acqua.

Come si vede dai diagrammi la dilatazione è permanente.

A questa disidratazione quasi esplosiva è dovuta l'alta porosità, cioè la grande superficie specifica totale acquistata dal solido.

B. Long [1]), che ha constatato i medesimi fenomeni, attribuisce la brusca dilatazione all' eliminazione dell' acqua adsorbita tenacemente dalla γ allumina.

Che la dilatazione non sia dovuta a semplici grossolani dislocamenti del materiale è mostrato dal fatto che il fenomeno si presenta con circa la medesima entità sia per provini tagliati dalla roccia tal quale, sia per provini ottenuti agglomerando per forte pressione, in uno stampo di acciaio, delle polveri passanti al vaglio di 4900 maglie/cm^2, addizionate di qualche goccia di soluzione di silicato sodico.

L' azione del calore sulla tessitura oolitica della roccia è indicata dalle tre microfotografie della fig. 6, Tav. II, le quali mostrano il caratteristico tipo di crettatura osservabile quando le rocce in questione hanno subìto il trattamento termico a 600°.

A seguito della eliminazione dell' acqua dalle due bauxiti boehmitiche: la chiara e la rossa, prende origine dell' allumina γ, e riscaldando dei campioni a 500° per circa tre ore si può agevolmente osservare il röntgenogramma della γ Al_2O_3 la quale, con velocità tanto più grande quanto più alta è la temperatura, si trasforma nell'ossido stabile: α Al_2O_3 (fig. 7), Tav. III.

È anche qui interessante l' osservazione del diagramma termo-dilatometrico (fig. 8).

Un provino di bauxite (chiara) che ha subìto un primo ciclo termico, fino a 750° C., fornendo il diagramma 1, riscaldato di nuovo fino a 950° C. e nuovamente raffreddato, fornisce il diagramma 2 dal quale si rileva che solo all' intorno di 900° è registrata dall' apparecchio la contrazione permanente che accompagna il passaggio: γ Al_2O_3 $\longrightarrow$ α Al_2O_3.

In altri termini solo all' intorno dei 900° è sensibile la trasformazione: $\gamma \longrightarrow \alpha$.

Il risultato dell' indagine röntgenografica (fig. 7) è in accordo con quello delle esperienze dilatometriche, confermandosi così la precedente osservazione di Staesche e Wetzel [2]), per materiali similari.

Per le temperature e per le durate del trattamento termico da me adottate, ho potuto constatare sugli spettri di raggi X soltanto le due varietà: α e γ dell' ossido.

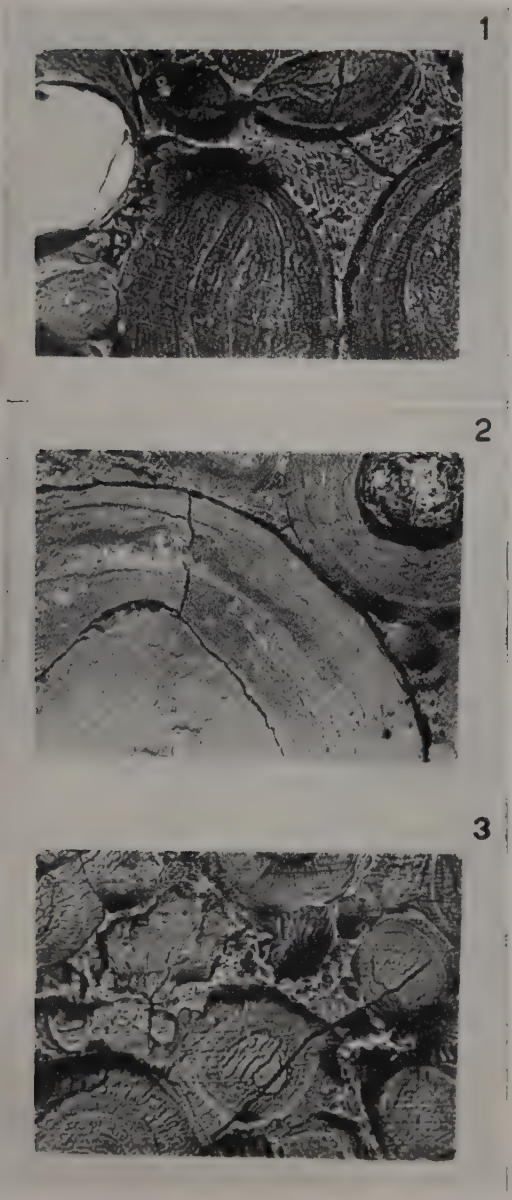
La bayerite artificiale invece, che ha fornito le curve: termica differenziale e termo-ponderale riportate nelle fig. 3 e 4, ha mostrato un comportamento diverso.

L' allumina γ che si ottiene a seguito della disidratazione totale a

---

[1]) Long B., *Sur la costitution et les propriétés des bauxites pour matériaux réfractaires*, La Céramique, Gennaio, (1933), p. 1.

[2]) L. c.



Bauxite di Dragoni, trattata a 600° C.
Luce riflessa; nicols //, × 150.

Bauxite chiara, trattata a 600° C.
Luce riflessa; nicols //; × 150.

Bauxite di Cusano Mutri, trattata a 600° C.
Luce riflessa; nicols //; × 150.

Fig 6

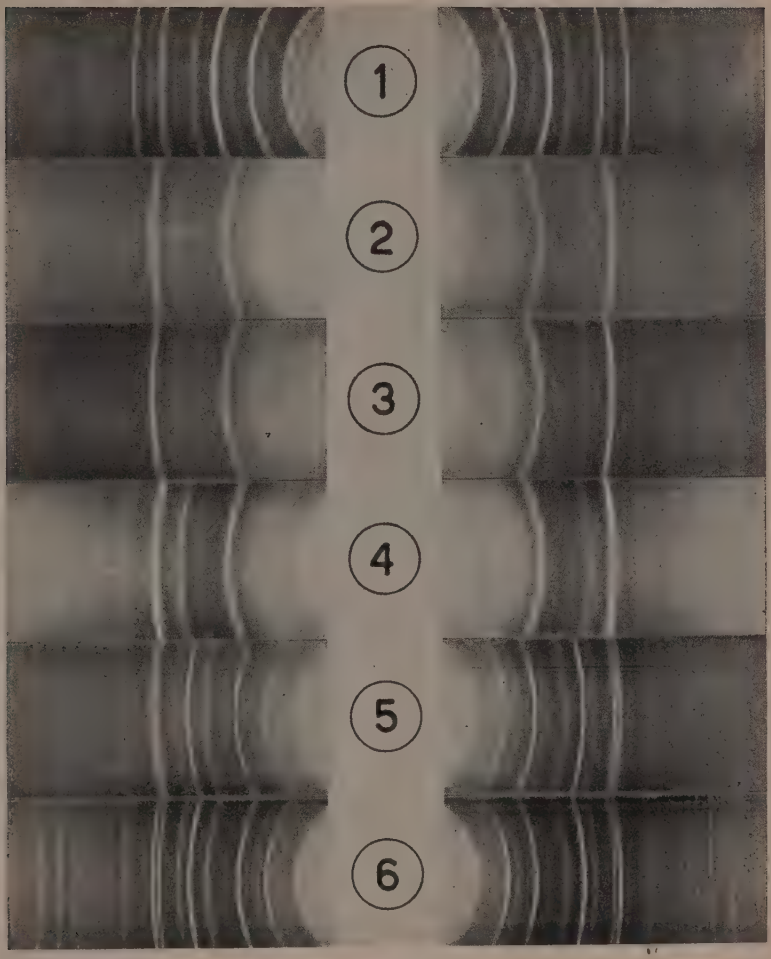


Fig. 7

(1) Bauxite chiara di Cusano Mutri, dopo trattamento di 3 ore a 400°.
(2) » » » » » » » » » » 500°.
(3) » » » » » » » » » » 800°.
(4) » » » » » » » » » » 900°.
(5) » » » » » » » » » » 1000°.
(6) » » » » » » » » 2 » 1150°.

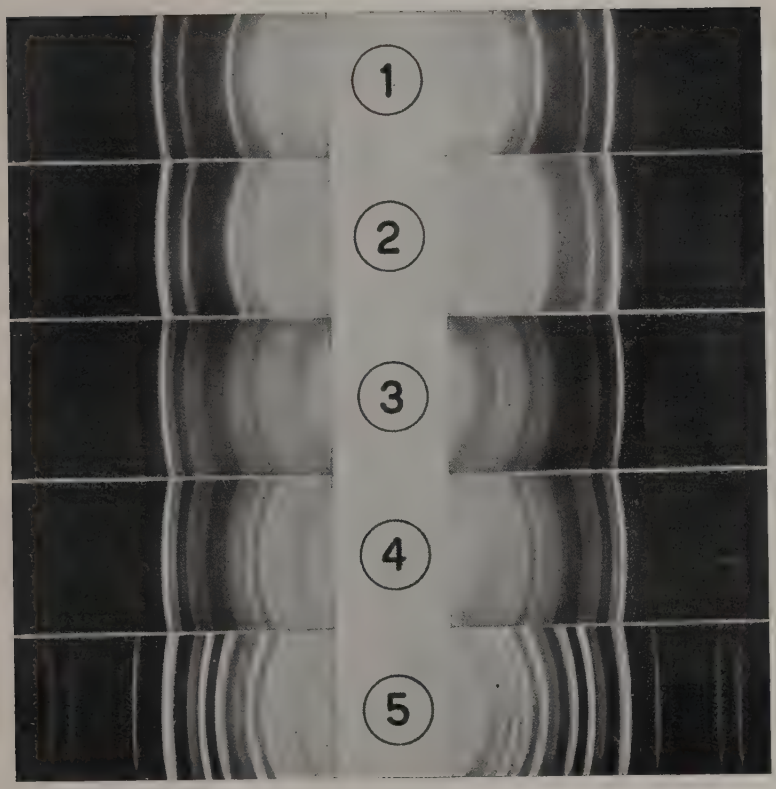


Fig. 9

(1) Allumina Bayer; dopo trattamento di 3 ore a 500°
(2) » » » » » 4 » » 800°.
(3) » » » » » 2 » » 900°.
(4) » » » » » 4 » » 900°.
(5) » » » » » 4 » » 1000°.

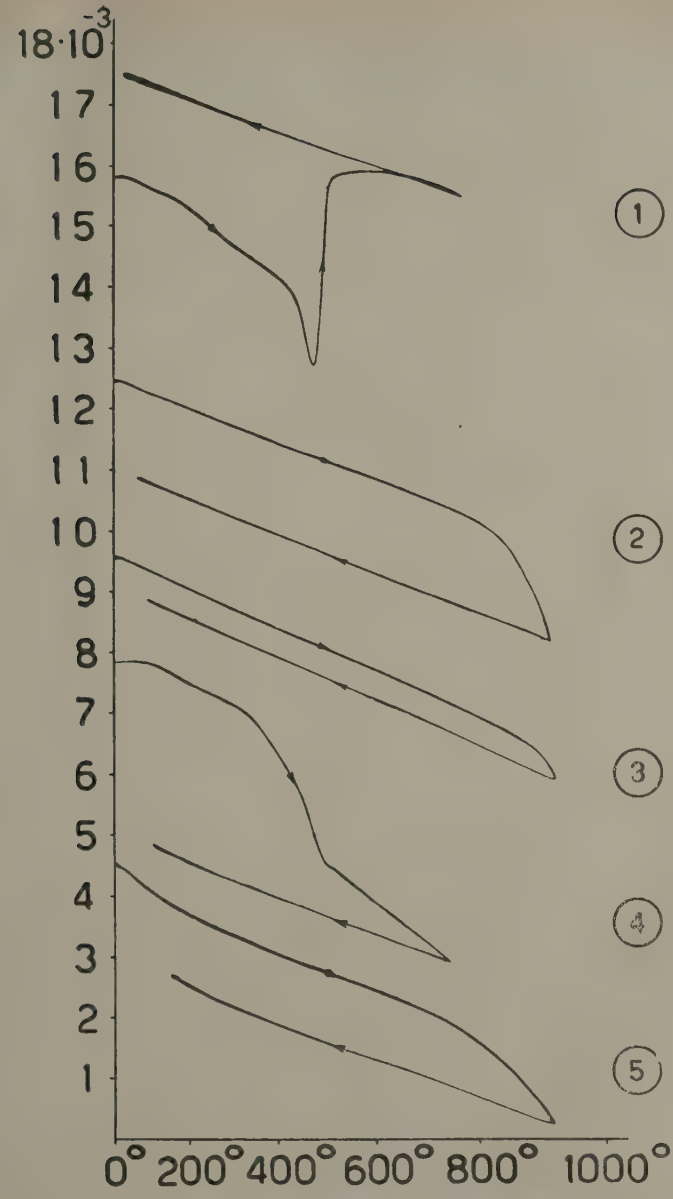


Fig. 8. — Analisi termo-dilatometrica (provini della lunghezza di cm. 2).

(1) Bauxite chiara di Cusano Mutri; primo ciclo; fino a 800°.
(2) Bauxite chiara di Cusano Mutri; secondo ciclo; fino a 950°.
(3) Bauxite chiara di Cusano Mutri; terzo ciclo; fino a 950°.
(4) Allumina Bayer; lo stesso provino di cui alla curva n. 6 della fig. 5; secondo ciclo; fino a 750°.
(5) Allumina Bayer; terzo ciclo; fino a 950°

circa 500°, passa ad allumina α attraverso una nuova fase (fig. 9), Tav. IV, che per le mie condizioni di lavoro compare solo a seguito del trattamento termico a 900°. A 1000°, tuttavia, è visibile unicamente lo spettro di αAl_2O_3.

* * *

Ho già accennato in precedenza al fatto, posto in evidenza da La Lande, Mc. Carter e Sanborn [1]) che il massimo dell'attivazione per le bauxiti dell'Arkansas, di tipo gibbsitico o idrargillitico, lo si osserva prima che si sia completata la demolizione termica di $\gamma Al_2O_3 \cdot H_2O$, dopo di che la su ricordata attività decresce abbastanza bruscamente fino ad annullarsi prima dei 1000°, cioè verso le temperature alle quali la velocità del passaggio: $\gamma \longrightarrow \alpha$ è notevole.

I diagrammi termo-dilatometrici pongono poi in evidenza che la lieve dilatazione termica del materiale risultante dalla dipartita dell'acqua a bassa temperatura è assolutamente uniforme e solo al disopra di 900° si osserva la contrazione che caratterizza la trasformazione: $\gamma \longrightarrow \alpha$.

Se ne deduce che la tessitura del materiale non cambia dalla temperatura di disidratazione alle temperature alle quali avviene con sufficiente velocità la trasformazione su ricordata. È quindi all'estrema suddivisione dell'allumina γ risultante dalla eliminazione a bassa temperatura della più gran parte dell'acqua della boehmite, alla presenza in gran numero di pori piccolissimi che innalzano il valore della superficie attiva totale che si deve l'attivazione termica dei materiali bauxitici sia a boehmite sia a gibbsite o idrargillite.

La disattivazione che si nota di mano in mano che aumenta la temperatura del trattamento è altresì dovuta all'ingrossamento dei cristalli di γAl_2O_3 con conseguente diminuzione della superficie attiva.

Non avendo fra mano dei campioni di bauxite a diasporo e ad idrargillite non ho potuto fino ad oggi indagare sul comportamento termico di questi materiali. Mi riservo per tanto di esaminarli in un successivo lavoro.

Napoli – Istituto di Chimica Industriale dell'Università

---

[1]) L. c.

Sulla convergenza degli sviluppi in serie di autosoluzioni associati ad un problema ai limiti relativo ad un' equazione differenziale ordinaria del secondo ordine

Nota del dott. **Donato Greco**, *presentata dal socio* **Vittorio Nobile**

(Adunanza del dì 3 giugno 1950)

Sunto. — In questa Nota l' A. assegna le espressioni asintotiche degli autovalori e delle autosoluzioni di un problema ai limiti relativo ad un' equazione differenziale lineare del secondo ordine. Ciò gli permette di perfezionare l' analisi della convergenza degli sviluppi in serie di autosoluzioni, già da lui conseguiti in un precedente lavoro, mediante confronto con opportune serie trigonometriche di natura ben nota.

I. In una Memoria di recente pubblicazione [1]), alla quale rimanderò il lettore con la citazione (T_2), mi sono occupato della ricerca degli sviluppi in serie di autosoluzioni collegati al problema ai limiti relativo all' equazione differeziale:

$$\text{(I)} \qquad \frac{d}{dx}\left[\Theta(x)\frac{dy}{dx}\right] + [\lambda A(x) + B(x)]\, y = 0$$

con le condizioni:

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} K_1^{(\lambda)}[y] = (\alpha_{1,1}\lambda + \alpha'_{1,1})\, y(a) + (\alpha_{1,2}\lambda + \alpha'_{1,2})\, y'(a) = 0 \\ K_2^{(\lambda)}[y] = (\alpha_{2,1}\lambda + \alpha'_{2,1})\, y(b) + (\alpha_{2,2}\lambda + \alpha'_{2,2})\, y'(b) = 0 \end{cases}$$

problema già da me trattato in un precedente lavoro [2]), che nel testo verrà designato con (T_1), nelle ipotesi che le $\Theta(x)$, $A(x)$, $B(x)$ fossero funzioni finite e continue nel tratto finito (a, b) e che inoltre risultasse, in tutto (a, b):

$$\text{(III)} \qquad \Theta(x) > 0 \quad ; \quad A(x) > 0 \quad ; \quad B(x) < 0$$

nonchè:

$$\text{(IV)} \qquad A_1 = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha'_{1,1} \\ \alpha_{1,2} & \alpha'_{1,2} \end{vmatrix} > 0 \quad ; \quad A_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{2,1} & \alpha'_{2,1} \\ \alpha_{2,2} & \alpha'_{2,2} \end{vmatrix} < 0.$$

---

[1]) *Gli sviluppi in serie di autosoluzioni in un problema ai limiti ecc.* (Giornale di Matematiche di Battaglini, serie IV, vol. 79, pp. 86-120).

[2]) *Su un problema ai limiti per un' equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine.* (Giorn. di Mat. di Battaglini, serie IV, vol. 78, pp. 216-237).

Mediante traduzione del problema in equazione integrale, ho stabilito, in (T_3), alcuni risultati che possono brevemente riassumersi come segue.

All'equazione (I), con le condizioni ai limiti (II), si associano una successione $\{\lambda_n\}$ di autovalori ed una corrispondente successione $\{y_n(x)\}$ di autofunzioni verificanti le condizioni di pseudoortonormalità:

$$\text{(V)} \qquad \int_a^b A(\xi)\, y_n(\xi)\, y_m(\xi)\, d\xi + A_1 \Theta(a)\, \sigma_n \sigma_m - A_2 \Theta(b)\, \tau_n \tau_m = \varepsilon_{n,m}$$

dove è [1]):

$$\text{(VI)} \qquad \sigma_k = y_k(a)\,(\alpha_{1,2}\lambda_k + \alpha'_{1,2})^{-1} \quad ; \quad \tau_k = y_k(b)\,(\alpha_{2,2}\lambda_k + \alpha_{2,2})^{-1}$$

ed è

$$\varepsilon_{n,m} = \begin{cases} 0 \text{ per } n \neq m \\ 1 \text{ per } n = m \end{cases}.$$

Mediante il sistema $\{y_n(x)\}$ è realizzabile lo sviluppo in serie di una funzione $F(x)$, assolutamente continua con la sua derivata prima e dotata di derivata seconda di quadrato sommabile in (a, b); tale sviluppo è fornito da [2]):

$$\text{(VII)} \qquad F(x) = \sum_n y_n(x) \left\{ \int_a^b A(\xi)\, F(\xi)\, y_n(\xi)\, d\xi + \Theta(a)\, \overline{K}_1[F]\, \sigma_n - \Theta(b) \overline{K}_2[F]\, \tau_n \right\}$$

e risulta uniformemente convergente in (a, b).

Sussistono inoltre i due sviluppi dello zero [3]):

$$\text{(VIII)} \qquad \sum_n \sigma_n y_n(x) \doteq 0 \quad ; \quad \sum_n \tau_n\, y_n(x) \doteq 0$$

dei quali, in (T_3), ho potuto assicurare solo la convergenza in media. Tali sviluppi permettono poi di assegnare, per una funzione $F(x)$ del tipo summenzionato, lo sviluppo:

$$\text{(IX)} \qquad F(x) \doteq \sum_n y_n(x) \left\{ \int_a^b A(\xi)\, F(\xi)\, y_n(\xi)\, d\xi + c_1 \sigma_n + c_2 \tau_n \right\}$$

convergente in media, qualunque siano le costanti c_1 e c_2, e dal quale si trae lo sviluppo (VII) particolarizzando le costanti.

---

[1]) Si ricordi a proposito delle σ_n e τ_n, l'osservazione fatta in (T_2), pag. 21.

[2]) Si tengano presenti le notazioni $K_r^{(\lambda)} = K_r^{(0)} + \lambda \overline{K}_r$ adottate in (T_2), pag. 5.

[3]) Il simbolo $\doteq$ viene qui adoperato per denotare la convergenza in media.

Se, mantenendo una sola delle ipotesi (IV), si suppone che uno dei determinanti A_i sia nullo, talchè la corrispondente condizione ai limiti venga a risultare indipendente da λ, esiste ancora un sistema di autovalori e di autofunzioni, ma non è più possibile lo sviluppo, uniformemente convergente, di una funzione $F(x)$ arbitraria. Risultano bensì sviluppabili, con sviluppo uniformemente convergente, le funzioni assolutamente continue con la loro derivata prima e dotate di derivata seconda di quadrato sommabile, ma verificanti la condizione ai limiti indipendente da λ. Posto che sia $A_2 = 0$ $[A_1 = 0]$, nel qual caso la condizione in b [in a] si riduce a $\overline{K}_2[y] = 0$ $[\overline{K}_1[y] = 0]$, lo sviluppo di una funzione $F(x)$ verificante la condizione $\overline{K}_2[F] = 0$ $[\overline{K}_1[F] = 0]$ è dato da:

$$\text{(X)} \qquad \begin{cases} F(x) = \sum_n y_n(x) \left\{ \int_a^b A(\xi)\, F(\xi)\, y_n(\xi)\, d\xi + \Theta(a)\, \overline{K}_1[F]\, \sigma_n \right\} \\ \left[F(x) = \sum_n y_n(x) \left\{ \int_a^b A(\xi)\, F(\xi)\, y_n(\xi)\, d\xi - \Theta(b)\, \overline{K}_2[F]\, \tau_n \right\} \right] \end{cases}$$

e risulta uniformemente convergente in (a, b). I due sviluppi dello zero si riducono ad uno solo, che è il primo [il secondo] degli (VIII), e lo sviluppo di $F(x)$, convergente in media, che non dipende peraltro dai valori di $F(x)$ agli estremi di (a, b), viene a dipendere da una sola costante arbitraria ed è:

$$\text{(XI)} \qquad \begin{cases} F(x) \doteq \sum_n y_n(x) \left\{ \int_a^b A(\xi)\, F(\xi)\, y_n(\xi)\, d\xi + c\sigma_n \right\} \\ \left[F(x) \doteq \sum_n y_n(x) \left\{ \int_a^b A(\xi)\, F(\xi)\, y_n(\xi)\, d\xi + c\tau_n \right\} \right]. \end{cases}$$

Ovviamente poi, qualora entrambi i determinanti A_i siano nulli, entrambe le condizioni ai limiti riescono indipendenti da λ ed il problema (I)-(II) si identifica con l'ordinario problema di Sturm-Liouville, onde gli sviluppi in serie di autofunzioni che in tal caso sussistono si inquadrano in risultati ben noti [1]).

II. Se alle ipotesi di continuità per le funzioni $\Theta(x)$, $A(x)$, $B(x)$ ed alle (III), poste a base della trattazione in (T_1) e (T_2), si aggiunge quella dell'esistenza e della continuità delle derivate prime e seconde di $\Theta(x)$ ed $A(x)$, un ben noto cambiamento della variabile e della funzione incognita [2])

---

[1]) Cfr. ad es. E. C. Titchmarsh, *Eigenfunction expansions associated with second order differential equations*, cap. II, pag. 19 e segg.

[2]) V. a) G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale*, parte I, pag. 238; b) F. Tricomi, *Equazioni differenziali*, pag. 175.

permette di sostituire alla (I) l'equazione:

$$\text{(XII)} \qquad \frac{d^2\eta}{dt^2} + [\mu - p(t)]\,\eta = 0$$

ed alle condizioni (II), condizioni del tipo [1]:

$$\text{(XIII)} \qquad \begin{cases} G_1^{(\mu)}[\eta] = (\beta_{1,1}\mu + \beta'_{1,1})\,\eta(0) + (\beta_{1,2}\mu + \beta'_{1,2})\,\eta'(0) = 0 \\ G_2^{(\mu)}[\eta] = (\beta_{2,1}\mu + \beta'_{2,1})\,\eta(\pi) + (\beta_{2,2}\mu + \beta'_{2,2})\,\eta'(\pi) = 0 \end{cases}$$

nei punti 0 e π, e non riesce difficile verificare che, posto:

$$B_1 = \begin{vmatrix} \beta_{1,1} & \beta'_{1,1} \\ \beta_{1,2} & \beta'_{1,2} \end{vmatrix} \quad ; \quad B_2 = \begin{vmatrix} \beta_{2,1} & \beta'_{2,1} \\ \beta_{2,2} & \beta'_{2,2} \end{vmatrix}$$

i determinanti B_i si ottengono dai corrispondenti A_i moltiplicando questi per opportuni fattori costanti positivi, onde le ipotesi (IV) si traducono nelle analoghe:

$$\text{(XIV)} \qquad B_1 > 0 \quad ; \quad B_2 < 0.$$

Per la (XII), con le condizioni (XIII), nelle ipotesi (XIV), restano dunque validi i risultati di (T_1) e (T_2), onde agli autovalori $\{\lambda_n\}$ ed alle autofunzioni $\{y_n(x)\}$ del problema (I)-(II) corrispondono gli autovalori $\{\mu_n\}$ e le autofunzioni $\{\eta_n(t)\}$ del problema (XII)-(XIII).

Nel seguito dunque noi ci riferiremo sempre all'equazione (XII), con le condizioni (XIII) e, poichè la successione degli autovalori μ_n ha per unico punto di accumulazione $+\infty$, ossia contiene infiniti autovalori positivi e, al più, un numero finito di autovalori negativi [2]), converremo di denotare con gli indici da 1 a $+\infty$ gli autovalori positivi, attribuendo indici negativi agli autovalori negativi. Con questa convenzione gli sviluppi in serie che interverranno nei nostri ragionamenti saranno indicati con la notazione $\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n$, nell'intesa che la $\sum_{-\infty}^{0}{}_n$ rappresenti la somma dei termini corrispondenti ad autovalori negativi, mentre la $\sum_{1}^{+\infty}{}_n$ denoti la somma dei termini relativi ad autovalori positivi.

---

[1]) Per le $G_r^{(\mu)}$ adotteremo qui le notazioni: $G_r^{(\mu)}[\eta] = G_r^{(0)}[\eta] + \mu\, G_r[\eta]$, ove è: $G_1[\eta] = \beta_{1,1}\,\eta(0) + \beta_{1,2}\,\eta'(0)$; $G_1^{(0)}[\eta] = \beta'_{1,1}\,\eta(0) + \beta'_{1,2}\,\eta'(0)$
$G_2[\eta] = \beta_{2,1}\,\eta(\pi) + \beta_{2,2}\,\eta'(\pi)$; $G_2^{(0)}[\eta] = \beta'_{2,1}\,\eta(\pi) + \beta'_{2,2}\,\eta'(\pi)$,
notazioni analoghe a quelle di cui alla nota [2]) di pag. 2.

[2]) Cfr. (T_1), teorema III.

Osservando che la condizione di pseudoortonormalità (V) è ora sostituita dalla:

$$\text{(XV)} \qquad \int_0^{\pi} \eta_n(\tau)\,\eta_m(\tau)\,d\tau + B_1\gamma_n\gamma_m - B_2\delta_n\delta_m = \varepsilon_{n,m}$$

relativa alle autofunzioni $\eta_n(t)$, dove si è posto [1]):

$$\text{(XVI)} \qquad \gamma_n = \eta_n(0)\,(\beta_{1,2}\mu_n + \beta'_{1,2})^{-1} \quad ; \quad \delta_n = \eta_n(\pi)\,(\beta_{2,2}\mu_n + \beta'_{2,2})^{-1},$$

secondo la convenzione di cui sopra, agli sviluppi (VII), (VIII) e (IX) corrispondono rispettivamente gli sviluppi:

$$\text{(VII')} \qquad \Phi(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \eta_n(t) \left\{ \int_0^{\pi} \Phi(\tau)\,\eta_n(\tau)\,d\tau + \overline{G}_1[\Phi]\gamma_n - G_2[\Phi]\delta_n \right\}$$

$$\text{(VIII')} \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \gamma_n\,\eta_n(t) = 0 \quad ; \quad \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \delta_n\,\eta_n(t) = 0$$

$$\text{(IX')} \qquad \Phi(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \eta_n(t) \left\{ \int_0^{\pi} \Phi(\tau)\,\eta_n(\tau)\,d\tau + c_1\gamma_n + c_2\delta_n \right\},$$

mentre, poichè all'ipotesi $A_i = 0$ corrisponde l'analoga $B_i = 0$, agli sviluppi (X) ed (XI) corrispondono, rispettivamente, gli sviluppi:

$$\text{(X')} \qquad \Phi(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \eta_n(t) \left\{ \int_0^{\pi} \Phi(\tau)\,\eta_n(\tau)\,d\tau + \overline{G}_1[\Phi]\gamma_n \right\}$$

$$\left[\Phi(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \eta_n(t) \left\{ \int_0^{\pi} \Phi(\tau)\,\eta_n(\tau)\,d\tau - \overline{G}_2[\Phi]\delta_n \right\} \right]$$

e

$$\text{(XI')} \qquad \Phi(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \eta_n(t) \left\{ \int_0^{\pi} \Phi(\tau)\,\eta_n(\tau)\,d\tau + c\gamma_n \right\}$$

$$\left[\Phi(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \eta_n(t) \left\{ \int_0^{\pi} \Phi(\tau)\,\eta_n(\tau)\,d\tau + c\delta_n \right\} \right].$$

---

[1]) Con la convenzione che, ove sia $b_{1,2}(\mu_n) = 0$ $[\beta_{2,2}(\mu_n) = 0]$, il che implica $\eta_n(0) = 0$ $[\eta_n(\pi) = 0]$, si porrà:

$$\gamma_n = -\eta'_n(0)\,(\beta_{1,1}\mu_n + \beta'_{1,1})^{-1} \quad , \quad \delta_n = -\eta'_n(\pi)\,(\beta_{2,1}\mu_n + \beta'_{2,1})^{-1}.$$

Gli sviluppi in serie di autofunzioni $\eta_n(t)$ hanno naturalmente lo stesso campo di validità degli sviluppi in serie di autofunzioni $y_n(x)$ di cui sono corrispondenti, ed in essi le funzioni $\Phi(t)$ sono le trasformate delle corrispondenti $F(x)$ mediante la sostituzione effettuata sulla (I).

Scopo della presente Nota è di aggiungere ai risultati di (T_1) e (T_2) alcuni complementi riguardanti la valutazione asintotica degli autovalori e delle autofunzioni, che permettono di perfezionare l'analisi della convergenza degli sviluppi in serie collegati al problema.

Alla valutazione asintotica pervengo applicando al problema (XII)-(XIII) un procedimento ormai classico adottato da Hobson per la valutazione asintotica degli autovalori e delle autofunzioni dei problemi di Sturm-Liouville [1]). Tale procedimento permette di riconoscere che gli autovalori del problema (XII)-(XIII) hanno la stessa espressione asintotica degli autovalori e delle autofunzioni del problema di Sturm-Liouville relativo alla (XII) ed alle condizioni ai limiti:

$$\overline{G}_1[\eta] = 0 \quad ; \quad \overline{G}_2[\eta] = 0$$

per cui i due problemi posson dirsi asintotici.

Quanto agli sviluppi in serie, un'analisi diretta, basata sul confronto delle serie relative ad autovalori positivi con opportune serie trigonometriche della cui convergenza è ben nota la natura, mi ha condotto a riconoscere che gli sviluppi dello zero convergono uniformemente quando i coefficienti di $\eta'(0)$ ed $\eta'(\pi)$ nelle (XIII) dipendono effettivamente dal parametro. Quando invece il coefficiente della η in una delle (XIII) è indipendente dal parametro, il corrispondente sviluppo dello zero, se esiste, converge uniformemente in ogni intervallo, contenuto in $(0, \pi)$ che escluda l'estremo di $(0, \pi)$ cui corrisponde la suddetta condizione (XIII).

Ulteriori precisazioni concernono poi gli sviluppi di una funzione in serie di autofunzioni, come sarà precisato nel testo.

La traduzione dei risultati stabiliti per il problema (XII)-(XIII) nei risultati analoghi per il problema (I)-(II) è ovvia in virtù di quanto abbiamo premesso e pertanto ci asteniamo dall'esporla esplicitamente.

§ 1.

Le espressioni asintotiche degli autovalori e delle autofunzioni.

1. Consideriamo l'equazione differenziale (XII) ove la $p(t)$ si suppone continua ed a variazione limitata in $(0, \pi)$, e le condizioni ai limiti (XIII).

---

[1]) E. W. Hobson, *On a general convergence theorem and the theory of representation of a function by series of normal functions.* (Proceedings of the London Math. Soc., 1908). Il procedimento è peraltro riportato in G. Sansone, loc. cit., pag. 241 e seg.

Posto, nelle (XII) e (XIII), $\mu = k^2$, tali equazioni si scrivono:

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + [k^2 - p(t)]\,\eta = 0 \tag{1}$$

$$\begin{cases} L_1^{(k)}[\eta] = b_{1,1}(k)\,\eta(0) + b_{1,2}(k)\,\eta'(0) = 0 \\ L_2^{(k)}[\eta] = b_{2,1}(k)\,\eta(\pi) + b_{2,2}(k)\,\eta'(\pi) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

essendo [1]:

$$b_{i,j}(k) = \beta_{i,j}\,k^2 + \beta'_{i,j}.$$

Gli autovalori positivi μ_n del problema (XII)-(XIII) sono legati agli autovalori reali k_n del problema (1)-(2) dalle relazioni:

$$\mu_n = k_n^2 \tag{3}$$

mentre gli autovalori negativi del problema (XII)-(XIII) corrispondono agli eventuali autovalori immaginari del problema (1)-(2). Poichè gli autovalori negativi del problema (XII)-(XIII) sono in numero finito, ci occuperemo qui della valutazione asintotica dei soli autovalori positivi, onde, in forza delle (3), potremo limitarci all'esame dell'equazione (1) con le condizioni (2) per k reale.

Nel nostro esame noi supporremo sempre che almeno una delle condizioni ai limiti (2) dipenda effettivamente dal parametro k, il che è certamente assicurato dall'ipotesi che per i determinanti (XIV), sia:

$$B_1 \geq 0 \quad ; \quad B_2 \leq 0 \tag{4}$$

non sussistendo simultaneamente i segni di uguaglianza.

Esamineremo perciò separatamente i seguenti casi, relativi alla condizione $L_1^{(k)}[\eta] = 0$:

C_1) La condizione $L_1^{(k)}[\eta] = 0$ dipende effettivamente da k, ed è $\beta_{1,2} \neq 0$.

C_2) La condizione $L_1^{(k)}[\eta] = 0$ dipende effettivamente da k, ed è $\beta_{1,2} = 0$ e, quindi, $\beta_{1,1}\,\beta'_{1,2} \neq 0$.

C_3) La condizione $L_1^{(k)}[\eta] = 0$ è indipendente da k per essere: $\beta_{1,1} = \beta_{1,2} = 0$, onde la condizione stessa si riduce a:

$$\overline{L}_1[\eta] = \beta_{1,1}\,\eta(0) + \beta_{1,2}\,\eta'(0) = 0. \tag{5}$$

C_4) La condizione $L_1^{(k)}[\eta] = 0$ si riduce alla:

$$\eta(0) = 0 \tag{6}$$

[1]) Per le $L_r^{(k)}$ si adottano notazioni analoghe a quelle di cui alla nota [1]) di pag. 4.

oppure all'altra:

$$\eta'(0) = 0. \tag{7}$$

D'ora in poi porremo $\beta_{1,2} = 1$ ($\beta_{2,2} = 1$), quando sia $\beta_{1,2} \neq 0$ ($\beta_{2,2} \neq 0$); $\beta'_{1,2} = 1$ ($\beta'_{2,2} = 1$), quando sia $\beta_{1,2} = 0$, $\beta'_{1,2} \neq 0$ ($\beta_{2,2} = 0$, $\beta'_{2,2} \neq 0$). Inoltre, secondo una notazione usuale, con $\alpha(t, k)$ denoteremo una funzione definita nella striscia $\begin{pmatrix} 0 \leq t \leq \pi \\ 0 \leq k < +\infty \end{pmatrix}$, limitata rispetto a t e definitivamente limitata rispetto a k, e con $\alpha(k)$ una funzione di k definitivamente limitata in $(0, +\infty)$.

Posto:

$$(8)\quad \begin{cases} Q_1 = \beta_{2,1} - \beta_{1,1} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi p(\tau)d\tau\,;\; R_1 = -\beta_{2,1}^{-1} - \beta_{1,1} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi p(\tau)d\tau\,;\; P_1(t) = -\beta_{1,1} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t p(\tau)d\tau \\ Q_2 = \beta_{2,1} + \beta_{1,1}^{-1} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi p(\tau)d\tau\,;\; R_2 = -\beta_{2,1}^{-1} + \beta_{1,1}^{-1} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi p(\tau)d\tau\,;\; P_2(t) = 1 + \dfrac{\beta_{1,1}}{2}\displaystyle\int_0^t p(\tau)d\tau \\ Q_3 = \beta_{2,1} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi p(\tau)d\tau \qquad ;\; R_3 = -\beta_{2,1}^{-1} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi p(\tau)d\tau\,;\; P_3(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t p(\tau)d\tau\,, \end{cases}$$

sussistono, in corrispondenza dei vari casi C_i), i seguenti teoremi:

Teorema I: «*Nel caso C_1), l'espressione asintotica dell'n^{mo} autovalore positivo è:*

$$k_n = \sqrt{\mu_n} = n + Q_1\pi^{-1}n^{-1} + \alpha(n)\,n^{-2} \qquad \text{per } \beta_{2,2} = 1; \tag{9}$$

$$k_n = \sqrt{\mu_n} = \left(n + \frac{1}{2}\right) + R_1\pi^{-1}\left(n + \frac{1}{2}\right)^{-1} + \alpha(n)\left(n + \frac{1}{2}\right)^{-2} \qquad \text{per } \beta_{2,2} = 0\,;\ \beta'_{2,2} = 1 \tag{10}$$

e l'espressione asintotica dell'n^{ma} autofunzione normalizzata è:

$$\eta_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\left[1 + \frac{\alpha(t,n)}{n^2}\right]\cos nt + \left[P_1(t) - \frac{Q_1 t}{\pi} + \frac{\alpha(t,n)}{n}\right]\frac{\operatorname{sen} nt}{n}\right\} \tag{11}$$

per $\beta_{2,2} = 1$;

$$\eta_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\left[1 + \frac{\alpha(t,n)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\right]\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t + \left[P_1(t) - \frac{R_1 t}{\pi} + \frac{\alpha(t,n)}{n+\frac{1}{2}}\right]\frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{n+\frac{1}{2}}\right\} \tag{12}$$

per $\beta_{2,2} = 0$, $\beta'_{2,2} = 1$.

Teorema II: « *Nel caso C_2), l'espressione asintotica dell'n^{mo} autovalore positivo è:*

(13) $k_n = \sqrt{\mu_n} = \left(n+\frac{1}{2}\right) + Q_2\pi^{-1}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-1} + \alpha(n)\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-2}$ *per* $\beta_{2,2}=1$;

(14) $k_n = \sqrt{\mu_n} = n + R_2\pi^{-1}n^{-1} + \alpha(n)\,n^{-2}$ *per* $\beta_{2,2}=0$, $\beta'_{2,2}=1$,

e l'espressione asintotica dell' n^{ma} autofunzione normalizzata è:

(15) $$\eta_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\left[1+\frac{\alpha(t,n)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\right]\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t + \left[\frac{Q_2 t}{\pi} - \frac{P_2(t)}{\beta_{1,1}} + \frac{\alpha(t,n)}{n+\frac{1}{2}}\right]\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{n+\frac{1}{2}}\right\}$$

per $\beta_{2,2}=1$;

(16) $$\eta_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\left[1+\frac{\alpha(t,n)}{n^2}\right]\operatorname{sen} nt + \left[\frac{R_2 t}{\pi} - \frac{P_2(t)}{\beta_{1,1}} + \frac{\alpha(t,n)}{n}\right]\frac{\cos nt}{n}\right\}$$

per $\beta_{2,2}=0$, $\beta'_{2,2}=1$.

Teorema III: « *Nel caso C_3), le espressioni asintotiche degli autovalori e delle autofunzioni normalizzate sono le stesse del caso C_1)* ».

Teorema IV: « *Nel caso C_4), se la condizione nel punto 0 si riduce alla (6), l'espressione asintotica dell' n^{mo} autovalore positivo è:*

(17) $k_n = \sqrt{\mu_n} = \left(n+\frac{1}{2}\right) + Q_3\pi^{-1}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-1} + \alpha(n)\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-2}$

per $\beta_{2,2}=1$;

(18) $k_n = \sqrt{\mu_n} = n + R_3\pi^{-1}n^{-1} + \alpha(n)\,n^{-2}$ *per* $\beta_{2,2}=0$, $\beta'_{2,2}=1$

e l'espressione asintotica dell' n^{ma} autofunzione normalizzata è:

(19) $$\eta_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\left[1+\frac{\alpha(t,n)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\right]\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t + \left[\frac{Q_3 t}{\pi} - P_3(t) + \frac{\alpha(t,n)}{n+\frac{1}{2}}\right]\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{n+\frac{1}{2}}\right\}$$

per $\beta_{2,2}=1$;

(20) $$\eta_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\left[1+\frac{\alpha(t,n)}{n^2}\right]\operatorname{sen} nt + \left[\frac{R_3 t}{\pi} - P_3(t) + \frac{\alpha(t,n)}{n}\right]\frac{\cos nt}{n}\right\}$$

per $\beta_{2,2}=0$, $\beta'_{2,2}=1$;

se invece la condizione nel punto 0 si riduce alla (7), l'espressione asintotica dell' n^{mo} autovalore positivo è:

$$(21)\quad k_n=\sqrt{\mu_n}=n+Q_3\pi^{-1}n^{-1}+\alpha(n)n^{-2} \qquad per\ \ \beta_{2,2}=1;$$

$$(22)\quad k_n=\sqrt{\mu_n}=\left(n+\frac{1}{2}\right)+R_3\pi^{-1}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-1}+\alpha(n\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-2} \qquad per\ \ \beta_{2,2}=0\,,\ \beta'_{2,2}=1$$

e l' espressione asintotica dell' n^{ma} autofunzione normalizzata è:

$$(23)\quad \eta_n(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\left[1+\frac{\alpha(t\,,n)}{n^2}\right]\cos nt+\left[\frac{Q_3 t}{\pi}-P_3(t)+\frac{\alpha(t\,,n)}{n}\right]\frac{\operatorname{sen} nt}{n}\right\} \qquad per\ \ \beta_{2,2}=1;$$

$$(24)\quad \eta_n(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\left[1+\frac{\alpha(t\,,n)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\right]\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t+\left[\frac{R_3 t}{\pi}-P_3(t)+\frac{\alpha(t\,,n)}{n+\frac{1}{2}}\right]\frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{n+\frac{1}{2}}\right\}$$

per $\qquad \beta_{2,2}=0\,,\ \beta'_{2,2}=1.$

Si osservi che le (9) ed (11) altro non sono che le espressioni asintotiche degli autovalori e delle autofunzioni del problema di STURM-LIOUVILLE relativo alla (XII) ed alle condizioni ai limiti [1]):

$$(25)\qquad \begin{cases} L_1[\eta]=\beta_{1,1}\eta(0)+\eta'(0)=0 \\ L_2[\eta]=\beta_{2,1}\eta(\pi)+\eta'(\pi)=0 \end{cases}$$

onde diremo che il problema (XII)-(XIII), nel caso C_1), è asintotico al problema (XII)-(25). Analoghe osservazioni valgono per le altre espressioni asintotiche date nei precedenti teoremi, per cui i problemi ai quali esse si riferiscono risultano asintotici ai problemi di STURM-LIOUVILLE cui essi si riducono quando si pongano uguali a zero tutte le $\beta'_{i,j}$.

2. — I teoremi del numero precedente si dimostrano estendendo il ben noto procedimento di HOBSON, citato nella prefazione, che si adotta per la determinazione delle espressioni asintotiche dei problemi di STURM-LIOUVILLE e che è riportato nei trattati [2]). Per quanto l'applicazione di tale procedimento al nostro problema sia pressochè ovvia, daremo qui, per maggior chiarezza, la dimostrazione dei teoremi I e II, relativi ai casi in cui entrambe le (2) dipendano effettivamente da k, tralasciando la dimostrazione dei teoremi III e IV che risulta poi evidente.

Detto $z(t\,,k)$ un integrale della (1), determinato a meno di una costante, che verifica la prima delle (2), qualunque sia k, si può porre:

$$(26)\quad z(0,k)=b_{1,2}(k)(1+k^4)^{-\frac{4}{8}}\ ;\ \ z'(0,k)=-b_{1,1}(k)(1+k^4)^{-\frac{6}{8}}$$

---

[1]) Cfr. G. SANSONE, loc. cit., p. 243.

[2]) Cfr. nota [1]) di pagina 6.

che, per k opportunamente grande, si scrivono:

$$(27)\quad z(0,k)=\begin{cases} 1+\alpha(k)k^{-2} & \text{per}\quad \beta_{1,2}=1 \\ k^{-2}+\alpha(k)k^{-6} & \text{per}\quad \beta_{1,2}=0\,;\,\beta_{1,1}\neq 0 \end{cases};\quad z'(0,k)=-\beta_{1,1}k^{-1}+\alpha(k)k^{-3}.$$

L'integrale $z(t,k)$ soddisfa poi, com'è noto [1]), all'equazione integrale di VOLTERRA:

$$(28)\quad \begin{aligned} z(t,k) &= (1+k^4)^{-\frac{1}{2}}\left[b_{1,2}(k)\cos kt - k^{-1}b_{1,1}(k)\operatorname{sen} kt\right] + \\ &+ \frac{1}{k}\int_0^t p(\tau)\, z(\tau,k)\operatorname{sen} k(t-\tau)\,d\tau. \end{aligned}$$

Posto:

$$(29)\quad M(k) = \max_{0\le t\le\pi} |z(t,k)|,$$

per $k > \int_0^\pi |p(\tau)|\,d\tau$. dalla (28) si trae:

$$M(k)\le k^{-1}(1+k^4)^{-\frac{1}{2}}\left[b^2_{1,1}(k)+k^2b^2_{1,2}(k)\right]^{\frac{1}{2}}\left[1-\frac{1}{k}\int_0^\pi |p(\tau)|\,d\tau\right]^{-1},$$

donde:

$$(30)\quad M(k)\le\begin{cases} 1+\alpha(k)\,k^{-2} & \text{per}\quad \beta_{1,2}=1 \\ \alpha(k)\,k^{-1} & \text{per}\quad \beta_{1,2}=0\,,\,\beta_{1,1}\neq 0. \end{cases}$$

Le (30) forniscono poi, per k opportunamente grande:

$$(31)\quad \left|\int_0^t p(\tau)\,z(\tau,k)\operatorname{sen} k(t-\tau)\,d\tau\right| \le M(k)\int_0^t |p(\tau)|\,d\tau \le \begin{cases} \alpha(t,k) & \text{per}\ \beta_{1,2}=1 \\ \dfrac{\alpha(t,k)}{k} & \text{per}\ \beta_{1,2}=0\,,\,\beta_{1,1}\neq 0. \end{cases}$$

La (28), per le (27) e (31), fornisce dunque:

$$(32)\quad z(t,k)=\begin{cases} \cos kt+\alpha(t,k)k^{-1} & \text{per}\quad \beta_{1,2}=1 \\ -\beta_{1,1}\dfrac{\operatorname{sen} kt}{k}+\alpha(t,k)k^{-2} & \text{per}\quad \beta_{1,2}=0\,,\,\beta_{1,1}\neq 0 \end{cases}$$

---

[1]) Cfr. G. SANSONE, loc. cit., pag. 239.

ovvero, sostituendo le (32) nel secondo membro della (28), per note relazioni che sussistono in virtù dell'ipotesi fatta sulla funzione $p(t)$ [1]), si ha:

$$(33)\quad z(t,k)=\begin{cases}\left[1+\dfrac{\alpha(t,k)}{k^2}\right]\cos kt+\left[P_1(t)+\dfrac{\alpha(t,k)}{k}\right]\dfrac{\operatorname{sen} kt}{k} & \text{per } \beta_{1,2}=1\\ \left[-\beta_{1,1}+\dfrac{\alpha(t,k)}{k^2}\right]\dfrac{\operatorname{sen} kt}{k}+\left[P_2(t)+\dfrac{\alpha(t,k)}{k}\right]\dfrac{\cos kt}{k^2} & \text{per } \beta_{1,2}=0\,,\ \beta_{1,1}\neq 0.\end{cases}$$

Imponendo ora la condizione in π si trova per gli autovalori un'equazione del tipo:

$$\operatorname{tg} k\pi=\frac{\varphi(k)}{\psi(k)}$$

alla quale, tenendo conto delle (27), (33) ed (8), con semplici calcoli si dà la veste:

$$(34)\quad \operatorname{tg} k\pi=\begin{cases}Q_1k^{-1}+\alpha(k)k^{-2} & \text{per } \beta_{1,2}=1\,,\ \beta_{2,2}=1\\ R_2k^{-1}+\alpha(k)k^{-2} & \text{per } \beta_{1,2}=\beta_{2,2}=0\,;\ \beta_{1,1}\beta'_{1,1}\neq 0\end{cases}$$

oppure:

$$(35)\quad \operatorname{ctg} k\pi=\begin{cases}-R_1k^{-1}+\alpha(k)k^{-2} & \text{per } \beta_{1,2}=1\,,\ \beta_{2,2}=0\,,\ \beta_{2,1}\beta'_{2,2}\neq 0\\ -Q_2k^{-1}+\alpha(k)k^{-2} & \text{per } \beta_{1,2}=0\,,\ \beta_{2,2}=1\,,\ \beta_{1,1}\beta'_{1,2}\neq 0.\end{cases}$$

Dalle (34) e (35) si traggono poi facilmente le espressioni asintotiche (9), (10), (13) e (14) dei teoremi I e II [2]).

Dalle (33) ora, tenendo conto delle espressioni (9) e (10) degli autovalori, si deducono le espressioni asintotiche delle autofunzioni $z_n(t)=z(t,k_n)$. Le autofunzioni possono poi normalizzarsi col porre:

$$\eta_n(t)=\nu_n z_n(t)$$

determinando le ν_n in modo che sia soddisfatta la condizione di normalità (XV).

Con calcoli elementari, sebbene piuttosto estesi, si trovano, per le $\eta_n(t)$ proprio le espressioni (11), (12), (15) e (16) dei teoremi I e II, che risultano dunque dimostrati.

Si noti che le espressioni asintotiche trovate permettono di dare alle (XVI), la veste:

---

[1]) Cfr. G. Sansone, loc. cit., pag. 242.

[2]) Cfr. G. Sansone, loc. cit., pag. 243 e segg.

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\gamma_n=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,n^{-2}[1+\alpha'(n)n^{-2}]\quad;\quad \delta_n=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(-1)^n n^{-2}[1+\alpha(n)n^{-2}] \\
\qquad\qquad \text{per}\quad \beta_{1,2}=1\,,\,\beta_{2,2}=1 \\
\left.\begin{array}{l}
\gamma_n=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-2}\left[1+\alpha(n)\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]\quad; \\
\delta_n=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-1}\left[\beta_{2,1}^{-1}+\alpha(n)\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]
\end{array}\right\}\ \text{per}\ \ \beta_{1,2}=1\,;\,\beta_{2,2}=0\,;\ \beta_{2,1}\,\beta'_{2,2}\neq 0 \\
\left.\begin{array}{l}
\gamma_n=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-1}\left[-\beta_{1,1}^{-1}+\alpha(n)\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]\quad; \\
\delta_n=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-2}\left[1+\alpha(n)\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]
\end{array}\right\}\ \text{per}\ \ \beta_{1,2}=0\,,\,\beta_{2,2}=1\,,\ \beta_{1,1}\,\beta_{1,2}\neq 0 \\
\gamma_n=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,n^{-1}\left[-\beta_{1,1}^{-1}+\alpha(n)n^{-1}\right]\quad;\quad \delta_n=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(-1)^n n^{-1}\left[-\beta_{2,1}^{-1}+\alpha(n)n^{-1}\right] \\
\qquad\qquad \text{per}\quad \beta_{1,2}=0\,,\,\beta_{2,2}=0\,,\,\beta_{1,1}\,\beta'_{1,2}\neq 0.
\end{array}
\right. \tag{36}
$$

§ 2.

Gli sviluppi in serie di autofunzioni.

1. — Passiamo ora all'esame degli sviluppi in serie di autofunzioni. Per gli sviluppi dello zero sussistono, in tutti i casi C_i), i seguenti teoremi:

TEOREMA V: « *Lo sviluppo dello zero:*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\,\gamma_n\,\eta_n(t)=0 \tag{37}$$

che corrisponde alla condizione $L_1^{(k)}[\eta]=0$, *quando questa dipende effettivamente dal parametro* k, *converge uniformemente in* $(0\,,\pi)$ *se è* $\beta_{1,2}\neq 0$; *se è invece* $\beta_{1,2}=0$, *tale sviluppo converge uniformemente in ogni intervallo interno a* $(0\,,\pi)$ *che escluda il punto* 0 ».

TEOREMA VI: « *Lo sviluppo dello zero:*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\,\delta_n\,\eta_n(t)=0 \tag{38}$$

che corrisponde alla condizione $L_2^{(k)}[\eta] = 0$, *quando questa dipende effettivamente dal parametro k, converge uniformemente in* $(0, \pi)$ *se è* $\beta_{2,2} \neq 0$; *se è invece* $\beta_{2,2} = 0$ *tale sviluppo converge uniformemente in ogni intervallo interno a* $(0, \pi)$ *che escluda il punto* π ».

Indicando con (S_1) ed (S_2), rispettivamente, i due sviluppi (37) e (38), si ha ancora:

Teorema VII: « *Se le condizioni ai limiti dipendono entrambe dal parametro, lo sviluppo:*

$$\Phi(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \eta_n(t) \left\{ \int_0^{\pi} \Phi(\tau)\, \eta_n(\tau)\, d\tau + c_1 \gamma_n + c_2 \delta_n \right\} \tag{39}$$

sussiste per $\Phi(t)$ *continua ed a variazione limitata in* $(0, \pi)$.

Tale sviluppo converge uniformemente in $(0, \pi)$, *qualunque siano le costanti* c_1 *e* c_2, *se uniformemente convergenti riescono, in* $(0, \pi)$, *entrambi gli sviluppi dello zero. Qualora lo sviluppo* (S_1) *non converga uniformemente in* $(0, \pi)$, *l'uniforme convergenza, in tale intervallo, dello sviluppo* (39) *sussiste subordinatamente alla posizione* $c_i = (-1)^{i+1} \overline{L_i}\,[\Phi]$ ».

Teorema VIII: « *Se la condizione nel punto O* $[\pi]$ *si riduce a* $\overline{L_1}[\eta] = 0$ $[\overline{L_2}[\eta] = 0]$, *lo sviluppo:*

$$\Phi(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \eta_n(t) \left\{ \int_0^{\pi} \Phi(\tau)\, \eta_n(\tau)\, d\tau + c\, \delta_n \right\} \tag{40}$$

$$\left[\Phi(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \eta_n(t) \left\{ \int_0^{\pi} \Phi(\tau)\, \eta_n(\tau)\, d\tau + c\, \gamma_n \right\} \right] \tag{41}$$

di una funzione verificante la condizione $\overline{L_1}[\Phi] = 0$ $[\overline{L_2}[\Phi] = 0]$ *sussiste per* $\Phi(t)$ *continua ed a variazione limitata in* $(0, \pi)$.

Tale sviluppo converge uniformemente in $(0, \pi)$, *qualunque sia la costante c, se uniformemente convergente è, in* $(0, \pi)$, *lo sviluppo dello zero* (S_1) $[(S_1)]$. *Qualora lo sviluppo* (S_2) $[(S_1)]$ *non converga uniformemente in* $(0, \pi)$, *la convergenza uniforme, in tale intervallo, dello sviluppo* (40) $[(41)]$ *sussiste subordinatamente alla posizione* $c = -\overline{L_2}[\Phi]$ $[c = \overline{L_1}[\Phi]]$ ».

2. Per la dimostrazione dei teoremi V e VI ci limiteremo ai casi C_1) e C_2), perchè negli altri casi si procede in modo del tutto analogo.

Nel caso C_1), se è $\beta_{2,2} \neq 0$, sussistono entrambi gli sviluppi (37) e (38) e, limitatamente ai soli loro termini di indici positivi, per le (11) e (36), si ha:

$$(42)\qquad \begin{aligned}\sum_1^{+\infty}{}_n \gamma_n \eta_n(t) &= \frac{2}{\pi}\sum_1^{+\infty}{}_n\left[\frac{\cos nt}{n^2}+\frac{\alpha(t,n)}{n^3}\right]\\ \sum_1^{+\infty}{}_n \delta_n \eta_n(t) &= \frac{2}{\pi}\sum_1^{+\infty}{}_n (-1)^n\left[\frac{\cos nt}{n^2}+\frac{\alpha(t,n)}{n^3}\right]\end{aligned}$$

e di qui segue l'asserita convergenza uniforme in $(0,\pi)$.

Se invece è $\beta_{2,2}=0\,.\,\beta_{2,1}\beta'_{2,2}\neq 0$, in forza delle (12) e (36_2), per lo sviluppo (37), limitatamente ai termini di indici positivi, si trova:

$$(43)\qquad \sum_1^{+\infty}{}_n \gamma_n \eta_n(t) = \frac{2}{\pi}\sum_1^{+\infty}{}_n\left[\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{\alpha(t,n)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^3}\right]$$

donde ancora la convergenza uniforme in $(0,\pi)$. Per lo sviluppo (38) si ha invece:

$$(44)\qquad \sum_1^{+\infty}{}_n \delta_n \eta_n(t) = \frac{2}{\pi\beta_{2,1}}\sum_1^{+\infty}{}_n (-1)^n\left[\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{n+\frac{1}{2}}+\frac{\alpha(t,n)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\right]$$

e tale serie converge uniformemente, com'è noto, in ogni intervallo, contenuto in $(0,\pi)$, che escluda il punto π.

Se infine la condizione in π è addirittura indipendente da k, dei due sviluppi (37) e (38) sussiste solo il primo e risulta uniformemente convergente in $(0,\pi)$.

Nel caso (I_3), per lo sviluppo (37), in forza delle (15), (16), (36_3) e (36_4), si ha:

$$(45)\qquad \sum_1^{+\infty}{}_n \gamma_n \eta_n(t) = -\frac{2}{\pi\beta_{1,1}}\sum_1^{+\infty}{}_n\left[\frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{n+\frac{1}{2}}+\frac{\alpha(t,n)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\right]\qquad \text{per } \beta_{1,2}\neq 0$$

e

$$(46)\qquad \sum_1^{+\infty}{}_n \gamma_n \eta_n(t) = -\frac{2}{\pi\beta_{1,1}}\sum_1^{+\infty}{}_n\left[\frac{\operatorname{sen} nt}{n}+\frac{\alpha(t,n)}{n^2}\right]\qquad \text{per } \beta_{2,2}=0\,.\,\beta_{2,1}\beta_{2,2}\neq 0$$

e di tali serie, ovviamente, la prima è dotata di convergenza uniforme in

ogni intervallo contenuto in $(0, \pi)$ che escluda il punto 0, la seconda in ogni intervallo escludente i punti 0 e π.

Quanto allo sviluppo (38), le (15) e (36_3) forniscono, per $\beta_{2,2} \neq 0$:

$$(47) \qquad \sum_1^{+\infty}{}_n \delta_n \eta_n(t) = \frac{2}{\pi} \sum_1^{+\infty}{}_n (-1)^n \left[\frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{\alpha(t,n)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^3} \right]$$

mentre le (16) e (36_4) forniscono, per $\beta_{2,1} = 0$, $\beta_{2,1} \beta'_{2,2} \neq 0$

$$(48) \qquad \sum_1^{+\infty}{}_n \delta_n \eta_n(t) = -\frac{2}{\pi \beta_{1,1}} \sum_1^{+\infty}{}_n (-1)^n \left[\frac{\operatorname{sen} nt}{n} + \frac{\alpha(t,n)}{n^2} \right].$$

La serie (47) converge uniformemente in $(0, \pi)$, mentre, per la (48), la convergenza è ovviamente uniforme in ogni intervallo che escluda i punti 0 e π.

I teoremi V e VI sono dunque dimostrati.

3. Per la dimostrazione del teorema VII, relativo ai casi C_1) e C_2), esaminiamo rapidamente tali casi.

Nel caso C_1), per $\beta_{2,2} \neq 0$, le (36_1) e (11) permettono di dare ai termini di indice positivo dello sviluppo (39) l'espressione:

$$(49) \qquad \frac{2}{\pi} \sum_1^{+\infty}{}_n \left[\cos nt + \frac{\varphi_n(t)}{n} \right] \left[\int_0^\pi \Phi(\tau) \cos n\tau \, d\tau + \frac{\zeta_n}{n} \right]$$

con:

$$\varphi_n(t) = \frac{\alpha(t,n)}{n} \cos nt + \left[P_1(t) - \frac{Q_1 t}{\pi} + \frac{\alpha(t,n)}{n} \right] \operatorname{sen} nt$$

$$\zeta_n = \int_0^\pi \Phi(\tau) \left[P_1(\tau) - \frac{Q_1 \tau}{\pi} \right] \operatorname{sen} n\tau \, d\tau + \frac{c_1 + (-1)^{n+1} c_2}{n} + \frac{\alpha(n)}{n^2}$$

onde, detta N una opportuna costante positiva, è:

$$(50) \qquad |\varphi_n(t)| < N$$

mentre ben note diseguaglianze assicurano essere:

$$(51) \qquad \sum_1^{+\infty}{}_n \zeta_n^2 < +\infty$$

Dalla equilimitatezza delle $\varphi_n(t)$, dalla (51) e dalla convergenza della serie dei quadrati dei coefficienti di FOURIER della $\Phi(t)$ rispetto al sistema $\{\cos nt\}$, si trae dunque che lo sviluppo (39) ha gli stessi caratteri di convergenza della serie:

$$(52) \qquad \frac{2}{\pi}\sum_{1}^{+\infty}{}_n \cos nt \int_0^{\pi} \Phi(\tau)\cos n\tau\, d\tau$$

e quindi, nelle ipotesi del teorema VII, converge uniformemente in $(o.\ \pi)$, qualunque siano le costanti c_1 e c_2.

Per $\beta_{2,2} = 0$, $\beta_{2,1}\beta'_{2,2} \neq 0$, poichè lo sviluppo (38) dello zero converge uniformemente in ogni intervallo escludente il punto π, le (36_2) e le (12) assicurano la convergenza uniforme dello sviluppo (39) in ogni siffatto intervallo. Poichè però risulta $\overline{L}_2(\Phi) = \beta_{2,1}\Phi(\pi)$, ove si ponga

$$(53) \qquad c_2 = -\overline{L}_2[\Phi]$$

allo sviluppo (39), limitatamente ai soli termini di indice positivo, si dà l'espressione:

$$(54) \qquad \frac{2}{\pi}\sum_{1}^{+\infty}{}_n \left[\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t + \frac{\varphi_n^{(1)}(t}{n}\right]\left[\int_0^{\pi}[\Phi(\tau)-\Phi\pi)]\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau d\tau + \frac{\zeta_n^{(1)}}{n}\right]$$

ove per le $\varphi_n^{(1)}(t)$ e $\zeta_n^{(1)}$ sussistono ancora relazioni del tipo delle (50) e (51) Ragionando come dianzi si riconosce ora che allo sviluppo (39) compete lo stesso carattere di convergenza della serie:

$$(55) \qquad \frac{2}{\pi}\sum_{1}^{+\infty}{}_n \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t \int_0^{\pi}[\Phi(\tau) \quad \Phi(\pi)]\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau\, d\tau$$

e tale serie, nelle ipotesi del teorema VII, converge uniformemente in $(o.\ \pi)$. La convergenza uniforme dello sviluppo (39), in $(o.\ \pi)$, è dunque subordinata alla posizione (53).

Nel caso C_2), in cui è $\beta_{1,1} = 0$ $\beta_{1,2} \neq 0$ e quindi lo sviluppo (37) converge uniformemente in ogni intervallo che escluda lo zero, le (36_1) e le (15) permettono di garantire la convergenza uniforme dello sviluppo (39) in ogni siffatto intervallo, qualunque siano le costanti c_1 e c_2. Poichè risulta poi $\overline{L}_1[\Phi] = \beta_{1,1}\Phi(0)$, ove si ponga:

$$(56) \qquad c_1 = \overline{L}_1[\Phi]$$

lo sviluppo (39), limitatamente ai termini d'indice positivo, assume la veste:

$$(57)\quad \frac{2}{\pi}\sum_{1}^{+\infty}{}_n\left[\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t+\frac{\varphi_n^{(2)}(t)}{n+\frac{1}{2}}\right]\left[\int_0^{\pi}[\Phi(\tau)-\Phi(0)]\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau d\tau+\frac{\zeta_n^{(2)}}{n+\frac{1}{2}}\right]$$

sussistendo ancora, per le $\varphi_n^{(2)}$ e $\zeta_n^{(2)}$ relazioni analoghe alle (50) e (51). Allo sviluppo (39) compete dunque lo stesso carattere di convergenza della serie:

$$(58)\qquad \frac{2}{\pi}\sum_{1}^{+\infty}{}_n\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t\int_0^{\pi}[\Phi(\tau)-\Phi(0)]\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau d\tau$$

che, nelle ipotesi del teorema, riesce uniformemente convergente in $(0,\pi)$. L'uniforme convergenza dello sviluppo (39) è dunque subordinata alla posizione (56)

Sempre con riferimento al caso C_2), per $\beta_{2,2}=0$, $\beta_{2,1}\ \beta'_{2,2}\neq 0$, entrambi gli sviluppi (37) e (38) convergono uniformemente in ogni intervallo che escluda i punti 0 e π; in siffatti intervalli converge allora uniformemente, in virtù delle (36_4) e (16), lo sviluppo (39) qualunque siano le costanti c_i. Le posizioni (56) e (53) permettono però di dare allo sviluppo (39), limitatamente ai termini di indice positivo, la veste:

$$(59)\quad \frac{2}{\pi}\sum_{1}^{+\infty}{}_n\left[\operatorname{sen} nt+\frac{\varphi_n^{(3)}(t)}{n}\right]\left[\int_0^{\pi}\left[\Phi(\tau)-\Phi(0)+\frac{\tau}{\pi}\{\Phi(0)-\Phi(\pi)\}\right]\operatorname{sen} n\tau\, d\tau+\frac{\zeta_n^{(3)}}{n}\right]$$

dalla quale, col solito ragionamento, si deduce che lo sviluppo (39) ha lo stesso carattere di convergenza della serie:

$$(60)\qquad \frac{2}{\pi}\sum_{1}^{+\infty}{}_n\operatorname{sen} nt\int_0^{\pi}\left[\Phi(\tau)-\Phi'(0)+\frac{\tau}{\pi}\{\Phi(0)-\Phi(\pi)\}\right]\operatorname{sen} n\tau\, d\tau.$$

Lo sviluppo (39) dunque, subordinatamente alle posizioni (56) e (53), converge uniformemente in $(0,\pi)$.

Il teorema VII è pertanto dimostrato.

4. La dimostrazione del teorema VIII procede come quella del teorema VII, data al numero precedente, ove si tengano presenti le espressioni asin-

totiche delle autofunzioni relative ai diversi casi C_i), nonchè le corrispondenti (36). Ci asteniamo pertanto dall'esporla, limitandoci a riportare le espressioni delle serie trigonometriche, uniformemente convergenti in $(0, \pi)$, che, nei vari casi, presentano lo stesso carattere di convergenza dello sviluppo (40).

Nel caso C_3), per $\beta_{2,2} \neq 0$, lo sviluppo (40) ha lo stesso carattere di convergenza della serie (52) onde converge uniformemente in $(0, \pi)$ qualunque sia c; per $\beta_{2,2} = 0$, $\beta_{2,1}\ \beta'_{2,2} \neq 0$ la convergenza uniforme in $(0, \pi)$ è subordinata alla posizione $c = -\overline{L}_2[\Phi]$, ed allora lo sviluppo ha lo stesso carattere di convergenza della serie (55).

Nel caso C_4), se la condizione nel punto 0 è la (6), per $\beta_{2,2} \neq 0$ lo sviluppo (40) di una funzione $\Phi(t)$ nulla in 0 ha lo stesso carattere della serie:

$$\frac{2}{\pi}\sum_{1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t \int_0^{\pi} \Phi(\tau)\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau d\tau \tag{61}$$

e quindi converge uniformemente in $(0, \pi)$, qualunque sia c, mentre per $\beta_{2,2} = 0$, $\beta_{2,1}\ \beta'_{2,2} \neq 0$ la convergenza uniforme in $(0, \pi)$ e subordinata alla posizione $c = -\overline{L}_2[\Phi]$ ed allora lo sviluppo ha lo stesso carattere della serie

$$\frac{2}{\pi}\sum_{1}^{+\infty} \operatorname{sen} nt \int_0^{\pi} \left[\Phi(\tau) - \frac{\tau}{\pi}\Phi\,\pi)\right] \operatorname{sen} n\tau\, d\tau. \tag{62}$$

Se infine la condizione nel punto 0 si riduce alla (7), per $\beta_{2,2} \neq 0$ lo sviluppo (40) di una funzione $\Phi(t)$ con derivata nulla in 0 ha il comportamento della serie (52), e quindi converge uniformemente in $(0, \pi)$, qualunque sia c; per $\beta_{2,2} = 0$, $\beta_{2,1}\ \beta'_{2,2} \neq 0$ la convergenza uniforme, in $(0, \pi)$, sussiste a condizione di porre ancora $c = -\overline{L}_2[\Phi]$, e, con tale posizione lo sviluppo (40) ha lo stesso comportamento della serie (55).

Sopra una nuova specie di Eurhinodelphis della pietra leccese.

Nota della dott. **Maria Moncharmont Zei**, *presentata dal socio* **G. D' Erasmo**

(Adunanza del dì 3 giugno 1950)

Sunto. — Viene descritto il cranio di una nuova specie di *Eurhinodelphis* rinvenuto nella formazione miocenica di Melpignano (Lecce). Dal confronto con le specie congeneri descritte in letteratura, si rilevano alcune differenze anatomiche, non riferibili a variazioni individuali, tali da rendere opportuna l'istituzione della specie *Eurhinodelphis salentinus* n. sp.

Tra i numerosi fossili della pietra leccese conservati nel Museo geopaleontologico dell'Università di Napoli, si trova l'avanzo di un cranio di Delfinorinco, la cui descrizione forma l'oggetto del presente lavoro. Tale fossile mi è stato affidato in istudio dal prof. G. D'Erasmo, direttore dell'Istituto, al quale vanno i miei più sentiti ringraziamenti per i consigli e l'incoraggiamento di cui mi fu prodigo. Sento del pari il dovere di ringraziare il prof. Giorgio Dal Piaz, noto specialista nello studio di questi Vertebrati, che ha, col suo autorevole giudizio, confermato l'opportunità, da me già ravvisata, di considerare questo fossile quale rappresentante di una nuova specie.

La località di provenienza è Melpignano, in provincia di Lecce, dove fu rinvenuto, nel 1923, in una cava e fornito a questo Museo dal prof. Liborio Salomi.

La roccia inglobante è, come già detto, la pietra leccese, calcare tenero, marnoso, granulare, di origine organica e di colore giallo avorio, che, com'è noto [1]), è costituita da depositi di zone batimetricamente diverse ma sempre appartenenti allo stesso mare miocenico. Tale formazione è stata studiata da autori diversi ed attribuita sia all'Elveziano, passante inferiormente al Langhiano, e sia interamente al Langhiano [2]).

---

[1]) De Lorenzo G., *La fauna bentho-nektonica della pietra leccese*, Rend. R. Acc. Lincei, 1893. 2° sem., pag. 91 e seguenti. — Parona C. F., *Nuovi fossili del Miocene di Rosignano Piemonte*, Atti R. Acc. Sc. Torino, vol. LI, pag. 8, 1916. — D'Erasmo G., *Il Tetrabelodon (Trilophodon) angustidens Cuvier sp. della pietra leccese*, Rend. R. Acc. Sc. fis. e mat. di Napoli, serie 3ª, vol. XXXIV, 1929.

[2]) Bassani F., *La ittiofauna della pietra leccese*. Atti R. Acc. Sc. di Napoli, serie 2ª, vol. XVI, n. 4, 1915.

Essa ha fornito una notevole quantità di avanzi delle più svariate forme zoologiche; per quanto riguarda i Cetacei, vi sono stati rinvenuti: *Squalodon antwerpiensis* van Ben.; *Sq. Scillai* Brandt; *Priscodelphinus squalodontoides* Cap.; *Physodon leccense* Gerv.; *Plesiocetus Goropii* van Ben. (?); *Ziphiodelphis Abeli* Dal Piaz.

Il fossile si presentava quasi completamente inglobato nella roccia, ed è stato messo in luce dopo un accurato e lungo lavoro di isolamento. Di esso risulta conservata soltanto la parte superficiale della faccia dorsale del rostro e del cranio e, posteriormente, i condili, il forame occipitale ed un frammento di vertebra cervicale. Sono stati fatti, inoltre, alcuni sondaggi nello spessore della roccia e nulla si è rinvenuto della mandibola, dei denti e delle altre ossa del cranio. Di queste sono ben visibili i premascellari, i mascellari, i nasali, parte del mesetmoide, i frontali, i lacrimali, i sopraoccipitali e gli esoccipitali.

La roccia presenta una frattura, che pur non avendo notevolmente danneggiato l'esemplare, ha tuttavia tagliato trasversalmente il rostro circa al primo terzo della sua lunghezza.

Nonostante il cattivo stato di conservazione, il fossile mostra sicuramente i caratteri di un Delfinorinco; anzi, considerata la estrema lunghezza del rostro, la sua esilità, l'arresto ad un certo punto dei mascellari per lasciare il posto agli intermascellari, che costituiscono da soli la porzione terminale del rostro, caratteri questi peculiari ed inconfondibili, ritengo doversi attribuire al genere *Eurhinodelphis* du Bus, 1867, fam. *Eurhinodelphidae* Abel, 1901.

Nella letteratura mi risulta che sono state descritte, e ben definite fino ad oggi, le seguenti specie:

Eurhinodelphis Cocheteuxi du Bus, 1867 [1]), *Eurh. longirostris* du Bus, 1872, [2]), *Eurh. cristatus* du Bus sp., 1872, [3]), tutte appartenenti al Bolde-

---

[1]) Du Bus B., *Sur quelques Mammifères du Crag d'Anvers*, Bull. Acad. Belgique, anno 36, s. 2ª, t. XXIV, pag. 568-569. Bruxelles, 1867.

[2]) Id., *Mammifères nouveaux du Crag d'Anvers*, Bull. Acad. Belgique, anno 41, s. 2ª, t. XXXIV, pag. 491. Bruxelles, 1872.

[3]) Tale specie, inizialmente descritta dal Du Bus come *Priscodelphinus cristatus* (*Mammifères nouveaux du Crag d' Anvers*, Loc. cit., 1872, pag. 492 e 497), fu trasferita da O. Abel (*Les dauphins longirostres du Boldérien des environs d'Anvers*, Mém. Mus roy Hist. nat. de Belgique, t. II, pag. 146. Bruxelles, 1902) nel gen. *Eurhinodelphis*. Vedi inoltre: Abel O., *Les dauphins longirostres du Boldérien (Miocène supérieur) des environs d' Anvers*, Mém. Mus. roy. d' Hist. nat. de Belgique, t. I. Bruxelles, 1901: *Les Odontocètes du Boldérien (Miocène supérieur) d' Anvers*. Ibidem, t. III. 1905.

riano (Miocene sup.) del bacino di Anversa; *Eurh. Bossi* Kellogg, 1925 [1]), del Miocene della baia di Chesapeacke, contea di Calvert, Maryland S.U.A.; *Eurh. pacificus* Matsumoto, 1926 [2]), del Miocene medio di Okodzu, distr. di Santo, prov. di Echigo, Giappone. Alle suddette specie sono da aggiungere l'*Eurh. ambiguus* du Bus [3]) e l'*Eurh. sassariensis* Capellini [4]); di cui la prima viene dall'Abel considerata come variazione individuale di *Eurh. longirostris*, mentre la seconda è riconosciuta come dubbia dal Capellini stesso, data la esiguità e l'incompletezza degli avanzi su cui questa specie è fondata.

Dal confronto del fossile di Melpignano con le succitate specie, sono risultate delle differenze tali, non ascrivibili semplicemente a variazioni individuali o di sesso, da giustificare e rendere necessaria l'istituzione di una nuova specie, per la quale propongo la denominazione di *Eurhinodelphis salentinus* n. sp.

Premascellare

I premascellari misurano in tutta la loro lunghezza, cioè dalla estremità anteriore del rostro alla sutura coi frontali e coi nasali, circa cm. 86. Essi decorrono parallelamente al margine interno dei mascellari, con cui si articolano, e presentano nel tratto distale, fino a 67 cm. dall'estremità anteriore, superficie convessa. Nel tratto prossimale, invece, si slargano e subiscono un lieve schiacciamento. A 63 cm. circa dalla estremità si allontanano l'uno dall'altro e si divaricano in maniera da assumere la forma di un'Y. A cominciare dal punto in cui divergono, e procedendo caudalmente, essi presentano una leggera torsione, di modo che la loro superficie, dapprima poco convessa e inclinata verso l'esterno, va insensibilmente spianandosi. Fino all'altezza del foro mascellare il margine interno di ciascun premascellare si presenta più elevato; poi, in corrispondenza del foro suddetto, vi è un piccolo tratto in cui i premascellari sono completamente piani ed orizzontali. Subito dopo passa ad essere più elevato il margine esterno di ciascuno di essi, mentre la porzione interna è quasi pianeggiante o lievemente concava. In questo tratto, e precisamente poco al di sopra del foro mascellare, i premascellari raggiungono la massima larghezza

---

[1]) Kellogg R., *On the occurence of remains of fossil Porpoises of the genus Eurhinodelphis in North America*, Proc. U.S. National Mus., vol. 66, art. 26. Washington, 1925.

[2]) Matsumoto H., *On some fossil Cetaceans of Japan*, Science Rep. of the Tohoku Imp. Univ., Sendai, Japan, s. 2ª (Geology), vol. X, n. 1. Tokio, 1926.

[3]) Du Bus B., *Mammifères nouveaux du Crag d'Anvers*, Bull. Acad. Belgique, anno 41, 2ª s. t., XXXIV, pag. 491. Bruxelles, 1872.

[4]) Capellini G., *Delfinorinco fossile dei dintorni di Sassari*. Mem. R. Acc. Sc. dell'Ist. di Bologna, s. 4ª, t VIII. Bologna, 1887.

(cm. 3 il destro e cm. 2,7 il sinistro) e i loro margini mediali si avvicinano, restringendo alquanto, in questo tratto, la fossa mesorostrale.

Successivamente i premascellari si assottigliano e i margini mediali si allontanano di nuovo e raggiungono la massima distanza reciproca di circa cm. 4,3 poco al di sotto del mesetmoide.

Nell' ultimo tratto, infine, essi si assottigliano sempre più, s'incurvano leggermente in dentro e, insinuandosi fra il margine esterno del nasale e quello interno più elevato del mascellare, raggiungono il frontale.

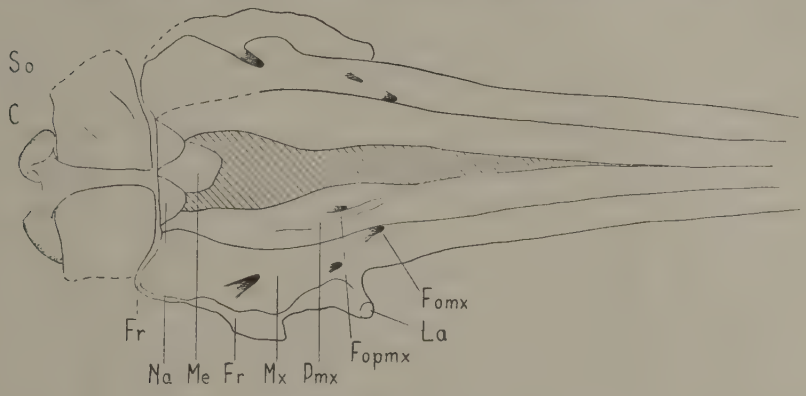


Fig. 1. — *Eurhinodelphis salentinus* n. sp. (1/4 grand. nat.)

C, condilo occipitale; Fo.mx, forame mascellare; Fo.pmx, forame premascellare; Fr, frontale; Ip, interparietale; La, lacrimale; Me, mesetmoide; Mx, mascellare; Na, nasale; Pmx, premascellare; So, sopraoccipitale.

Subito dietro la linea preorbitaria, e precisamente alla metà della distanza che passa fra il foro mascellare ed il primo foro dell' ala orbitaria, i premascellari presentano un foro, il foro premascellare: questo si apre in un solco diretto obliquamente in dentro.

I premascellari, divaricandosi, delimitano la fossa mesorostrale che, alla metà circa della sua lunghezza, presenta uno strozzamento in corrispondenza, come ho detto poc'anzi, dell'espansione dei premascellari. Questa fossa, che è completamente riempita dalla roccia, non fa vedere nulla del vomere; nella sua parte posteriore, invece, al di sotto dei nasali ed al centro, sporge la porzione posteriore, più elevata ed ossificata del mesetmoide, di forma triangolare.

Il rostro presenta poi, sulla faccia latero-dorsale, un solco piuttosto profondo, che iniziatosi circa all' altezza della linea preorbitaria, continua fino a 15 cm. dall' estremità anteriore. Questo solco, che decorre parallelamente al margine laterale del rostro, comprende nel suo fondo la sutura fra premascellare e mascellare. Detta sutura a cm. 30 dalla linea preorbitaria, si distacca dal solco e, decorrendo obliquamente in basso, termina

a 24 cm. dall'estremità. Essa sutura è sopratutto evidente sul lato destro dell'esemplare.

Paragonando i premascellari del nostro esemplare (fig. 1) con quelli di

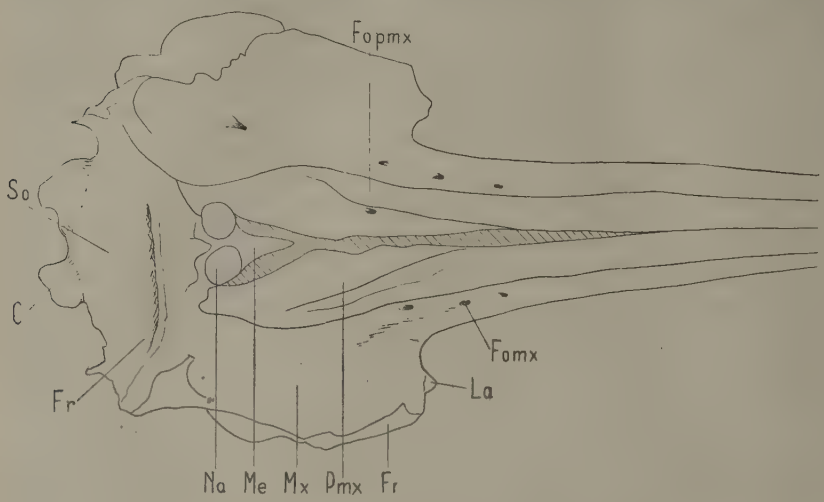


Fig 2. — *Eurhinodelphis Bossi* Kellogg (1/4 grand. nat.)

E. Bossi, *E. longirostris* e *E. Cocheteuxi*, risultano evidenti alcune differenze che vengono qui descritte. Per meglio dimostrare tali diversità, si

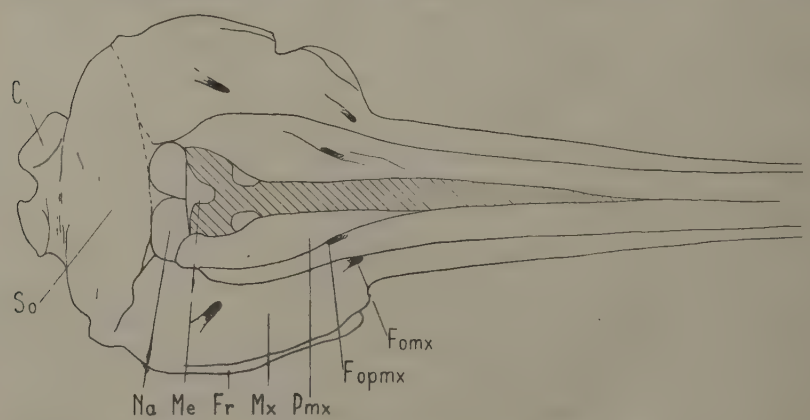


Fig. 3 — *Eurhinodelphis longirostris* du Bus (1/4 grand. nat.)

sono disegnate, ad 1/4 circa della grandezza naturale, le facce dorsali dei crani delle specie in questione.

Confrontando l'*E. salentinus* con *E. Bossi* (fig. 2) si osservano le seguenti differenze: nel tratto prossimale i premascellari dell'*E. Bossi* sono medialmente più espansi ed i loro margini si avvicinano in misura maggiore, quasi obliterando la fossa mesorostrale. Nella porzione rostrale, in-

vece, pur notandosi una certa affinità di conformazione, i premascellari si presentano diversi nel tratto successivo, procedendo in senso antero-posteriore, alla loro divaricazione. Infatti, nell' *E. salentinus*, nel tratto indicato con *ab* nella fig. 2 della tavola, i premascellari si presentano convessi in prossimità del margine mediale, mentre la porzione esterna di essi è piuttosto pianeggiante, anzi leggermente concava.

Dal confronto con *E. longirostris* (fig. 3) risulta che i premascellari, posteriormente alla linea preorbitaria, si rassomigliano, tuttavia i premascellari del nostro esemplare presentano la massima larghezza all' altezza

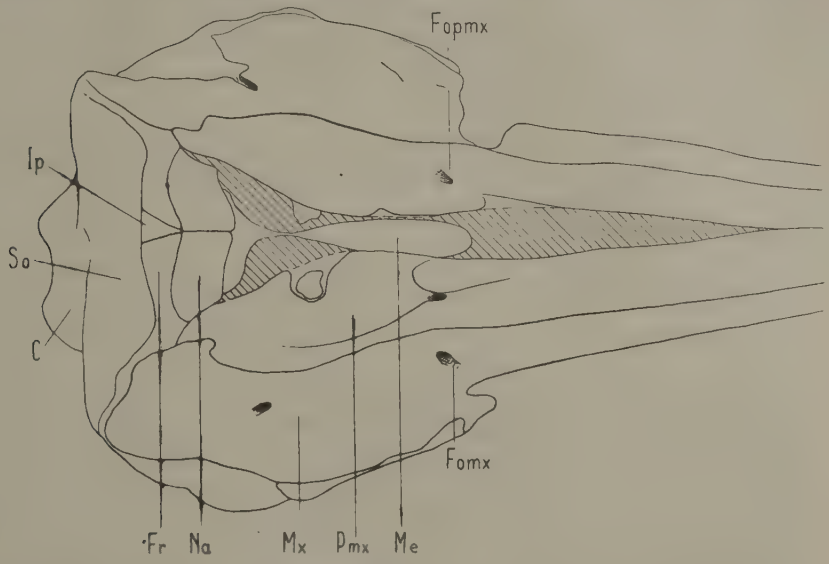


Fig. 4. — *Eurhinodelphis Cocheteuxi* du Bus (1/4 grand. nat.)

del forame premascellare, per assottigliarsi subito dopo procedendo in senso rostro-caudale. In *E. longirostris* l' assottigliamento comincia, invece, a circa metà della distanza tra il forame premascellare ed i nasali.

Dal confronto con *E. Cocheteuxi* (fig. 4), si nota che quest' ultimo, oltre ad avere dimensioni proporzionalmente maggiori, possiede i premascellari che conservano una larghezza pressochè costante fin quasi sotto i nasali, e i loro margini interni non mostrano quella curvatura, convessa medialmente, che, nel nostro esemplare, si avanza all' altezza del foro premascellare, restringendo la fossa mesorostrale.

Mascellare

I mascellari misurano, dalla linea di sutura col frontale fino all'apice, cm 62. Essi non prendono parte alla formazione di tutto il rostro, ma nella loro porzione anteriore si assottigliano e si arrestano a 24 cm. circa dalla estremità. In essi si possono distinguere due parti aventi forma nettamente

diversa: una distale, che va dall'apice alla linea preorbitaria; ed una prossimale, che va dalla linea preorbitaria al frontale. Nella porzione distale i mascellari sono allungati e, con la loro superficie esterna convessa, contribuiscono a dare al rostro una forma cilindroide. Essi decorrendo parallelamente ed inferiormente ai premascellari, costituiscono le porzioni laterali del rostro; poi a 24 cm. dalla linea preorbitaria subiscono quasi come una torsione, che fa disporre progressivamente la superficie esterna dell'osso dalla posizione laterale a quella dorsale. Nello stesso tempo i due mascellari divergono sempre di più, in modo da far assumere alla base del rostro un aspetto conico. Al livello del foro mascellare essi si slargano e si appiattiscono per costituire l'ala orbitaria, che forma la porzione prossimale del rostro. Questa misura cm. 10,7 di lunghezza e, al livello del mesetmoide, cm. 4,1 di larghezza.

Nella prima metà, sempre procedendo cranio-caudalmente, tale ala si presenta quasi pianeggiante, mentre nella seconda metà la superficie diviene lievemente concava, in quanto il margine posteriore, che si articola col frontale, si rialza a formare una cresta disposta lungo l'articolazione. I margini mediali delle due lamine, che si articolano con i rispettivi premascellari, subiscono un reciproco avvicinamento, in quanto essi sono lievemente incurvati medialmente, e si avvicinano ai nasali senza però raggiungerli.

Su ciascun mascellare si trovano, simmetricamente disposti, tre fori. Il primo, più grande, è il foro mascellare, che si trova all'altezza della linea preorbitaria; il secondo si apre, un po' obliquamente, sulla lamina mascellare a 2 cm. dal primo; il terzo, infine, è situato ancora più posteriormente, a 4 cm. dal precedente ed un po' prima che s'inizi la zona concava dell'ala sopraorbitaria. Esso si apre all'estremità di un solco, che, appena appariscente all'inizio, cioè nei pressi del margine esterno della lamina mascellare, si approfonda poi sempre più e si dirige obliquamente in dentro.

Nell'*E. longirostris* e nell'*E. Cocheteuxi* i mascellari mostrano lo stesso andamento, ma le dimensioni sono diverse: nel primo, infatti, prendono una parte più ristretta alla formazione del rostro (poco più di 2/5 della lunghezza di esso), nel secondo ne formano poco più della metà; nel nostro esemplare 3/5 circa del rostro sono costituiti anche dai mascellari.

Il Kellogg invece fa notare, che fra i mascellari ed i premascellari dell'*E. Bossi* della formazione di Calvert, egli non riscontra, come avviene per le due specie suddette, una sutura in quella stessa posizione; ma in quasi tutti gli esemplari ha ritrovato soltanto un solco poco profondo e mal definito che dubbiamente potrebbe considerarsi quale sutura.

Un'altra differenza esiste, inoltre, nel rapporto tra la larghezza del rostro all'altezza della linea preorbitaria e la sua larghezza all'estremità anteriore dei mascellari. Nella specie in esame, infatti, abbiamo cm. 10,8

per la prima di tali dimensioni e cm. 3,5 per la seconda; nell'*E. longirostris* rispettivamente cm. 9 e cm. 2,8, e nell'*E. Cocheteuxi* cm. 16 e cm. 2,8. Questo dimostra, che il rostro del primo oltre ad esser più corto è anche meno affusolato di quello degli altri due. Una migliore corrispondenza c'è, invece, col rostro dell'*E. Bossi*, che misura cm. 10,8 all'altezza della linea preorbitaria e cm. 1.4 all'estremità anteriore del rostro. Nel nostro esemplare questa seconda misura, di circa 1.2 cm., non si può prendere con molta precisione, perchè il rostro, a cominciare dal punto in cui si arrestano i mascellari, si presenta un po' schiacciato sul lato sinistro. D'altra parte non posso riportare per l'*E. Bossi* la larghezza del rostro all'estremità anteriore del mascellare perchè, come ho già fatto notare precedentemente, in questa specie il limite anteriore del mascellare non è ben definito.

Confrontando le dimensioni sotto riportate

	E. sal. cm.	*E. long.* cm.	*E. Coch.* cm.	*E. Bossi* cm.
Lunghezza lamina mx d.	10,7	13,6	20	15
Larghezza lamina mx d. all'altezza del mesetmoide	4,1	4,7	6	6

si osserva che i mascellari dell'esemplare in esame, mentre per la parte rostrale non mostrano differenze degne di nota in rapporto a quelli dell'*E. Bossi*, per il tratto dell'ala orbitaria sono, per le dimensioni, più ravvicinabili a quelli dell'*E. longirostris* e a quelli dell'*E. Cocheteuxi* per la conformazione della porzione sopraelevata.

Per quanto riguarda i forami del mascellare si notano le seguenti differenze: nell'*E. Bossi* si trovano due forami sul tratto rostrale del mascellare, il primo a cm. 4.2 dalla linea preorbitaria, ed il secondo, più prossimo a questa linea, è indicato dal Kellogg come foro mascellare. Un terzo foro si trova all'inizio dell'ala orbitaria ed infine un quarto vi si apre ancora più posteriormente, quasi alla stessa altezza del terzo foro osservato nell'*E. salentinus*.

Nasale

I nasali rappresentano assieme ai frontali la parte più elevata del cranio. Essi sono disposti fra le estremità posteriori dei premascellari e si articolano con questi lateralmente e con i frontali posteriormente. Si presentano con contorno triangolare, alquanto rigonfi, con le basi contigue ed i vertici rivolti in avanti ed in basso. Contrariamente a quanto si osserva nelle altre specie, essi non sono tra di loro a contatto lungo i margini mediali, ma questi, come chiaramente si vede nella fig. 1, divergono e deli-

mitano uno spazio in cui si scorge la parte più alta del mesetmoide. Tuttavia non si può dare troppa importanza a queste differenze, poichè l'aspetto delle ossa nasali è estremamente vario in individui di una stessa specie, e il confronto non avrebbe quindi valore comparativo.

Frontale

I frontali, a causa del cattivo stato di conservazione, non sono ben visibili. Essi sono rappresentati da una sottile cresta, estesa in senso trasversale sul vertice del cranio, e delimitata posteriormente dai sopraoccipitali e anteriormente dai nasali, dai premascellari e dai mascellari. Lateralmente ciascun frontale si porta più in basso e manda in avanti un processo sopraorbitale che segue il margine esterno della lamina mascellare. Non mi pare, in questo esemplare, di notare alcuna sutura che delimiti un interparietale. Nell'insieme l'aspetto dei frontali non differisce molto da quello delle altre specie, se si tien conto, naturalmente, delle variazioni individuali.

Lacrimale

Soltanto una piccola porzione dell'estremità anteriore del lacrimale destro è visibile avanti al margine anteriore della lamina mascellare destra. Dato lo stato del fossile non posso stabilire se esiste, in esso, la sutura fra lacrimale e jugale riscontrata nei crani di *E. cristatus*, o se queste due ossa sono saldate come in *E. longirostris*, *E. Cocheteuxi* e *E. Bossi*.

Parietale

In uno scavo praticato lateralmente ed inferiormente al sopraoccipitale ed al frontale è apparsa una piccola porzione del parietale destro, che, a causa del suo stato di conservazione, non mi permette di fare dei confronti con quello delle altre specie.

Sopraoccipitale

La squama del sopraoccipitale ha forma pressocchè ovoidale. È limitata superiormente dai frontali, lateralmente dai parietali ed inferiormente dagli esoccipitali. Il bordo anteriore è regolarmente convesso in avanti e non presenta quell'insenatura mediana riscontrata da O Abel in alcuni individui della specie *E. longirostris*. Il sopraoccipitale presenta superficie esterna convessa, ma la convessità si interrompe lungo la linea mediana, dove si trova, in direzione longitudinale, una depressione, che cominciando al di sopra del foro occipitale si continua verso l'alto e scompare al bordo anteriore dell'osso.

Questa depressione, però, dà l'impressione che sia stata occupata da una cresta mediana più o meno sopraelevata. Fa pensare ciò il fatto, che la superficie di detta depressione è fatta di osso spugnoso e le trabecole di questo sono dirette in senso longitudinale.

In seguito ad osservazioni fatte su diversi individui di una stessa specie del gen. *Eurhinodelphis,* il dott. ABEL ha osservato che il sopraoccipitale può presentare o un solco mediano più o meno sviluppato, o una cresta mediana distinta, o, infine, essere completamente piatto. Su queste differenze, egli ritiene, però, che abbiano una grande influenza il sesso e l'età.

Visto di profilo, il sopraoccipitale di questo esemplare forma con gli esoccipitali un angolo quasi retto, ma questo carattere credo sia sopratutto dovuto allo schiacciamento subìto nella fossilizzazione. Notevolmente diverso è invece quest'osso nell'*E. cristatus*: infatti il sopraoccipitale, oltre a presentarsi quasi verticale, presenta anche il bordo anteriore rialzato e rivolto all'indietro.

Esoccipitale

Al disotto del sopraoccipitale si articolano gli esoccipitali, che sono incompleti lateralmente ed inferiormente. Essi presentano i due condili

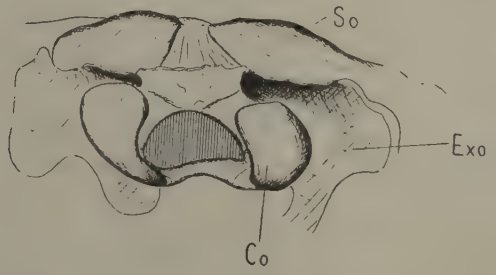


Fig. 5. — *Eurhinodelphis salentinus* n. sp. Faccia posteriore del cranio (2/5 grand. nat.)

occipitali, molto ben conservati, alquanto sporgenti e di forma ovale, il cui asse maggiore è verticale (fig. 5). I condili hanno superficie convessa, che nella metà dorsale guarda latero-posteriormente e nella metà ventrale guarda quasi ventralmente. Essi delimitano medialmente il grande foro occipitale. Questo, come nell'*E. longirostris*, è più largo che alto ed il margine superiore forma un arco più slargato, mentre in quello inferiore l'arco ha una maggior curvatura. Quest'ultimo margine si proietta per cm. 1,4 anteriormente al piano trasversale, che comprende all'incirca i margini laterali e superiori del forame. Diversa è la forma di questo foro nelle altre specie; nell'*E. Cocheteuxi* esso si presenta intatti più alto che largo.

È da tener presente, però, che O. Abel, paragonando tra di loro diversi crani di *Phocaena communis*, ha potuto constatare la forte variabilità nella forma del loro occipitale, per cui questa non può essere considerata un buon carattere sistematico.

Conclusione

La descrizione precedente dimostra all'evidenza come l'avanzo di Melpignano si possa con certezza attribuire al genere *Eurhinodelphis* du Bus, 1867, del quale ripete tutti i caratteri distintivi (scatola cranica piriforme, rostro estremamente allungato, mascellari che non prendono parte alla formazione di tutto il rostro, che, nell'ultimo tratto, è formato dai soli premascellari).

Dai confronti eseguiti con tutte le specie a me note (*E. longirostris* du Bus, *E. Cocheteuxi* du Bus, *E. cristatus* du Bus sp., *E. Bossi* Kellogg, *E. pacificus* Matsumoto) risulta — con le riserve consigliate dal cattivo stato di conservazione e dalla totale mancanza dei denti — che il fossile presenta i maggiori rapporti con le specie *E. longirostris*, *E. Cocheteuxi* ed *E. Bossi*, come si è già notato nella descrizione delle ossa meglio conservate. Tuttavia anche con queste forme è facile rilevare delle differenze, che non permettono di associarlo ad alcuna di esse. Infatti, mentre per la parte rostrale il campione della pietra leccese presenta maggiori affinità con l'*E. Bossi* del Miocene di Calvert, per i caratteri della scatola cranica è invece più somigliante agli *E. longirostris* e *E. Cocheteuxi* del Miocene di Anversa.

Ritengo quindi opportuno, per tutte le differenze messe in evidenza nella descrizione delle singole ossa, attribuire a nuova specie l'avanzo di Melpignano, che indico col nome di *E. salentinus*.

Napoli, Istituto geo-paleontologico dell'Università. Maggio 1950.

Fig. 1 — ***Eurhinodelphis salentinus*** n. sp. Faccia dorsale del cranio (circa 1/5 grand. nat.)

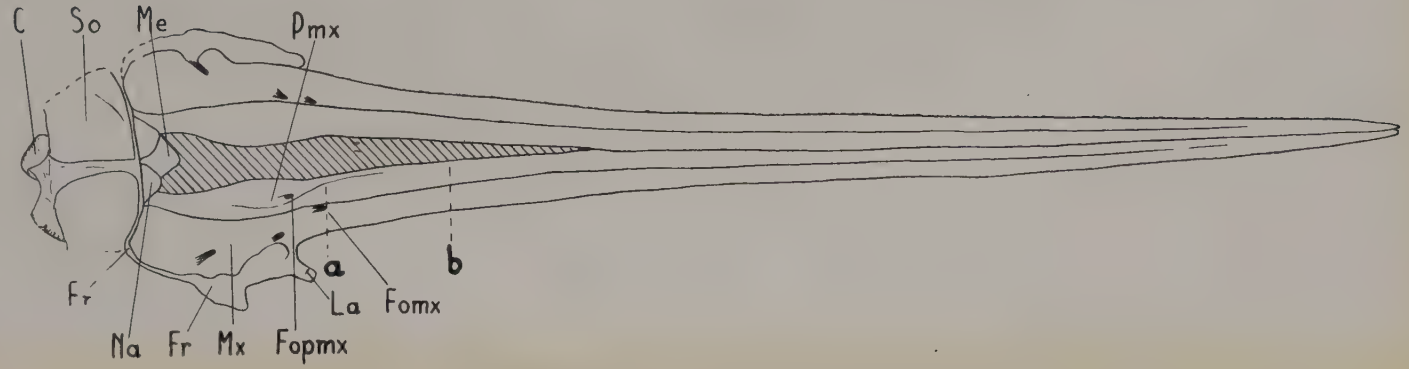


Fig. 2. — ***Eurhinodelphis salentinus*** n. sp. Faccia dorsale del cranio (circa 1/5 grand. nat.)

La terrazza della Starza nei Campi Flegrei

Nota del dott. **Vincenzo Minieri**, *presentata dal socio* **G. D'Erasmo**

(Adunanza del dì 3 giugno 1950)

Sunto. — Viene descritta dal punto di vista morfologico, stratigrafico, paleontologico e genetico la terrazza della Starza, prodotta dal disfacimento dei materiali tufacei del cratere del Gauro. La fauna rinvenuta in questa formazione marina, che si estende, lungo il litorale flegreo, dalla località Gerolomini presso Pozzuoli fino alla collina di Tritoli, risulta costituita da foraminiferi, celenterati e molluschi appartenenti tutti a specie viventi e si rivela caratteristica della zona litoranea delle laminarie e delle alghe coralline.

Nella regione flegrea, ove l'intensa e non ancora spenta attività vulcanica ha impresso mirabilmente le linee fondamentali del paesaggio, cesellate poi dall'ulteriore azione dell'aria e dell'acqua, alla base dell'antico cono tufaceo del Monte Gauro, si estende un'ampia terrazza di accumulazione, di origine marina, nota col nome di « Starza ». Dalla località Gerolomini presso Pozzuoli essa si protrae, attraverso diverse interruzioni naturali ed artificiali, sino al lago Lucrino, addossandosi alla collina di Tritoli.

L'altezza di questa terrazza sull'attuale livello marino non è uniforme, ma va degradando, secondo l'accumulazione e l'erosione, dai 77-80 metri ai 30, abbassandosi verso il Lucrino. Il suo nome ha dato origine a diverse interpretazioni: secondo O. G. Costa, l'etimologia va ricercata nel vocabolo « stadium », poichè sottostante allo stadio, per un tratto nel quale avanzano tuttora i ruderi di un antico edificio romano, che doveva essere la villa di Cicerone; secondo il De Lorenzo, nel vocabolo « strata », poichè caratterizzata da un terreno a strati paralleli di materiali piroclastici in diverso stato di aggregazione e cementazione.

Questo toponimo si trova però ripetuto per altre località. Così per l'isola di Procida la carta topografica dell'Istituto geografico militare al 25.000 riporta la denominazione di « starza » per una località pianeggiante nel versante settentrionale dell'isola.

Notizie al riguardo riporta altresì l'antico scrittore Loffredo Ferrante, il quale, nel suo prezioso opuscolo *Antichità di Pozzuoli et luoghi convicini* (Napoli, 1575), cita la collina, quando parla della villa di Cicerone, la quale « venea a tener sotto di sè la starza ».

Un lembo sedimentario, ricco di avanzi organici, in una regione intensamente, caratteristicamente ed uniformemente vulcanica, suscita sempre vivo interesse; sicchè non sono mancati contributi molteplici di osservazioni diverse da parte di paleontologi, geologi ed anche mineralisti.

Il presente lavoro ha appunto lo scopo, con lo studio della stratigrafia della Starza e dei fossili in essa contenuti, la cui determinazione mancava, di precisare ed ampliare le conoscenze che si possedevano su questa terrazza.

Le prime notizie di un certo interesse sui fossili della Starza sono contenute in uno opuscolo di Arcangelo Scacchi [1]), il quale si interessa nel suo lavoro del deposito conchiglifero che si estende presso la spiaggia del continente tra Pozzuoli e Monte Nuovo. Le specie fossili di crostacei ed echinodermi ritrovate corrispondono a quelle che vivono tuttora nel golfo di Napoli, per quanto conservino più smorti i colori, e sono contenute, quasi sempre intatte, in una sabbia sottile.

Particolari riguardanti direttamente la Starza dà invece Leopoldo Pilla [2]), il quale, trattando dei terreni terziari, cita tra quelli pliocenici recenti i depositi di Pozzuoli, costituiti da materiali vulcanici stratificati, in posizione orizzontale, depositatisi sotto le acque marine. Tale origine è confermata dalla presenza di numerosi resti organici marini, appartenenti a specie che vivono attualmente nel golfo di Napoli.

Oronzio Gabriele Costa [3]), in base a considerazioni risultanti dal confronto di specie che si trovano sepolte ai piedi del Monte Nuovo presso Pozzuoli e nelle marne argillose dell'isola d'Ischia, rilevando che alcuni avanzi di lamellibranchi e di polipai si rinvengono in istato freschissimo, conclude che il deposito conchiglifero del Monte Nuovo dovette uscire dall'acqua come di recente si trova, « restando avviluppati i loro abitatori quand'erano ancora in vita ».

Lo stesso Costa [4]), in una successiva pubblicazione, espose i risultati delle sue ulteriori ricerche in quella zona fossilifera. In uno strato di sabbia finissima egli rinvenne numerose spoglie organiche freschissime di foraminiferi, ostriche, spondili e gruppi di *Cladocora caespitosa*. E in base ai rinvenimenti effettuati dette un elenco di gasteropodi e di lamellibranchi da lui determinati. A questo venne aggiunto uno successivo, di crostacei

---

[1]) Scacchi A., *Memorie mineralogiche e geologiche*. Antol. di Sc. Nat., vol. I, pag. 33-48. Napoli, 1841.

[2]) Pilla L., *Trattato di geologia*. Vol. II. pag. 60. Pisa, 1847-51.

[3]) Costa O. G., *Di un erpetolite idrotermale con appendice di osservazioni intorno ai depositi di avanzi organici a piè di M. Nuovo presso Pozzuoli e nelle marne argillose dell'isola d'Ischia*. Rend. Acc. Pontan., anno I, fasc. II. Napoli, 1853.

[4]) Costa O. G., *Osservazioni ulteriori intorno ai fossili organici di Pozzuoli*. Rend. tornate Acc. Pontan. Napoli, 1853.

ed ostracodi, che fu pubblicato dallo stesso autore [1]) nella sua *Paleontologia del Regno di Napoli.*

Nel 1892, in appendice ad un suo lavoro, il De Angelis [2]) riportò un elenco di fossili conservati nel Museo geologico di Roma come provenienti dai depositi vulcano-marini, che trovansi alla base del Monte Barbaro presso Pozzuoli: conchiglie marine che hanno facies recente e denotano uno spostamento della linea di spiaggia nelle vicinanze di Pozzuoli.

Nel 1915, studiando i crateri del Monte Gauro nei campi flegrei, De Lorenzo e Simotomai [3]) si occuparono ampiamente della Starza, trattando della origine sottomarina del vulcano. In tale lavoro la Starza viene definita come una terrazza di accumulazione intorno al cono del Monte Gauro, originatasi ai piedi del vulcano in gran parte con i materiali da esso eruttati e successivamente erosi e trasportati dall'acqua marina. I diversi strati giacciono quasi orizzontali; sicchè questa condizione stratigrafica prova che essi si sono depositati in acqua marina, che si rivela facilmente di scarsa profondità per la malacofauna caratteristica di basso mare rinvenutavi. Gli autori stessi raccolsero taluni avanzi, che potettero essere determinati solo genericamente, dato il loro pessimo stato di conservazione.

Più recentemente si occupò dell'argomento il Minucci [4]), che, trattando dei depositi marini pliocenici e post-pliocenici nella Campania, ricordò il citato elenco di specie fossili dato dal De Angelis e già in parte riportato da altri autori. Tra esse egli considerò caratteristica la presenza dello *Spondylus gaederopus*, evidentissimo alla Starza, e concluse, in base alle specie riportate dallo Scacchi, che la promiscuità di varie forme della regione litorale indica il tipo di spiaggia della formazione originatasi alla base del Monte Gauro, su una terrazza incidente una ripida costa subacquea.

Morfologia e stratigrafia della Starza

La terrazza della Starza non presenta, lungo tutta la sua estensione, una perfetta continuità stratigrafica per le condizioni stesse della sua formazione. Il disfacimento di precedenti coni tufacei, l'accumulo di materiali piroclastici in massima parte testimonianti la provenienza da centri

---

[1]) Costa O. G., *Paleontologia del Regno di Napoli.* Atti Acc. Pontan., vol. VIII. Napoli, 1864.

[2]) De Angelis G., *Il pozzo artesiano di Marigliano.* Atti Acc. Gio. Sc. Nat., vol. VII, serie IV. Catania, 1882.

[3]) De Lorenzo G. e Simotomai H., *I crateri del Monte Gauro nei Campi Flegrei.* Atti R. Acc. Sc., serie II, vol. XVI. Napoli, 1915.

[4]) Minucci E., *Il mare pliocenico nella Campania.* Memorie geologiche e geografiche di G. Dainelli, vol. III. Firenze, 1932.

eruttivi posteriori a quelli del Monte Gauro, la deposizione del materiale fluitato dall'erosione superficiale derivante dalle varie regioni delle porzioni emerse nei Flegrei, l'azione stessa del moto ondoso con le conseguenti correnti di fondo che diversamente distribuivano questo materiale sullo zoccolo sottomarino, sono ragioni palesi della irregolarità che si nota nel deposito dei terreni costituenti la terrazza.

I suoi confini possono essere esattamente delimitati. Nella parte orientale la formazione in parola è a diretto contatto con la trachite del Monte Olibano, al di sotto della quale essa continua: contatto che è geograficamente situato a sud della città di Pozzuoli, in località Gerolomini, di fronte alle Terme Puteolane. Da questo punto e con diverse interruzioni, la terrazza si prolunga sin quasi all'imbocco della galleria della ferrovia cumana per Pozzuoli.

Poco prima dell'ingresso del tunnel, difatti, affiora un banco di tufo giallo, che diviene subito di un colore bigio, e contiene pomici fresche e lapillo lavico. Alla sua destra, sul fronte nord, pare che si risolva in un tufo tipicamente bigio, ma non con i caratteri comuni di quello che siamo abituati a considerare come appartenente al terzo periodo; i locali, per la sua poca consistenza, lo chiamano « mappamonte ». Esso risulta costituito da pomici grandi e piccole, commiste a proietti lavici. Tra questi ve n'è qualcuno che è tutta una cementazione di proietti vitrofirici neri o di altra natura, i quali non turbano il regolare andamento stratigrafico del banco tufaceo.

Non manca qualche proietto di tufo giallo in esso intercluso. Con ogni probabilità ci si trova innanzi a un rudere dell'antico cratere di Pozzuoli, rudere che, protraendosi nel mare, ha ad esso addossata, verso l'alto, la terrazza della Starza.

La presenza di grandi pomici e scorie lascia pensare a un deposito in situ, anzichè di trasporto. In qualche punto della massa bigia, invece di qualche proietto, si notano addirittura delle chiazze di colore giallo, che con perfetta continuità si risolvono in grigio.

Gli strati descritti hanno immersione Nord-Nord-Ovest.

Al di là della parte alta di Pozzuoli, la Starza riappare, dopo un profondo solco di erosione, poco prima della località Pozzuoli-Cantiere, continuandosi con una serie di interruzioni naturali ed artificiali sino alla stazione Arco Felice, ov'è attraversata dalla carrozzabile Pozzuoli-Lucrino. Da questa località la terrazza prosegue fino al bacino di Teano, che ne costituisce il limite nord-occidentale, estendendosi con poca uniformità fino alle pendici del Gauro, ed infine, assottigliandosi sempre più si incunea sotto il Monte Nuovo, addossandosi forse alle falde orientali del monticello del Pericolo sotterrato dalla improvvisa esplosione del 1538 (v. fig. 1).

Ad ovest del lago Lucrino un piccolo lembo, prolungamento della terrazza stessa, va ad addossarsi alla collina di Tritoli, presso le stufe di Nerone.

Seguendo attentamente la terrazza in tutta la sua estensione, si osserva che essa è costituita da terreni di varia natura. La sedimentazione del materiale disgregato, di natura piroclastica, dovette essere diversa

Fig. 1. — Schizzo topografico della terrazza della Starza (Scala 1 : 50,000)

poichè l'altezza della collina presenta delle oscillazioni anche notevoli: così, da zone elevate appena di 30-35 metri, si giunge a zone nelle quali, per l'erosione maggiore, l'accumulazione fu più intensa, tanto che l'altezza massima giunge sino ai 77 metri e in qualche punto fino agli 80.

L'esame stratigrafico del tratto della terrazza che fronteggia il cantiere Armstrong, distante qualche centinaio di metri dalla stazione di Pozzuoli-Cantiere, non è stato difficile poichè ivi l'erosione e la distruzione operate dagli agenti esogeni sono state più intense.

Come risulta dalla sezione schematica seguente (vedi fig. 2), si osserva una parte inferiore costituita da roccia incoerente, finemente sabbiosa, che forma un ampio ed elevato piede alla terrazza: materiale evidentemente portato via dal deposito originario. A questo strato succede, superior-

mente, un secondo strato coerente, riccamente fossilifero, e ad esso un deposito di pomici chiare e piccole, separato dai materiali costituenti lo strato superiore della terrazza che è diffuso di scorie bianche, mediante un sottilissimo strato di tufo grigio e pomici grandi. La stratificazione termina verso l'alto con un deposito di pomici marrone, sul quale s'incontrano moltissime rovine di « opus reticulatum ».

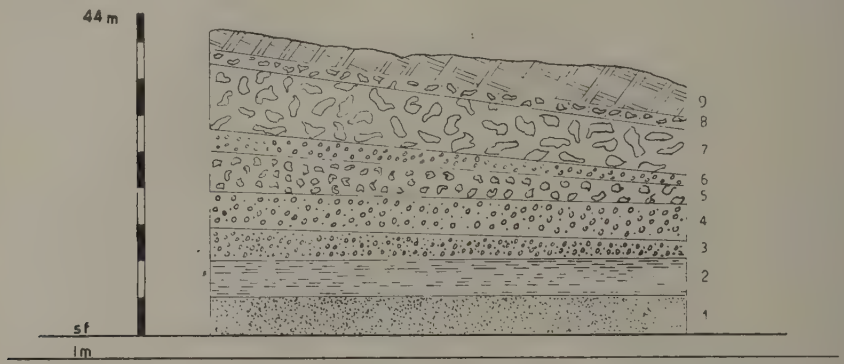


Fig. 2. — Sezione naturale della Starza nel tratto che fronteggia il Cantiere Armstrong.

1. Sabbia e materiali diversi incoerenti,
2. Zona di sabbia e pomici.
3. Sabbia con pochi fossili.
4. Strato ricchissimo di fossili.
5. Banco di pomici chiare.
6. Tufo grigio.
7. Banco di scorie bianche e pomici chiare.
8. Banco di pomici marrone.
9. Ruderi romani.

sf = livello della strada ferrata.
lm = livello attuale del mare.

L'esame mineralogico del materiale ha dato i seguenti risultati:

1° strato: su 200 gr. del campione dello strato primo ho separato:

a) 55 gr. di pomici di varia grandezza, finemente bollose e senza alcuna fase cristallina. Rara è qualcuna, la quale contiene qualche laminetta di mica e qualche individuo feldispatico;

b) 40 gr. di pomici della grandezza di un grano di miglio;

c) 40 gr. con frammentini pomicei, frammenti di sanidino, qualche laminetta di biotite;

d) 65 gr. costituiti da frammenti di sanidino, laminette di biotite, qualche cristallino di augite, qualche granulo di magnetite.

2° strato: sottile sabbietta feldispatica.

3° strato: sabbia con frammenti di sanidino e con pochi fossili.

4° strato: è quello eminentemente fossilifero; 200 grammi del materiale, trattati con acqua, lasciano in sospensione una parte, che filtrata, essiccata ed osservata a forte ingrandimento, risulta costituita da minutissimi frammenti bianchi di sanidino. Effervesce con HCl per la presenza di calcare organico.

5° strato: pomici chiare bollose, con qualche elemento cristallino.

6° strato: tufo grigio corrispondente nei suoi caratteri a quello tipico del terzo periodo dei Campi Flegrei.

7° strato: scorie bianche e pomici chiare.

8° strato: pomici di colore marrone.

Verso ovest, in località poco distante dalla prima e cioè al di là della stazione di Pozzuoli-Cantiere, è facile osservare un altro tratto della medesima terrazza. Qui lo sperone della Starza mostra una successione stratigrafica identica alla precedente, mancando solo il banco di pomici marrone, che non si riscontra per la presenza di avanzi di fondamenta di antiche costruzioni.

Nella zona intermedia gli strati per un vasto tratto non si possono seguire perchè obliterati da opere di rivestimento murale. Ma dove quest'opera finisce affiora un banco di pomici fresche coperte da una patina rossa di ossido di ferro.

Profondi solchi di erosione si osservano lungo tutta la formazione in esame. Uno di essi, che costituisce la prima interruzione dei terreni descritti, si riscontra poco dopo l'inizio orientale della Starza, ove i due tratti di terreno stratificati, separati da una zona coltivata, sono uniti dal ponte della ferrovia Napoli-Villa Literno-Roma.

Nel tratto fra le stazioni di Pozzuoli e Pozzuoli-Cantiere, a sinistra della Chiesa di S. Antonio sulla via Annunziata che dà sulla via Campana, appare un'altra interruzione. E qui il solco di erosione s'inoltra sino a via Celle, che porta a sinistra sulla via Campana. Non si osservano però per un buon tratto, allorchè si segue detta via, sezioni della Starza, sia perchè le pareti opposte sono coperte da ruderi di case e colombai romani, sia perchè in certo qual modo ci si trova di già sul piano della terrazza stessa.

Risultati paleontologici

Il tratto della terrazza della Starza situato al di sotto della carrozzabile Pozzuoli-Lucrino-Monte Nuovo è stato oggetto di una serie di mie escursioni metodiche, poichè ivi ebbi la fortuna di individuare, nel corso delle ricerche, uno strato ricchissimo di avanzi organici. La località dista all'incirca 100-150 metri dalla stazione ferroviaria di Pozzuoli Cantiere,

verso oriente. In questo punto la terrazza si erge ripida e di difficile accesso, vicinissima alla strada ferrata, che la divide per breve tratto dalla via che congiunge Pozzuoli con Arco Felice.

Sul ripido pendio formato all'inizio della collina da un banco di materiale incoerente ho rinvenuto numerosi frammenti di conchiglie adagiati sulla superficie dei terreni disgregati, sabbiosi e polverulenti, trasportati evidentemente dal loro giacimento originario per effetto di dilavamento delle acque piovane. Sullo stesso pendio quasi inaccessibile, sin dove la stratificazione appare evidente per l'azione operata dagli agenti esogeni, ho individuato uno strato conchiglifero ed in esso interclusi numerosi fossili. L'estrazione non è stata difficile, dato che la roccia inglobante si distacca e si sgretola con facilità. In successive escursioni ho potuto raccogliere sempre nel medesimo strato moltissimi resti organici, appartenenti per la massima parte a molluschi marini e in minor parte a foraminiferi, celenterati e vermi.

Il numero delle specie è piuttosto abbondante, ma la ricchezza di ciascuna di esse è singolarmente varia. Le conchiglie rinvenute sono tutte appartenenti a specie attualmente viventi nel golfo di Napoli, e il loro perfetto e ottimo stato di conservazione ha sempre permesso una determinazione generica e specifica soddisfacente.

Il banco conchiglifero non è rintracciabile in altri punti della terrazza, non solo perchè la superficie di essa è abbastanza irregolare, ma anche perchè, in taluni punti, l'opera dell'uomo ha modificato la morfologia primitiva del deposito; è evidente comunque che esso doveva originariamente continuarsi tanto dal lato orientale quanto da quello occidentale della formazione in esame. L'abbondanza del materiale raccolto ed i caratteri della fauna rappresentata mi hanno più facilmente rivelato che l'accumulo dovette avvenire in una zona di mare poco profondo, poichè già a prima vista le specie rappresentate risultano caratteristiche della zona litoranea delle laminarie e delle alghe coralline.

Le specie determinate sono le seguenti:

Foraminiferi

1. *Karreriella bradyi* Cush.
2. *Elphidium crispum* L.
3. » *macellum* Fichtel e Moll
4. » sp.
5. » *advenum* Cush.
6. *Nonion boueanum* d'Orb.
7. *Quinqueloculina longirostra* d'Orb.
8. » *seminulum* L.
9. » *trigonula* Lmk.

10. *Quinqueloculina venusta* Karrer.
11. » *costata* d' Orb.
12. » *tricarinata* d' Orb.
13. *Triloculina quadrilateralis* d' Orb.
14. *Rotalia beccarii* L. var. *inflata* Seg.
15. *Discorbis globularis* d' Orb.
16. *Globigerina bulloides* d' Orb.
17. *Globigerinoides triloba* Reuss.
18. *Guttulina problema* d' Orb.
19. *Cibicides* sp.

Celenterati

1. *Cladocora stellaria* Milne Edw. & Haine.

Molluschi

1. *Dentalium novemcostatum* Lmk.
2. *Euthria cornea* L.
3. *Cerithium vulgatum* Brug.
4. *Vermetus intortus* Lmk.
5. *Turritella tricarinata* Risso.
6. *Fissurella italica* Dfr.
7. *Trochus (Calliostoma) cingulatus* Brocchi sp.
8. *Ostrea edulis* L. var. *lamellosa* Br.
9. *Spondylus gaederopus* L.
10. *Pecten iacobaeus* L. sp.
11. *Flexopecten flexuosus* Poli
12. *Chlamys varia* L. sp.
13. » *inflexa* Poli
14. *Arca Noae* L.
15. *Cardium paucicostatum* Sow.
16. » *papillosum* Poli
17. » *edule* L.
18. *Chama gryphina* Lmk.
19. *Venus gallina* L.
20. » *verrucosa* L.
21. *Meretrix rudis* Poli sp.

Di tutte queste specie, attualmente viventi nel golfo di Napoli e la cui distribuzione batimetrica, com'è noto, è compresa tra 0 e 72 metri, quelle più abbondanti alla Starza sono lo *Spondylus gaederopus* e la *Cladocora stellaria*.

Genesi della terrazza

In base alle considerazioni precedentemente fatte io ritengo che il primo notevole apporto alla formazione della Starza, più che alla esclusiva azione del moto ondoso battente ai piedi il fronte del monte Barbaro, sia dovuto invece a un'azione generale erosiva marina che interessò tutto il materiale, e non poco, che forma l'attuale bacino di Teano.

Com'è noto in base agli studi di De Lorenzo [1]), il Gauro, uno dei più antichi coni di tufo giallo dei Campi Flegrei, dovette sorgere quasi come un'isola, in un vasto mare liberamente ondeggiante alle sue falde, che lo circuiva per circa tre quarti del suo perimetro basale, battendolo in pieno. Ora nel Gauro noi constatiamo, ad occidente e ad oriente, due insenature, le quali in parte possono spiegarsi come collassi dell'edificio eruttivo e in parte come cedimenti, per scalzamento da parte del mare, di imponenti masse tufacee fessurate. Per il bacino di Teano, poichè qualche autore, per spiegarsi la forma' così arcuata ed a nette pareti precipiti, ha invocato l'intervento di una bocca eruttiva laterale, che avrebbe dilaniato il fianco occidentale del Gauro, il De Lorenzo ha contrapposto l'assenza di materiali di esplosione provenienti da tale bocca sulle pendici del Corbara. Inoltre, il De Lorenzo, sostenitore della formazione del bacino di Teano per azioni esogene, richiama l'analogia morfologica che si riscontra sul fianco occidentale di Miseno, esposto alle violente mareggiate del ponente e del libeccio.

Qui, difatti, i cedimenti sono avvenuti anche sotto i nostri occhi: il mare, scalzando la base tufacea e costruendo in essa delle grotte, costringe, con tutto il complesso che comporta il disfacimento erosivo, enormi masse a gravitare a strapiombo e precipitare nell'acqua sottostante.

Qualora il mare fosse molto profondo o la morfologia del fondo fosse tale da consentire un allontanamento di questo materiale dalla costa, allora tutti questi prodotti del disfacimento non costituirebbero più una formazione costiera aderente al nocciolo emerso dal quale sono derivati.

Ma diversamente, se la morfologia del fondo circostante al vulcano è tale da non consentire la dispersione, e maggiormente ancora la profondità del mare non è eccessiva, il materiale non può disperdersi, disseminarsi, non accumularsi. Sicchè varie cause concorrono in tale fenomeno, compresa l'enorme massa prodotta, connessa alla vastità dell'edifizio stesso, che di necessità fa sentire la sua influenza morfologica alla fascia di acqua soprastante alle porzioni sommerse dell'edificio.

Sia i sistemi craterici del Gauro che quelli di Miseno vengono a trovarsi, per quella che è la loro morfologia in rapporto all'azione del mare,

---

[1]) Op. cit

nelle identiche condizioni: e precisamente nell'uno e nell'altro una zona intatta settentrionale con due fianchi, l'orientale e l'occidentale, battuti ed erosi da mare libero; in ambedue un fronte meridionale esposto all'azione del mare.

A Miseno, sul fianco occidentale, si rinviene la «cala moresca», che è un bacino di Teano in miniatura, ma non troviamo alcun terrazzamento. Evidentemente questo sperone di Miseno, chiudente ad occidente l'arco del golfo di Napoli, non aveva ai suoi lati, per quel che ci consta, formazioni vulcaniche che costituissero una morfologia del fondo, la quale, riducendone la profondità e modificandone la topografia, avesse consentito la formazione di uno zoccolo sottomarino, che dalle carte idrografiche non si rileva. Sicchè le violente mareggiate del ponente portavano verso il mare profondo, nel seno del golfo, il materiale asportato, ed allontanavano quello che i venti del secondo e del terzo quadrante volta per volta andavano formando.

In condizioni differenti veniva a trovarsi il massiccio del Gauro, insieme con gli altri crateri preavernici di tufo giallo, che conferivano al fondo del mare una morfologia ben diversa da quella della zona di Miseno. Anche qui il mare di ponente e del libeccio battevano in pieno il fianco occidentale; sicchè poco per volta la massa tufacea del Gauro in questo settore precipitò nelle acque. Il materiale in parte affondò in esse e in parte emerse addossandosi al monte, come ora accade a Miseno nella «cala moresca».

Il fronte del Barbaro, poi, veniva a sua volta battuto dal ponente che gli divenne radente col proseguire della demolizione del vulcano, ma poi rimase esposto principalmente ai mari che dal libeccio vanno allo scirocco, i quali contribuirono con la loro demolizione a procurare altro materiale di disfacimento.

In definitiva le correnti di ponente ammassavano sul fronte meridiodionale del Gauro il prodotto del disfacimento occidentale di tale edifizio e quello prodotto dall'azione dei mari di mezzogiorno e di scirocco; i mari di scirocco riportavano questo materiale ed addossarsi alla costa, mentre quelli di mezzogiorno tendevano a disporre parallelamente al fronte del Gauro il materiale che le due correnti predette spostavano ora in un senso, ora in un altro.

Quindi la terrazza della Starza, in conclusione, è principalmente prodotta dal disfacimento del massiccio del Gauro sotto l'azione del mare testè descritta. Ciò darebbe spiegazione della sua morfologia e della sua estensione. La collina dovrebbe pertanto ad oriente prolungarsi fin dove si estendevano le propaggini del Gauro, fin dove esistevano coni di tufo giallo e fin dove le correnti marine riuscivano ad accumulare tale materiale lungo la costa.

Ad occidente abbiamo un limite rappresentato dagli archi craterici

preavernici del Lucrino [1]), su cui la terrazza si adagia come un piccolo lembo. A rigor di termini, essa avrebbe dovuto costituire una fascia costiera ininterrotta, ma le evidenti interruzioni, che vi si osservano, sono dovute alla morfologia del fondo disturbata dagli atti eruttivi dei crateri predetti ed all'azione erosiva esercitata dalle acque nella successiva fase di emersione. Difatti in antico la Starza si appoggiava al Monticello del Pericolo, ma con la fase di sollevamento la morfologia superficiale veniva a modificarsi gradualmente, per l'azione delle acque dilavanti, che, come ora si nota in più di un tratto della terrazza, ne asportano lembi più o meno notevoli, determinando la formazione di estesi solchi di erosione.

Si veniva così a formare quella valletta, ad esempio, che si stende tra il monte Barbaro e il Monticello del Pericolo, e che «conduceva all'Averno e a li bagni», come dice Marcantonio Delli Falconi.

Essa difatti si addossava ad oriente e ad occidente di detto monticello, così come ora si addossa ad oriente del cratere di Tritoli. La montagnella che è ad occidente del Monte Nuovo e da interpretarsi per l'appunto come dovuta all'adagiarsi del materiale del monte stesso sul rilievo della Starza addossantesi al monte del Pericolo [2]).

Emersa nella terza fase di sollevamento del Gauro, quando con essa cioè si sollevava il complesso dei crateri connessi del secondo periodo dei Campi Flegrei, almeno di quelli che di poco precedettero il Gauro, o che lo accompagnarono o che lo seguirono di poco, questa terrazza ha seguìto le vicende del bradisisma che interessò ed interessa tutta la regione flegrea [3]).

Iniziatasi la fase di abbassamento nell'epoca storica, la zona di nuovo si è andata sollevando dalla fine dell'XI secolo al secolo XVI per poi riprendere, dopo l'eruzione del Monte Nuovo del 1538, il moto di discesa che tuttora continua.

Napoli, Istituto geo-paleontologico dell' Università, maggio 1950.

---

[1]) I crateri di Tritoli, della Ginestra e del Monticello del Pericolo.

[2]) Parascandola A., *Il Monte Nuovo e il lago Lucrino*. Boll. Soc. Nat., vol. LV. Napoli, 1944-46.

[3]) Parascadola A., *I fenomeni bradisismici del Serapeo di Pozzuoli*. Napoli, Tip. Genovese, 1947.

Le corpoproiettività dell' S_4 biduale nelle tre rappresentazioni complesse

Nota del dott. **Pio Balsimelli**, *presentata dal socio* **N. Spampinato**

(Adunanza del dì 3 giugno 1950)

Sunto. — Si introducono le corpoproiettività dell' S_4 biduale e si determinano le equazioni delle trasformazioni ad esse corrispondenti negli spazi della congruenza, del cono e nel piano della terza rappresentazione. Si considerano in particolare le corpoproiettività involutorie e le trasformazioni ad esse relative.

1. *Le proiettività dell' S_3 complesso che trasformano la congruenza in sé.*

Corpoproiettività dell' S_4 biduale è una corrispondenza in tale S_4 che determina nella congruenza di rette una proiettività che trasforma tale congruenza in sè.

Per determinare le equazioni di una tale proiettività ricordiamo che la congruenza in esame è costituita dalle rette di S_3 uscenti ad ∞^1 ad ∞^1 dai punti dell'asse A_2A_4 e situate nei piani omologhi dei punti di appoggio in una proiettività σ tra la punteggiata A_2A_4 ed il fascio di piani (A_2A_4).

Dopo avere osservato che l'asse A_2A_4 deve essere unito nelle nostre proiettività, cioè che queste vanno ricercate tra quelle di equazioni:

$$(1)\qquad \begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 \qquad\qquad + a_{13}x_3 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\ x'_3 = a_{31}x_1 \qquad\qquad + a_{33}x_3 \\ x'_4 = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \end{cases} \qquad (a_{ik} \text{ generici})$$

abbiamo proceduto poi in tal modo: scelto un punto Z abbiamo determinato il punto di appoggio Z_1 della retta della congruenza passante Z, indi l'omologo Z'_1 di Z_1 nella (1) ed abbiamo imposto che l'omologo Z' di Z appartenesse al piano corrispondente in σ al punto Z'_1. Siamo così giunti alle proiettività di equazioni:

$$(1')\qquad \begin{cases} x'_1 = ka_{22}x_2 \qquad\qquad + ka_{24}x_3 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\ x'_3 = ka_{42}x_1 \qquad\qquad + ka_{44}x_4 \\ x'_4 = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \end{cases}$$

Le (1') formano gruppo e sistema lineare. In particolare per $k = 1$ si hanno le trasformazioni immagini delle proiettività biduali, mentre se $k \neq 1$ per rappresentare la trasformazione relativa, abbiamo introdotto il semiprodotto scalare di una coppia (λ, μ) per uno scalare k (corrispondenza coniugio d'indice k), cioè abbiamo posto:

$$\lambda^* = k\,\overline{X}\,\lambda = x_1\,u + k\,x_2\,\varepsilon$$
$$\mu^* = k\,\overline{X}\,\mu = x_3\,u + k\,x_4\,\varepsilon$$

ed abbiamo osservato che la (1') è l'immagine sulla congruenza della trasformazione prodotto della trasformazione coniugio d'indice k per una generica proiettività biduale.

Le proiettività (1') dipendono da nove coefficienti omogenei, ma esse, come si può facilmente vedere, ad ∞^1 ad ∞^1 determinano una stessa corrispondenza tra le rette della congruenza e provengono quindi da una stessa corpoproiettività biduale e pertanto queste sono in numero di ∞^7. Più precisamente, se avviene che in due matrici del tipo (1') sia:

$$a_{21} = m\,a_{34}$$
$$a_{12} = m\,a_{43}$$

le due corpoproiettività corrispondenti coincidono.

2. *La particolare proiettività involutoria determinata dalla corrispondenza coniugio C_{-1}.*

La corrispondenza dell'S_4 biduale di equazioni:

$$\begin{cases} \lambda' = -1\,\overline{X}\,\lambda \\ \mu' = -1\,\overline{X}\,\mu \end{cases}$$

equivalente nel campo complesso alle equazioni

$$\begin{cases} x'_1\,u + x'_2\,\varepsilon = x_1\,u - x_2\,\varepsilon \\ x'_3\,u + x'_4\,\varepsilon = x_3\,u - x_4\,\varepsilon \end{cases}$$

determina nell'S_3 la proiettività γ di equazioni:

γ)
$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \\ x'_2 = -x_2 \\ x'_3 = x_3 \\ x'_4 = -x_4 \end{cases}$$

che è evidentemente involutoria.

Essa ammette infinite rette (della congruenza) unite, le quali fanno parte di una particolare quadrica del sistema (Q) determinante la Riemanniana, precisamente di quella di equazione:

$$x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0 \tag{2}$$

e inoltre opera tra le rette della congruenza allo stesso modo della polarità γ_p determinata dalla quadrica suddetta.

3. *Le corpoinvoluzioni nella 1ª rappresentazione.*

Per determinare tra le corrispondenze (1') quelle involutorie, osserviamo prima di tutto che esse devono essere legate al sistema ∞^3 di quadriche (determinante la Riemanniana):

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + 2\lambda_3 x_1 x_3 + 2\lambda_4 (x_1 x_4 - x_2 x_3) = 0. \tag{3}$$

La quadrica generica di tale sistema determina una polarità ω. Eseguendo il prodotto di tale polarità con quella relativa alla (2), si ha una proiettività di S_3 che trasforma la congruenza in sè e che indichiamo con ω^*, di matrice:

$$\begin{Vmatrix} \lambda_4 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_3 & \lambda_4 & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_4 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{Vmatrix}.$$

Poichè d'altra parte la polarità γ_p e la γ determinano la stessa corrispondenza nella congruenza, come abbiamo visto nel paragrafo precedente, per determinare le nostre proiettività involutorie, basta eseguire il prodotto della ω^* per γ.

Si ha così:

$$\| \Omega^* \| = \| \gamma \| \cdot \| \omega^* \| = \begin{Vmatrix} \lambda_4 & 0 & 0 & 8 \\ \lambda_3 & -\lambda_4 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_4 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & -\lambda_3 & -\lambda_4 \end{Vmatrix}. \tag{4}$$

Pertanto, per passare da una generica proiettività (1') ad un'altra immagine di una corpoinvoluzione, basta porre nelle (1'):

$$(4') \qquad \begin{cases} k = -1 \\ a_{21} = -a_{43} = -\lambda_3 \\ a_{24} = a_{32} = 0 \\ a_{22} = a_{44} = \lambda_4 \\ a_{41} = \lambda_1 \\ a_{23} = -\lambda_2 \end{cases}$$

La generica corpoinvoluzione di matrice (4) ammette infinite rette unite, precisamente le direttrici della quadrica (3) che fanno parte della congruenza e che sono immagini di una catena dell' S_4 biduale.

Ricordiamo a questo proposito che le corpoproiettività trasformano catene in catene e cioè l'ente catena si comporta per una corpoproiettività, come la retta per una proiettività.

4. *Le proiettività nello spazio ambiente del cono immagini di una corpoproiettività.*

Per determinare le equazioni di una tale corrispondenza basta ricordare che le equazioni parametriche del cono sono:

$$(5) \qquad \begin{cases} \sigma_1 = x_1^2 & (\sigma_i \text{ sono le coordinate nell' } S_3' \text{ ambiente del cono}) \\ \sigma_2 = x_3^2 & \\ \sigma_3 = x_1 x_3 & (x_i \text{ » » » nell' } S_3 \text{ ambiente della congr.}) \\ \sigma_4 = x_1 x_4 - x_2 x_3. & \end{cases}$$

Tenendo conto delle (1') si ricavano, sostituendo alle x_j' i valori suddetti, le equazioni:

$$(6) \qquad \begin{cases} \sigma_1' = a_{22}^2 \sigma_1 + a_{24}^2 \sigma_2 + 2a_{22} a_{24} \sigma_3 \\ \sigma_2' = a_{42}^2 \sigma_1 + a_{44}^2 \sigma_2 + 2a_{42} a_{44} \sigma_3 \\ \sigma_3' = a_{22} a_{42} \sigma_1 + a_{24} a_{44} \sigma_2 + (a_{22} a_{44} + a_{24} a_{42}) \sigma_3 \\ \sigma_4' = h[(a_{22} a_{41} - a_{21} a_{42}) \sigma_1 + (a_{24} a_{43} - a_{23} a_{44}) \sigma_2 + \\ \quad + (a_{22} a_{43} - a_{42} a_{23} + a_{24} a_{41} - a_{21} a_{44}) \sigma_3 + (a_{23} a_{44} - a_{43} a_{24}) \sigma_4] \end{cases}$$

che rappresentano una proiettività la quale trasforma evidentemente il cono in sè, anzi ogni generatrice in sè.

La (6) trasforma sezioni piane del cono in sezioni piane, come è evidente, e ciò è in relazione al fatto che proviene da una corrispondenza (corpoproiettività) che trasforma catene in catene. (Si ricordi che ogni catena è rappresentata da una sezione piana del cono).

5. *Equazioni della trasformazione relativa ad una corpoinvoluzione nell' S_3 ambiente del cono.*

Per avere tali equazioni basta sostituire nei secondi membri delle (6) alle a_{ij} le posizioni (4'). Si hanno così, dopo aver diviso i secondi membri per λ_4:

$$(7)\qquad \begin{cases} \sigma_1' = \lambda_4 \sigma_1 \\ \sigma_2' = \lambda_4 \sigma_2 \\ \sigma_3' = \lambda_4 \sigma_3 \\ \sigma_4' = -(\lambda_1 \sigma_1 + \lambda \sigma_2 + 2\lambda_3 \sigma_3 + \lambda_4 \sigma_4) \end{cases}$$

Le proiettività (7) ammettono infiniti punti uniti che sono i punti della curva ottenuta secando il cono col piano di equazione:

$$\lambda_1 \sigma_1 + \lambda_2 \sigma_2 + 2\lambda_3 \sigma_3 + 2\lambda_4 \sigma_4 = 0.$$

Si può osservare che la (7) è l'omologia armonica di S_3' che ammette come piano unito quello in cui giace la conica suddetta e come centro il vertice O (origine delle coordinate) del cono.

6. *Le trasformazioni quadratiche immagini delle corpoproiettività nella 3ª rappresentazione.*

Come piano della 3ª rappresentazione si sceglie quello di equazione $x_4 = 0$ (nell' S_3 ambiente della congruenza). Scelto un punto P di esso, considerata la retta della congruenza per P, trasformando tale retta con le (1') e determinando il punto P' in cui questa ultima seca il piano, si ottengono tra le coordinate di P e di P' le relazioni:

$$(8)\qquad \begin{cases} x_1' = k\,(a_{22} x_1 + a_{24} x_3)\,(a_{42} x_1 + a_{44} x_3) \\ x_2' = (a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3)\,(a_{42} x_1 + a_{44} x_3) - \\ \qquad - (a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3)\,(a_{22} x_1 + a_{24} x_3) \\ x_3' = k\,(a_{42} x_1 + a_{44} x_3)^2 \end{cases}$$

cioè una trasformazione quadratica nel piano $x_4 = 0$.

Questa è determinata evidentemente dalla rete di coniche ottenuta combinando linearmente le tre coniche α, β, γ di equazioni:

$\alpha)$ $(a_{22} x_1 + a_{24} x_3)\,(a_{42} x_2 + a_{44} x_3) = 0$

$\beta)$ $(a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3)(a_{42} x_2 + a_{44} x_3) - (a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3)(a_{22} x_1 + a_{24} x_3) = 0$

$\gamma)$ $(a_{42} x_1 + a_{44} x_3)^2 = 0.$

Le due coniche α e γ si spezzano rispettivamente nelle due rette r ed s e nella retta s contata due volte passanti per il punto A_2 (0 1 0) e quindi i tre punti fondamentali sono A_2 da contarsi due volte ed il punto in cui la retta $a_{12}x_1 + a_{44}x_3 = 0$, cioè s interseca la conica β fuori di A_2.

Si ottiene così il gruppo delle ∞^7 trasformazioni quadratiche piane con due punti base infinitamente vicini [1]).

7. *Le trasformazioni quadratiche immagini di una corpoinvoluzione.*

Tenendo conto delle (4′) e sostituendo nelle (8), si hanno le equazioni volute:

$$(9) \qquad \begin{cases} x_1' = \lambda_4 x_1 x_3 \\ x_2' = 2\lambda_3 x_1 x_3 + \lambda_1 x_1^2 - \lambda_4 x_2 x_3 + \lambda_2 x_3^2 \\ x_3' = \lambda_4 x_3^2 \end{cases}$$

che rappresentano una trasformazione quadratica avente i tre punti fondamentali coincidenti in A_2, a cui corrisponde la retta $A_1 A_2$.

Questa trasformazione ammette come conica luogo di punti uniti quella di equazione:

$$(10) \qquad \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_3^2 + 2\lambda_3 x_1 x_3 - 2\lambda_4 x_2 x_3 = 0$$

e l'omologo di un punto P nella (9) si ottiene secando la polare di P rispetto alla conica (10) con la retta PA_2.

---

[1]) F. Enriques, *Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane nel piano* (Rend. Acc. Lincei 1893).

Le Mosche
in descrizioni antiche e moderne

Nota del socio **Giuseppe De Lorenzo**

(Pervenuta all' Accademia il dì 30 giugno 1950)

Sunto. — In questa Nota si esaminano rapidamente alcune descrizioni, antiche e moderne, delle mosche, per dedurne, che, durante i quattro millenni di storia, attraverso i quali esse si ripetono e durante i quali gli uomini hanno assunto tante mutazioni, mentre le mosche si sono mantenute relativamente stabili, le relazioni di convivenza, pacifiche od ostili, tra uomini e mosche, sono rimaste presso che immutate, malgrado la scienza e la potenza moschicida dell' uomo, enormemente cresciute in questi ultimi tempi.

In un capitolo su *Le Mosche* del mio libro *La Terra e l' Uomo*, di cui la sesta edizione e stata pubblicata nel 1947 dall' Editrice Faro in Roma ho scritto, che « vi sono alcuni casi, in cui anche le mosche si possono, guardare con una disposizione di spirito, simile a quella, in cui Luciano scrisse l' *encomio della mosca,* con una certa simpatia ed un vivo sentimento estetico » ; senza ulteriormente dilungarmi su quel saggio dello scrittore di Samosata. In questi dì di mezz' estate e negli ozi della vecchiezza, in cui la mente senile, per ovviare allo svanire della memoria, all' attutirsi delle sensazioni e percezioni ed all' indebolirsi delle concezioni, cerca di rimuginare pensieri e studi del passato, ho ripreso la lettura delle opere di Luciano, nella traduzione, fattane un secolo fa, nell' ergastolo di Santo Stefano, da Luigi Settembrini.

La rinnovata lettura ha rinnovato l' antica ammirazione per l' autore ed il traduttore. Anzitutto per la bellezza e la vivacità della traduzione, compiuta tra gli stenti e gli orrori, che il Settembrini così efficacemente descrisse nella sua prefazione del settembre 1858 : « Per non perdere interamente l' intelligenza, che ogni giorno mi va mancando, per non perire interamente nella memoria degli uomini, mi afferrai a Luciano, e mi proposi di tradurne le opere nella nostra favella. Ebbi il nudo testo emendato dal Weise, e cominciai a lottare disperatamente con mille ostacoli, senz' altro aiuto che un piccol lessico manuale ; ma, pervenuto più oltre della metà del lavoro ebbi l' edizione Bipontina. Per cinque anni vi ho lavorato, continuamente, fra tutte le noie, i dolori e gli orrori, che sono nel più terribil carcere, in mezzo agli assassini ed ai parricidi : e Luciano, come un amico affettuoso, mi ha salvato dalla morte totale dell' intelligenza. » La situa-

zione, l'opera e le parole del Settembrini ricordano stranamente quelle scritte da Anquetil Duperron nel settembre del 1794, come *monitum ad lectorem*, nella sua traduzione latina delle antiche *Upanisciade* indiane, *Oupnek' hat*. Argentorati, 1801: « Erudite lector, haec scripsi *sub asciâ*, dum spissa nubes, morte gravida, ori Franciae, heu! quondam splendido, tetrum livorem suffundebat. Iis fruere, seni indulgens, pridem viatori, qui, nec carcerem, nec ultimum fati ictum reformidans, intimis conclusa praecordiis premere audet, cum veritatis et religionis honos, patriae salus, hominis cujuslibet, hostis etiam commodum, id postulare videntur. » Ed egualmente, infatti, il Duperron ed il Settembrini, per salvarsi dagli orrori, in cui erano incarcerati, evasero: uno, nel mondo di intuizioni e di pensieri profondi degli antichissimi vati indiani; l'altro, nella libertà di pensiero e di parola di Luciano: siro di nascita, greco di cultura e romano di educazione, sotto il regno del più buono e più savio degli imperatori, Marco Aurelio Antonino.

Queste tre qualità formano la base dell'originalità di Luciano; che riassume quasi in sè la scettica serenità di Montaigne con la polemica vivacità e sarcasticità di Voltaire, soffuse di greca grazia, sì da riuscire quasi ancora uno scrittore modernissimo: sia che eserciti la sua critica acuta sui problemi più gravi delle religioni e delle filosofie, o rivolga la sua satira contro i vizi ed i pregiudizi sociali, o si diletti, prima ancora di Alexander Pope nel *Rape of the Lock*, di bellezze e vaghezze femminili, o scenda fino a scrivere l'*encomio della mosca*, di cui voglio qui appunto parlare. Prima, però, di passare ad esso, è bene dare un'occhiata a quel che prima ancora di Luciano si era detto e scritto delle mosche.

Le prime menzioni scritte delle mosche si sono trovate sui mattoni a caratteri cuneiformi della biblioteca reale di Assurbanipal a Ninive, e propriamente in quelle del duemila avanti Cristo; nelle quali è la famosa descrizione del diluvio babilonese: uno dei maggiori dei tanti diluvi, che infestano ed inondano la bassa Mesopotamia. Ormai si sa, dopo le interpretazioni dei maggiori assiriologi e l'esame fattone dal geologo Eduardo Suess, nella sua opera *Das Antlitz der Erde*, che quel racconto babilonese di un fenomeno naturale, svoltosi nella valle del Tigri e dell'Eufrate, fu accolto dagli Ebrei, durante la loro cattività babilonese, ed ampliato ed esagerato in modo tale, da farne poi nella *Genesi*, ed in un paese montuoso ed arido come la Palestina, un diluvio universale, che inondò per quasi un anno tutta la terra, coprendo i più alti monti, sì che « fu sterminata ogni cosa esistente, che era sulla faccia della terra, dagli uomini fino alle bestie ed ai rettili ed agli uccelli del cielo: furono, dico, tutti sterminati d'in su la terra. » Si sa ora anche, che tale versione biblica del diluvio universale, trasmessa dalla *Bibbia* al Cristianesimo, ha arrestato per un millennio e mezzo, malgrado le critiche di Leonardo da Vinci, di Giordano Bruno e di pochi altri veggenti, ogni progresso della geologia. Ritornando

ora al racconto babilonese: in esso è detto, che XISUSTHROS, il quale è il prototipo babilonese del NOE ebraico, salvò dall'inondazione sè, la sua famiglia ed i suoi animali, in una barca chiusa e bene incatramata, che fu sbattuta dalle onde per quattordici giorni e poi rimase in secco sulle falde del monte Nagir; dove XISUSTHROS scese a terra ed offrì un sacrificio agli dei, e «gli dei sentirono il sapore, gli dei sentirono il buon sapore, *gli dei accorsero come mosche al sacrificio.*» Non bisogna meravigliarsi di questo paragone irriverente degli dei con le mosche. Gli assirobabilonesi sono stati gli inventori di tutti quegli esseri alati, teriomorfi ed antropomorfi, aleggianti tra cielo e terra; i quali sono pervenuti, come angeli, arcangeli, cherubini e serafini, mediante la *Bibbia* nel Cristianesimo.

Mentre i semiti della valle del Tigri e dell'Eufrate paragonavano gli dei alle mosche, contemporaneamente gli aryani della valle dell'Indo, con altre disposizioni spirituali, i vati cantori del *Veda*, usavano lo stesso paragone. Nell'inno 45 del quarto libro del *Rigveda*, l'inno agli *Asvini*, i cavalieri celesti, simili ai *Dioscuri* della mitologia greca, il vate dice agli dei: «*Voi accorrete come mosche alle nostre libazioni.*» La sola differenza sta in questo: che nel sacrificio vedico le offerte agli dei sono costituite dal succo inebriante del *sòma*, dall'idromele od enomele, *madhu*, dal burro fuso e dal latte; mentre nel sacrificio semitico, come quelli ben noti di Abele, di Abramo e dell'Agnus Dei, sono date da vittime scannate e sanguinanti. Ma le mosche, si sa, sono egualmente ghiotte di miele, di latte e di sangue.

L'immagine degli dei quali mosche, cantata dall'inno del *Rigveda* nel secondo millennio avanti Cristo, nella valle dell'Indo, si trova ripetuta nella valle del Gange, nel sesto secolo avanti Cristo, dal più grande uomo, prodotto dall'India e dall'Asia: dico GOTAMO BUDDHO. Nel 127° *sutta* del *Majjhimanikâyo*, il BUDDHA, per descrivere la beata inconscienza degli dei, simili, per i buddhisti, agli dei di EPICURO, la paragona a quella delle mosche: «Così come quasi, o padre di famiglia, se mosche ronzano insieme in un vaso od in un cofano, non pensano: "Così siamo noi, durature, persistenti, eterne,,: ma invece, appena le mosche sono l'una all'altra vicine, allora appunto le mosche sono l'una all'altra gradite: or così anche appunto gli dei, etc.» È l'inconsapevolezza delle forze e delle forme cosmiche, o divine, non travagliate dai pensieri metafisici dei cervelli umani, sul tempo eterno o non eterno, sullo spazio finito od infinito, sull'anima mortale od immortale, sul di qua e sul di là.

Altra voce, con altri suoni, fa eco nel Mediterraneo a quelle della Mesopotamia e dell'India: la voce grande di OMERO. Nell'*Iliade* si trovano mirabili descrizioni delle mosche, indicate, come qui appresso vedremo, anche da LUCIANO nel suo *encomio della mosca*. Ma OMERO paragona le mosche non agli dei, bensì ai guerrieri. Sentiamone l'alata parola, nella traduzione di Ettore ROMAGNOLI. Nel canto secondo sono ad esse paragonati i guerrieri achei, chiamati dagli araldi a battaglia, per ordine di Aga-

mennone, e sono

> Simiglianti a sciami, che brulican, fitti, di mosche,
> che dei pastori vanno girando qua e là pei tuguri,
> a primavera, quando riboccano i secchi di latte.

Il paragone è ripetuto nel canto XVI, per descrivere le fitte zuffe dei greci e dei troiani intorno al cadavere di Sarpedonte:

> Quelli d' intorno al corpo correvano, come le mosche
> ronzano dentro un ovile d' intorno alle secchie ricolme,
> a primavera, quando riboccano i vasi di latte.

Ed infine nel canto XVII appare Pallade Atena, ad infondere nelle membra e nel cuore di Menelao l' ardire della mosca:

> E nelle spalle e nelle ginocchia vigore gli pose,
> e in seno ardir tenace gl' infuse, qual' è della mosca,
> che più la scacci, e più ritorna alla carne dell' uomo,
> avida a punger, che il sangue dell' uomo le par troppo dolce.

Quest' ultimo paragone di Omero ci fa scendere dai cieli religiosi e filosofici, in cui le mosche sono paragonate agli dei, e dai canti epici, in cui sono paragonati ai guerrieri, alla realtà della mosca assillante, tormentosa e micidiale, naturale nemica dell' uomo, con le sue qualità, a noi repugnanti, per cui gli antichi Egiziani la raffigurarono nel loro geroglifico, o pittogramma, quale simbolo dell'impudenza e dell'insolenza. Per tali qualità essa passa a far parte, non più della letteratura sacra od aulica, ma di quella popolare. Così troviamo le mosche descritte di nuovo nell' India, nei racconti del *Jâtaka* o delle rinascite del Bodhisattva, che poi divenne, nell' ultima sua nascita, il Buddha Sakyamuni. Nel *Jâtaka* 357 si racconta di una mosca carnaria, che depose le sue uova nelle orbite di un elefante, accecato da un corvo, sì che le larve, schiudendo e rodendone le carni ed i nervi, spinsero alla disperazione ed alla morte il grande elefante selvaggio. Nel *Jâtaka* 45, invece, è descritta una ragazza, che brilla il riso, battendo col pestello nel mortaio; e la madre, che le sta accanto, la prega, di scacciarle dalla testa e dal viso le mosche, che la tormentano. E la figlia, con la migliore intenzione di questo mondo, per uccidere le mosche, dà col pestello sul capo alla madre e la ammazza: dopo di che cade al suolo piangendo. Ed il futuro Buddha, che si trova ad assistere alla scena, esclama: « Meglio un nemico intelligente, che un amico stupido, con buone intenzioni! Guardate quella povera ragazza: ha ucciso sua madre, ed ora piange! »

Questo è un caso estremo della reazione, che l' assillo delle mosche

suscita negli uomini. L'estremità opposta, della sopportazione e della tolleranza, e rappresentata dalla nota storiella dello zio Tobia nel romanzo *Tristram Shandy* di Lorenzo Sterne: « — Va — egli disse un giorno, a pranzo, ad una grossa mosca, che aveva ronzato intorno al suo naso e l'aveva crudelmente tormentato durante tutto il tempo del pranzo, e che infine, dopo molti tentativi, era riuscito ad acchiappare: — Va, non ti voglio far male — disse mio zio Tobia, alzandosi dalla sedia ed attraversando la stanza, con la mosca tra le dita: — Va, non ti voglio torcere un capello — egli disse, aprendo il telaio della finestra e schiudendo le dita, per farla scappare. — Va, povera diavola, perchè dovrei farti male? Il mondo è largo abbastanza, per tenere te e me — ».

Tra queste due opposte estremità, dello zio Tobia e della ragazza indiana, sta in mezzo, immutata ed immutabile da millenni, la realtà quotidiana delle mosche, che pungono e pizzicano uomini ed animali, e di questi, che cercano di scacciarle con le mani, con le zampe, con le code e con i fremiti del corpo. Ed in questo gli animali sono più precisi ed efficaci degli uomini; come, p. es., l'elefante, che colpisce con esattezza matematica, con la punta della proboscide, le mosche, che gli si posano sulla sensibilissima pelle del collo e del grande testone. Tale è l'azione inconsapevole del giovane elefante, descritto da Kipling in *Just so Stories*: « Alla fine del terzo giorno una mosca venne e lo punse sulla spalla, e, prima che egli sapesse quel che stava per fare, alzò la sua proboscide e con l'estremità di essa uccise la mosca. » In simili casi, invece, gli uomini, che sono animali ragionevoli e sanno quel che fanno, finiscono quasi sempre col darsi una ceffata, mentre la mosca vola via. Viviamo quotidianamente tale scena e l'abbiamo studiata a scuola e nei giambi dell'antica favola di Fedro:

Calvi momordit Musca nudatum caput;
quam opprimere captans, alapam sibi duxit gravem.
Tunc illa irridens: Punctum volucris parvulae
voluisti morte ulcisci; quid facies tibi,
iniuriae qui addideris contumeliam?
Respondit: Mecum facile redeo in gratiam,
quia non fuisse mentem ledendi scio.
Sed te, contemti generis animal improbum,
quae delectaris bibere humanum sanguinem,
optem necare vel maiore incommodo.

E questa è la vera dichiarazione di guerra, che dura da millenni, tra l'uomo e la mosca. Perchè Fedro, fine osservatore e descrittore degli usi e dei costumi, di uomini e di animali, descrive veramente la storia naturale della mosca, nel dialogo, p. es., tra la mosca e la formica. La mosca, nella sua

beata inconscienza, come nel già citato *sutta* buddhista, vanta la sua vita:

Ubi immolatur, exta praegusto Deûm,
moror inter aras, templa perlustro omnia,
In capite regis sedeo, quum visum est mihi,
et matronarum casta delibo oscula;
laboro nihil, atque optimis rebus fruor.

Ma la formica con poche parole la mette a posto, ricacciandola verso lo sterco ed il fastidio della sua breve vita estiva:

Te circa murum pasci video stercore.
Aestate me lacessis; quum bruma est, siles.

Fedro compose le sue favole al tempo degli imperatori Augusto e Tiberio. Un secolo e mezzo dopo di lui, al tempo dell'altro grande imperatore Marco Aurelio, in quel tempo di rifioritura della lingua e della cultura greca in Roma, Luciano scrisse i suoi dialoghi ed i suoi saggi, tra cui quell'*encomio della mosca*, dal quale sono partito ed al quale ora ritorno, riproducendolo qui appresso, nella traduzione di Luigi Settembrini.

« La mosca non è il più piccolo dei volatili, se si paragona alle zanzare, ai tafani, e ad altri più piccoli insetti; ma di tanto è maggiore di questi, quanto è minore dell'ape. È alata non come gli altri, che hanno piume per tutto il corpo, e penne più forti per volare, ma come i grilli, le cicale e le api. Ha le ali d'una membrana tanto più delicata delle altre, quanto una veste indiana è più sottile e morbida d'una greca; e di color cangiante, come i pavoni, se si guarda bene quando si compiace di sciorinarle al sole. Vola non come i pipistrelli, sbattendo l'ali continuamente, nè come i grilli a salto, nè come le vespe con violenza e stridore, ma piegasi facilmente per ogni senso che vuole nell'aere. Ed ha ancora un'altra cosa, che non vola in silenzio, ma fa un certo suono, non acerbo come quello delle zanzare e dei tafani, non ronzante come quello delle api, non pauroso e minaccioso come quello delle vespe, ma di tanto più melodioso, di quanto il flauto è più soave della tromba e dei cembali. Dell'altre parti del corpo la testa piccolissima è attaccata al collo, e gira intorno, e non è fissa come quella dei grilli; gli occhi sporti in fuori, e molto simili al corno; il petto ben formato, donde si spiccano i piedi, non molto stretti come quei delle vespe; il ventre è munito anch'esso, come una corazza, di larghe fasce e di squame. Si difende non con la coda, come la vespa e l'ape, ma con la bocca, e la proboscide, che ha come quella dell'elefante, e con la quale si pasce, e piglia, e si attacca, e ci ha come una ciotoletta alla punta: da questa esce un dente, con cui punge, e poi beve il sangue: beve anche il latte, ma il sangue le è dolce, ed ella non fa punture dolorose. Ha sei piedi, e cammina con soli quattro, usando de' due davanti come di mani: ed è bello vederla

camminare con quattro piedi, portante tra le mani sollevata qualche briciola, proprio a guisa umana e come facciamo noi. Nasce non così come è, ma prima verme, su cadaveri di uomini e d'altri animali; indi a poco spicca i piedi, mette l'ali e di verme diventa volatile: ingravida, e partorisce un picciol verme, che dipoi è mosca. Vivendo in compagnia degli uomini, nella stessa casa, alla stessa mensa, si ciba di ogni cosa; ed essendo di corta vita, chè brevissimo spazio l'è assegnato a vivere, vuole stare sempre in piena luce e farvi tutti i fatti suoi. La notte sta cheta, e non vola, non ronza, ma per paura si raccoglie e non si muove. Di accorgimento posso dire che ne mostra assai, quando sfugge il suo insidiatore e nemico, il ragno; il quale l'apposta, ed essa lo guarda di fronte, declinando l'assalto, per non essere presa nelle reti, nè cader tra le branche di quell'animaletto. Del suo coraggio e della sua forza non dobbiamo parlar noi; ma il più magnifico dei poeti, Omero, volendo lodare un fortissimo eroe, non lo paragona per forza al leone, al pardo, al cinghiale, ma alla mosca, per l'ardire e l'intrepidezza e la perseveranza del suo assalto: e dice ardire non temerità; chè scacciata, dic'egli, non vassene, ma pur torna al mordere. Tanto si compiace di lodare la mosca, che non una volta sola nè in poche parole fa menzione di lei, ma spesso, ed il verso si abbellisce quando ne ricorda. Ora descrive uno sciame di mosche che vola sul latte; e dice anche bellamente, che esse vanno in serrate frotte, e i loro sciami chiama *genti*. Tanto poi è gagliarda, che quando morde, trapassa non pure la pelle dell'uomo, ma del bue ancora e del cavallo, e fa male all'elefante, entrandogli fra le rughe e con la sua proboscide, secondo la sua grandezza, offendendolo. Nel mescolarsi e congiungersi sono liberissime: e il maschio non come i galli monta e scende subito, ma resta molto tempo a cavallo alla femmina; ed ella porta il marito, e insieme volano per l'aria così congiunti, senza che il volo li disturbi. Se le mozzi il capo, la mosca vive molto col resto del corpo, e respira... La mosca oziosa e scioperata fruisce delle fatiche altrui, e da per tutto trova mensa imbandita: le capre sono munte per lei, l'ape lavora per lei come per gli uomini, e i cuochi per lei condiscono le più saporose vivande, che ella assaggia prima dei re, e aggirandosi su le mense, banchetta con loro e gusta di ogni cosa. Covo e nido non fa in un luogo, ma col vagante volo va errando di qua e di là, e dovunque la notte la sorprende, quivi fa casa e letto. Intanto all'oscuro non fa niente, come ho detto, nè facendo cosa suole nasconderla, nè crede turpe ciò che fa in piena luce..... Molto altro avrei da dire, ma basta qui, per non fare, come dice il proverbio, d'una mosca un elefante. »

Nel rileggere queste pagine di uno scrittore prevalentemente letterario, artistico e filosofico, qual'è Luciano, non si può non rimanere ammirati dalla minutezza delle sue osservazioni e dell'esattezza delle sue descrizioni dell'anatomia, della fisiologia, della biologia, della psicologia e degli usi e costumi delle mosche; che possono essere confermate da ogni moderno studioso di zoologia, e che si possono trovare ripetute, p. es., a volte quasi con le medesime parole, nella monografia de *La mosca domestica*, pubblicata nel 1939 a Bolzano dal prof. G. S. Candura. Vero è, però, che nella

scienza e nella prassi moderna manca qualunque sentimento di simpatia per la mosca, nostra naturale nemica: simpatia, invece, che spira da tutto il saggio di Luciano. È la simpatia di tipo, dirò così, indiano, che accomuna gli uomini con tutti gli animali, e della quale dà un'espressione anche Shakespeare, quando nella seconda scena del terzo atto di *Tito Andronico* fa dire da Tito delirante al fratello Marco, che ha ucciso una mosca: « Via, assassino! Tu colpisci il mio cuore!... Povera mosca innocua, che, con la graziosa ronzante melodia, era venuta qui per tenerci allegri, e tu l'hai uccisa! » E lo stesso Shakespeare, nella prima scena del quarto atto di *King Lear* fa prorompere Gloucester accecato nelle terribili parole, di suono veramente cosmico: « Come mosche per bimbi scherzosi, così siamo noi per gli dei; essi ci uccidono per loro gioco:

> As flies for wanton boys, are we to the gods;
> They kill us for their sport. »

In queste parole si scorge davvero la visione sovrumana, ed inumana, del genio, che associa tutte le forme e le forze dell'esistenza nel comune tormento e dolore del mondo.

Ma nel nostro mondo umano, troppo umano, le mosche sono sempre state, e sono oggi più che mai, le nostre naturali e mortali nemiche. Di questa mortale ostilità e delle sue concomitanze e conseguenze si trova una tremenda descrizione in quel capolavoro di novella, che è *La mosca* di Luigi Pirandello. In una lurida stalla giace moribondo, per carbonchio inoculatogli da una mosca, il contadino Zarù. Accanto v'è il cugino Neli, fidanzato come lui e che avrebbe dovuto sposare nello stesso giorno di lui, ed il medico, che ha fatto la diagnosi mortale: « Mentre il medico parlava, il Zarù aveva voltato la faccia verso il muro. Nessuno lo sapeva, e la morte era intanto lì, ancora; così piccola, che si sarebbe appena potuta scorgere, se qualcuno ci avesse fatto caso. C'era una mosca, lì sul muro, che pareva immobile; ma, a guardarla bene, ora cacciava fuori la piccola proboscide e pompava, ora si nettava celermente le due esili zampine anteriori, stropicciandole tra loro, come soddisfatta. » Zarù, che ha appreso esser quella mosca la causa della sua morte atroce, la fissa ed agogna, in cuor suo, che vada ora a pungere il cugino Neli. Perchè egli deve morire ed, invece, il cugino Neli vivere, sposo felice? La sua brama feroce viene soddisfatta. La mosca, col suo odorato finissimo, ha sentito l'odore del sangue rappreso su una scalfittura, che Neli s'è fatta sulla faccia, radendosi la barba: « Ecco, era andata a posarsi sulla guancia di Neli. Dalla guancia, lieve lieve, essa ora scorreva, in due tratti, sul mento, fino alla scalfittura del rasojo, e s'attaccava lì, vorace. » Ecco tutto. Il voto dell'uomo, di voler far morire l'altro uomo, è esaudito. La mosca li uccide entrambi. *Semper eadem; bellum omnium contra omnes.*

E che guerra, se si pensa, che nel nostro clima ed in un'annata, come scrive il Candura « i discendenti di una sola mosca possono essere potenzialmente alcuni miliardi. » Ne ebbe l'intuizione il mite Pascal, quando nell'84ª delle sue *Pensées* scrisse: « La puissance des mouches: elles gagnent des batailles, empêchent notre âme d'agir, mangent notre corps. » E cent'anni e più prima di lui Leonardo da Vinci aveva circoscritto in una breve allegoria il circolo eterno della vita e della morte degli uomini e delle mosche: « Usciranno li omini dalle sepolture, convertiti in uccelli, e assaliranno li altri omini, togliendo loro il cibo dalle proprie mani e mense: le mosche. » Su questo tema di Leonardo e di Pascal si potrebbe, a simiglianza della *batracomiomachia*, poetare un'*antropomuiamachia*, o battaglia degli uomini e delle mosche.

Pure tale battaglia, o guerra millenaria tra uomini e mosche, può essere anche naturalisticamente considerata come un fenomeno della continua trasformazione della materia attraverso il giro, o *samsâro*, di tutte le forme della vita. A questa conclusione, appunto, giunge il grande entomologo S. H. Fabre nel decimo ed ultimo volume dei suoi *Souvenirs entomologiques*, alla chiusa del suo studio sulla mosca carnaria e la vomitoria, la cosiddetta mosca azzurra o moscone, *Sarcophaga carnaria* Lin. e *Calliphora vomitoria* Lin.: « Dans la rémise en fusion de la matière pour d'autres ouvrages, cadavre pour cadavre l'homme ne vaut pas mieux que la dernière des brutes. Alors le diptère use de ses droits; il nous traite comme il le fait à l'égard d'une vulgaire loque animale. Dans ses ateliers de rénovation, la Nature est pour nous d'une superbe indifférence; au fonde de ses creusets, bêtes et gens, gueux et et monarques sont absolument même chose. Voilà vraiment l'égalité, la seule de ce monde, l'égalité devant l'asticot. » E ciò corrisponde esattamente a quel che aveva scritto David Hume nel suo saggio sul *Suicidio*: « La vita di un uomo è per l'universo di non maggiore importanza di quella di un'ostrica... Un pelo, una mosca, un insetto può distruggere questo potente essere, di cui la vita ha tanta importanza. » Come si vede, il naturalista ed il filosofo qui si danno la mano.

Questo è il modo naturalistico, fisico, di considerare la mosca nelle sue relazioni con l'uomo. Ma può esservi anche un modo, di vedere la cosa sotto l'aspetto etico e metafisico. Una prova ce la dà il grande pensatore, contemporaneo di Luciano, l'imperatore Marco Aurelio; il quale sotto la sua tenda di guerra, nella valle del Danubio, pensando alle sue vittorie sui popoli germanici e slavi dell'Europa orientale, scriveva, nel libro decimo delle sue meditazioni *in sè stesso*: « Un ragno insuperbisce per aver acchiappato una mosca, altri per una lepre, altri per un'alice, altri per cinghiali, altri per orsi, altri per i Sarmati: non sono tutti egualmente, per i loro motivi, predoni? » Perchè Marco Aurelio, dall'alta specola filosofica della sua mente, vedeva *sub specie aeternitatis* il fluire di tutte le cose e ne deduceva, come scrisse nel 37° del libro sesto dei suoi pensieri,

l'inesistenza, come cosa in sè, del tempo, e la vanità dei fenomeni, che attraverso esso si svolgono nella nostra mente: « Chi vede le cose presenti, ha visto tutte le cose: quelle che furono nell'eterno passato e quelle che saranno nell'infinito futuro: perchè sono tutte dello stesso genere e della stessa specie. » Ed il primo dei due pensieri, sulle stragi reciproche di uomini e mosche, può essere chiuso, come in una sigla, nella sentenza « Divorarsi l'un l'altro qui vige, uccidere il debole: *aññamaññakhâtikâ etta vattati, dubbalamârikâ* »: che il Buddha aveva enunciata più di sei secoli prima di Marco Aurelio.

Questa vastità ed impassibilità del pensiero buddhista era oggetto di ammirazione per Shopenhauer; il quale anche egli, con non meno vasto volo di pensiero, trasse dalle mosche argomento per considerazioni di ordine superiore, transcendentale. Se, egli scrisse nel secondo volume del *Mondo come volontà e rappresentazione*, in autunno si osserva il piccolo mondo degli insetti e si vede, come uno si apparecchia il suo letto, per dormire il lungo, irrigidito letargo invernale; l'altro s'imbozzola, per svernare come crisalide e poi svegliarsi ringiovanito e perfezionato in primavera; la maggior parte, destinata a trovare riposo nelle braccia della morte, cerca solo accuratamente il migliore giaciglio per le proprie uova, da cui riuscirà rinnovata; — ciò ci appare come la grande lezione d'immortalità della natura, che ci dimostra, come tra sonno e morte non esista una differenza radicale, e che questa sia per l'esistenza simile a quello. La cura, con cui lo insetto prepara una cella, un fosso, un nido, depone le sue uova, insieme col nutrimento da servire per la larva, che ne sguscerà a primavera, e poi tranquillamente muore, — è del tutto eguale alla cura, con cui un uomo prepara il vestito e la colazione pel mattino seguente e poi va tranquillamente a dormire; ed in fondo non sarebbe così, se, nella sua vera essenza, l'insetto morente in autunno non fosse così identico a quello schiudentesi in primavera, come l'uomo che si addormenta con quello che si sveglia. Se io ora vedo sparirne uno, senza sapere dove sia andato, ed apparirne un altro, senza sapere donde venga; ed entrambi hanno la stessa forma, la stessa essenza, lo stesso carattere, ma non la stessa materia, che essi però anche durante la loro esistenza rigettano e rinnovano di continuo: allora è verosimile l'ipotesi, che quel che sparisce e quel che appare in sua vece sia un solo e medesimo essere, il quale ha subìto solo un mutamento, un rinnovamento della forma della sua esistenza, e che perciò la morte è per la specie ciò che il sonno è per l'individuo. Se la mosca, che ora ronza intorno a me, la sera s'addormenti ed il domani di nuovo sussurri; o se essa a sera muoia ed in primavera, schiusa dal suo uovo, ronzi un'altra mosca: in se stesso ciò è la stessa cosa. Quindi la cognizione, che rappresenta ciò come due cose fondamentalmente diverse, non è incondizionata, ma solo relativa; e una cognizione del fenomeno, non della cosa in sè. Ecco di nuovo la mosca domani; ecco di nuovo la mosca a prima-

vera. Che cosa distingue per la mosca l'inverno dalla notte? Dunque, conclude SCHOPENHAUER, in accordo anche in questo con la concezione buddhista del giro, del *samsâro*, dell'universo, il vero simbolo della natura e sempre e dappertutto il giro, perchè esso è lo schema del rivolgimento. Questa è infatti la forma più generale, che la natura segue in tutte le cose, dal corso degli astri fino alla morte ed alla rigenerazione degli esseri organici, e per cui è possibile una continua esistenza, ossia una natura, attraverso l'incessante ed infinito fluire del tempo e della materia.

CATALOGO DI 750 STELLE ZENITALI PER CAPODIMONTE DA OSSERVAZIONI MERIDIANI AL CERCHIO DI REPSOLD

MEMORIA

del prof. **Eugenio Guerrieri**, *presentata dal socio* **L. Carnera**

nell'adunanza del dì 3 giugno 1950
per essere inserita nel volume III della 3ª serie degli Atti

Sunto. — Si fa cenno del Cerchio meridiano di REPSOLD e delle sue parti; dei valori delle costanti strumentali della temperatura, della pressione barometrica e della marcia del pendolo di RIEFLER; del metodo di osservazione e della riduzione dei risultati ottenuti per dedurne le α e δ; della scelta delle stelle di Catalogo e delle stelle fondamentali; della discussione sui residui V_α e V_δ delle α e δ delle stelle orarie e di Catalogo.

Segue il Catalogo delle 750 stelle zenitali per Capodimonte, 30′ a nord e 30′ a sud dello zenit, comprese tra le grandezze 4.3 e 8.5 di quella regione.

Sulle rappresentazioni complesse di una corpo-varietà algebrica o iperalgebrica e delle trasformazioni corpobirazionali di un S_r legato ad una qualunque algebra complessa

Nota del socio **Nicolò Spampinato**

(Adunanza del dì 4 novembre 1950)

Sunto. — S' introducono le rappresentazioni analitiche delle corpovarietà iperalgebriche, in particolare algebriche, ed il concetto di « *Geometria corpobirazionale* » in un S_r legato ad un' algebra, definita nel corpo dei numeri complessi, di ordine qualunque e dotata di modulo.

1. — *Richiami sulla* I^a^ *e* II^a^ *rappresentazione di un* S_r *ipercomplesso e sulle corpovarietà.*

Se diciamo S_N lo spazio proiettivo complesso ad $N = n(r+1) - 1$ dimensioni, (definito nel corpo complesso), ambiente della congruenza (S_{n-1}) di spazi S_{n-1} che dà la I^a^ rappresentazione complessa di un S_r complesso [legato ad un' algebra, di ordine n, dotata di modulo, definita nel corpo complesso] una corpovarietà di dimensione t rispetto all' algebra considerata, e quindi di dimensione nt rispetto al corpo complesso, è già stata definita, attraverso la I^a^ rappresentazione dell' S_r ipercomplesso, fissando in S_N una ordinaria varietà algebrica V_{t+n-1} composta mediante ∞^t spazi generatori S_{n-1} della congruenza (S_{n-1}) [ottenuta considerando l' S_{n-1} generatore uscente da un punto P, facendo variare P in una ordinaria varietà algebrica V_t] e assumendo, quale *corpovarietà iperalgebrica* [1]) dell' S_r ipercomplesso, l'insieme dei punti di S_r rappresentati dagli S_n , generatori di V_{t+n-1}.

In ogni caso un S_{n-1} di (S_{n-1}) è lo spazio congiungente n punti P_i indipendenti di S_N, le cui coordinate sono i numeri complessi di n righe di una matrice ad $n(r+1)$ colonne e di caratteristica massima. Tali punti P_i sono gli omologhi del punto $P\ (x_0 \dots x_N)$ determinante S_{n-1}, in n proiettività di S_N [rispondenti alle n unità $u_1 \dots u_n$ fissate nell' algebra di ordine n considerata] e quindi le coordinate di P_i sono sempre funzioni lineari omogenee di $x_0 \dots x_N$. Ciò porta che i minori di ordine massimo estratti da detta matrice ad n righe e $n(r+1)$ colonne, sono forme a coefficienti complessi, di grado n, di $x_0 \dots x_N$. Indicando con $R+1$ il numero massimo di tali

---

[1]) N. Spampinato, *Corpovarietà e varietà algebriche ed iperalgebriche di un* S_r *ipercomplesso* Rendiconti Acc. Sc. Fis. e Mat. di Napoli, serie 4^a^, vol. XVIII, 1950.

minori, linearmente indipendenti, ed indicatili con:

$$[1] \qquad \begin{cases} y_1 = f_1 \quad (x_0 \dots x_N) \\ \dots\dots\dots \\ y_{R+1} = f_{R+1}(x_0 \dots x_N) \end{cases}$$

con $f_1, \dots, f_{R+1}$, forme di grado n, le [1], in un S_R proiettivo complesso, danno la II^a rappresentazione dell'S_r ipercomplesso in una varietà W_{nr}, di cui le [1] sono le equazioni parametriche con i parametri sovrabbondanti $x_0 \dots x_N$, che dicesi la *riemanniana* dell'S_r ipercomplesso considerato [1]).

Nota. Nel caso che l'algebra considerata sia l'algebra di ordine $n=2$, dei numeri *bicomplessi*, tale riemanniana è la W_{2r} di Segre, di ordine $\binom{2r}{r}$ dell'$S_{(r+1)^2-1}$ proiettivo complesso, rappresentante le ∞^{2r} coppie di punti di due S_r proiettivi complessi. In particolare l'S_r complesso, contenuto nell'S_r bicomplesso, (come l'S_r reale è contenuto nell'S_r complesso) si rappresenta nei punti *reali* della riemanniana W_{2r} [2]).

2. — *I^a e II^a rappresentazione analitica di una corpovarietà iperalgebrica dell'S_r ipercomplesso.*

Gli S_{n-1}, di cui la V_{t+n-1} algebrica è composta, sono corrispondenti a ∞^t punti della riemanniana W_{nr}, costituenti una varietà algebrica W_t, di dimensioni complessa t. Esisterà allora un sistema di equazioni algebriche:

$$[2] \qquad \begin{cases} F(y_1 \dots y_{R+1}) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ G(y_1 \dots y_{R+1}) = 0 \end{cases}$$

rappresentanti, in S_R, una varietà algebrica V secante, sulla W_{nr}, la W_t. Viceversa ad ogni W_t algebrica, contenuta nella W_{nr}, corrisponderà, sulla congruenza (S_{n-1}), una infinità algebrica ∞^t, di spazi generatori S_{n-1}, riempienti una varietà algebrica V_{t+n-1} immagine di una corpovarietà iperalgebrica dell'S_r ipercomplesso. Sicchè per rappresentare analiticamente tale corpovarietà iperalgebrica dell'S_r ipercomplesso nella II^a rappresentazione, basta associare al sistema [2], rappresentante in S_R la varietà V, le equazioni parametriche [1] della riemanniana W_{nr}, *ottenendo così la rappresentazione analitica della varietà intersezione* W_t, *varietà che si dirà la*

---

[1]) N. Spampinato, *Lezioni di Geometria superiore*, vol. VI, Parte III^a, cap. III°, § 2, Casa Ed. R. Pironti, Napoli.

[2]) N. Spampinato, *Varietà iperalgebriche del* Segre *dell'S_r complesso e bicomplesso*. Atti Rend. R. Accad. Sc. Torino, 1935-36

riemanniana di detta corpovarietà iperalgebrica di dimensione t (II^a rappresentazione).

Volendo rappresentare analiticamente tale corpovarietà, nella I^a rappresentazione, basta considerare le equazioni algebriche che rappresentano in S_N la varietà algebrica V_{t+n-1}, equazioni che si ottengono eliminando le $y_1 \dots y_{R+1}$ fra i sistemi [1] e [2]. Tale eliminazione si esegue con semplice sostituzione delle [1] nelle [2], sicchè, posto:

$$(*) \qquad \begin{cases} F[f_1(x_i), \dots, f_{R+1}(x_i)] = \Phi(x_0 \dots x_N) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ G[f_1(x_i), \dots, f_{R+1}(x_i)] = \Psi(x_0 \dots x_N) \end{cases}$$

la V_{t+n-1} sarà rappresentata in S_N dal sistema:

$$[3] \qquad \begin{cases} \Phi(x_0 \dots x_N) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \Psi(x_0 \dots x_N) = 0. \end{cases}$$

Quindi *le* [3] *ci danno la rappresentazione analitica, nella I^a rappresentazione, della corpovarietà iperalgebrica considerata.*

Si osservi esplicitamente che se $F(y_1 \dots y_{R+1})$ è di grado m, il polinomio omogeneo $\Phi(x_0 \dots x_N) = F[f_1(x_i) \dots f_{R+1}(x_i)]$ risulterà di grado $m\,n$. dato che i polinomi $f_1(x_0 \dots x_N), \dots, f_{R+1}(x_0 \dots x_N)$ [ottenuti calcolando dei determinanti di ordine n con gli elementi funzioni *lineari* omogenee di $x_0 \dots x_N$] risultano omogenei di grado n.

Concludendo si ha:

Una corpovarietà iperalgebrica dell' S_r ipercomplesso nella II^a rappresentazione è rappresentata analiticamente da un sistema di equazioni algebriche del tipo:

$$\begin{cases} \begin{cases} F(y_1 \dots y_{R+1}) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ G(y_1 \dots y_{R+1}) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y_1 = f_1(x_0 \dots x_N) \\ \dots\dots\dots \\ y_{R+1} = f_{R+1}(x_0 \dots x_N) \end{cases} \end{cases}$$

con $F, \dots, G$ polinomi omogenei in $y_1 \dots y_{R+1}$, essendo le equazioni del secondo gruppo, le equazioni parametriche della riemanniana W_{nr} dell' S_r ipercomplesso in S_R, con i parametri sovrabbondanti $(x_0 \dots x_N)$; nella I^a rappresentazione è rappresentata, invece, dal sistema:

$$\begin{cases} \Phi(x_0 \dots x_N) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \Psi(x_0 \dots x_N) = 0 \end{cases}$$

con $\Phi, \ldots, \Psi$, *polinomi omogenei ottenuti da* $F, \ldots, G$, *sostituendo alle* $y_1 \ldots y_{R+1}$ *le loro espressioni in funzione di* $x_0 \ldots x_N$, *mediante le equazioni parametriche di* W_{nr}.

3. — *Iperordine di una corpovarietà iperalgebrica e invarianza rispetto alle trasformazioni corpoproiettive dell'* S_r *ipercomplesso.*

Il gruppo delle proiettività dell'S_R trasformanti in sè stessa la riemanniana W_{nr} subordina sulla riemanniana un gruppo di corrispondenze che sono le immagini, nella II^a rappresentazione, delle corpoproiettività dell'S_r ipercomplesso, gruppo che determina nell'S_r ipercomplesso la *geometria corpoproiettiva* [1]).

Una varietà V di S_R, algebrica di ordine q, intersecante sulla W_{nr} una W_t immagine di una corpovarietà di S_r, sarà trasformata, da una proiettività del gruppo suddetto, in una varietà V', dello stesso ordine q, intersecante la W_{nr} nella W_t' trasformata di W_t. La W_t' sarà l'immagine di una corpovarietà iperalgebrica dell'S_r ipercomplesso che si dirà la *trasformata della corpovarietà rappresentata da* W_t, *mediante la corpoproiettività rispondente alla proiettività considerata in* S_R. L'intero q si chiamerà *iperordine* della corpovarietà iperalgebrica di S_r. Sicchè:

Per ogni corpovarietà iperalgebrica di un S_r *ipercomplesso si definisce un iperordine, che è un intero positivo, invariante per trasformazioni corpoproiettive dell'* S_r.

Nel caso particolare che il sistema [2] del n.° precedente si riduce ad una sola equazione:

$$(V_{R-1}^{q}) \qquad F(y_1 \ldots y_{R+1}) = 0$$

rappresentante in S_R un'ipersuperficie algebrica V_{R-1} di ordine q, la corpovarietà iperalgebrica di S_r, rappresentata in W_{nr} dalla varietà W_{nr-1} intersezione di W_{nr} con V_{R-1}, sarà di dimensione $nr-1$, e si dirà una *corpovarietà iperalgebrica* di S_r *di dimensione complessa massima* $nr-1$, *di iperordine* q [Per $q=1$ avremo quelle che diciamo *catene* C_{nr-1} *di dimensione massima* $nr-1$, *la* V_{R-1} *è un iperpiano di* S_R *e quindi le* C_{nr-1} *risultano rappresentate dalle sezioni iperpiane di* W_{nr}]

Sostituendo nella $F(y_i)$ alle y_i le [1], si ha l'equazione:

$$(V_{N-1}^{qn}) \qquad \Phi(x_0 \ldots x_N) = 0$$

---

[1]) N. Spampinato, *Le catene* t*-dimensionali e la Geometria corpoproiettiva dell'* S_r *ipercomplesso di 1ª specie, sinistro o destro legato ad un'algebra dotata di modulo e definita in un qualunque corpo numerico*. Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. di Napoli, s. 4ª, vol. XVI, 1949.

della ipersuperficie di S_N, composta mediante ∞^{nr-1} S_{n-1} della congruenza (S_{n-1}), che rappresenta nella I^a rappresentazione la su detta corpovarietà di dimensione massima, e di iperordine q. Variando la $V_{R-1}{}^q$ nel sistema lineare $\{V_{R-1}{}^q\}$ di tutte le ipersuperficie di S_R di ordine q, la W_{nr-1} descriverà nella W_{nr} un sistema lineare $\{W_{nr-1}\}$ e la $V_{N-1}{}^{qn}$ descriverà in S_N un sistema lineare $\{V_{N-1}{}^{qn}\}$ di ipersuperficie, *composto* mediante la congruenza (S_{n-1}) e della stessa dimensione del sistema $\{W_{nr-1}\}$.

[Per $q = 1$ il sistema $\{W_{nr-1}\}$ ci dà il sistema ∞^R delle *sezioni iperpiane* di W_{nr} ed il sistema $\{V_{N-1}{}^n\}$ ci dà il sistema di ipersuperficie (V) di S_N che serve a dare la riemanniana W_{nr}, passando dalla I^a alla II^a rappresentazione, dato che rappresenta in S_N le su dette ∞^R sezioni iperpiane di W_{nr}].

4. — *Trasformazioni corpobirazionali e Geometria corpobirazionale in un* S_r *ipercomplesso e loro II^a rappresentazione.*

Nell'S_r ipercomplesso oltre alla *Geometria corpoproiettiva* si può considerare la *Geometria corpobirazionale* determinata dal gruppo di trasformazioni di S_r rappresentate nella W_{nr} dalle trasformazioni subordinatevi dal gruppo di *trasformazioni birazionali* di S_R trasformanti la riemanniana W_{nr} in sè stessa. Tali trasformazioni di S_r si diranno *corpobirazionali*; il gruppo di tali trasformazioni corpobirazionali contiene, come suo sottogruppo quello delle corpoproiettività.

Siano:

$$\left\{\begin{array}{ll} y'_1 = \varphi_1 & (y_1 \dots y_{R+1}) \\ \dots\dots\dots\dots & (\varphi) \\ y'_{R+1} = \varphi_{R+1} & (y_1 \dots y_{R+1}) \\ y_1 = \psi_1 & (y'_1 \dots y'_{R+1}) \\ \dots\dots\dots\dots & (\varphi^{-1}) \\ y_{R+1} = \psi_{R+1} & (y'_1 \dots y'_{R+1}) \end{array}\right.$$

le equazioni di una trasformazione birazionale φ di S_R, con $\varphi_1 \dots \varphi_{R+1}$ forme della stesso gradro m, e $\psi_1 \dots \psi_{R+1}$ forme dello stesso grado s.

La condizione da imporre a φ di trasformare in sè stessa la W_{nr}, di equazioni parametriche [1] (n.° 1), si traduce analiticamente con l'imporre che il punto di coordinate:

$$y'_i = \varphi_i [f_1(x_0 \dots x_N), \dots, f_{R+1}(x_0 \dots x_N)] \quad , \quad (i = 1 \dots R+1)$$

omologo del punto di W_{nr} di coordinate [1], sia un punto di W_{nr}, qualunque siano $x_0 \dots x_N$, cioè esistano dei numeri $x'_0 \dots x_N$, non tutti nulli, per i quali sia, per un valore $\sigma \neq 0$:

$[\varphi]$ $f_i(x'_0 \dots x'_N) = \sigma\, \varphi_i[f_1(x_0 \dots x_N), \dots, f_{R+1}(x_0 \dots x_N)]$ $(i=1, \dots, R+1)$.

Analogamente deve essere per un $\tau \neq 0$:

$[\varphi^{-1}]$ $f_i(x_0 \dots x_N) = \tau\, \psi_i[f_1(x'_0 \dots x'_N), \dots, f_{R+1}(x'_0 \dots x'_N)]$ $(i=1, \dots, R+1)$.

Sicchè:

Una trasformazione birazionale di S_R, *trasformante la riemanniana* W_{nr} *in sè stessa, è data da equazioni del tipo* (φ) *e* (φ^{-1}) *con le condizioni* $[\varphi]$ *e* $[\varphi^{-1}]$.

Tali equazioni forniscono la rappresentazione analitica, nella II^a rappresentazione, di una trasformazione corpobirazionale dell' S_r *ipercomplesso.*

NOTA I^a.

Se si considerano soltanto le (φ) con le condizioni $[\varphi]$ si ha in S_R una *trasformazione unirazionale,* trasformante W_{nr} in sè stessa e determinante in W_{nr} una trasformazione dell'S_r ipercomplesso che diremo *trasformazione corpo-unirazionale.*

NOTA II^a.

Si osservi inoltre che se si considera nell'S_r ipercomplesso una corpovarietà iperalgebrica [rappresentata nella II^a rappresentazione analiticamente dall'associare al sistema [2], le equazioni parametriche [1] della W_{nr}, rappresentando così la riemanniana W_t di tale corpovarietà (n.° 2), la trasformazione corpobirazionale di S_r, sopra definita, trasformerà la detta corpovarietà nella corpovarietà di S_r rappresentata dalla sua riemanniana W'_t. essendo W'_t la trasformata birazionale di W_t mediante la trasformazione birazionale φ di S_R. Sicchè:

Gli enti dell' S_r *ipercomplesso chiamati corpovarietà iperalgebriche sono di pertinenza non solo della Geometria corpoproiettiva, ma anche, più in generale, della Geometria corpobirazionale di* S_r.

5. — *Le ipersuperficie e le varietà fondamentali di un* S_r *ipercomplesso considerato come spazio fondamentale del I° e del II° tipo, di dimensione complessa* nr.

Fissato in S_R un S^*_{R-nr-1} resta determinato in S_r un sottogruppo fondamentale ψ^* di corpoproiettività determinante in S_r due tipi di Geometrie fondamentali: quella del I° tipo, quando il sottogruppo fondamentale ψ^* si considera operante sui punti di S_r e quella del II° tipo quando si considera ψ^* operante sull'insieme dei gruppi neutri di S_r rispetto a detto sottogruppo ψ^* di corpoproiettività.

Le catene di dimensione massima rappresentate dalle sezioni iperpiane di W_{nr} passanti per S^*_{-nr-1}, costituiscono il sistema fondamentale $[C_{nr-1}]$

rispetto a detto sottogruppo ψ^*, perchè tale sistema $[C_{nr-1}]$ è trasformato in sè stesso dalle corpoproiettività di ψ^*. Considerato l'S_r ipercomplesso come *spazio fondamentale* del I° tipo, di dimensione complessa nr, in relazione alla su detta Geometria fondamentale del I° tipo, il sistema $[C_{nr-1}]$ di catene di dimensione massima, è quello che diremo sistema di *iperpiani fondamentali* di detto spazio fondamentale [perchè nel caso dell'S_r complesso, considerato come piano non euclideo, ($n = 2$, $r = 1$), il corrispondente sistema $[C_1]$ fondamentale è quello che costituisce le *rette non euclidee del piano non euclideo* [1]). Analoga osservazione si fa per la Geometria fondamentale del II° tipo, sostituendo ad una catena C_{nr-1} di $[C_{nr-1}]$, l'insieme degli ∞^{nr-1} *gruppi neutri* che essa contiene. Avendo ora introdotto nell'S_r ipercomplesso le corpovarietà iperalgebriche di *dimensione massima* $nr-1$, che generalizzano le catene C_{nr-1}, possiamo introdurre, per i due tipi di spazi fondamentali su detti, le *ipersuperficie fondamentali di ordine* q, in modo che quelle di ordine 1 diano gl'iperpiani fondamentali su detti.

A tal fine consideriamo in S_R, nel sistema $\{V_{R-1}^q\}$ il sistema lineare $[V_{R-1}^q]$ delle V_{R-1}^q che ammettono come *spazio di multiplicità* q lo spazio S^*_{R-nr-1}. Tale sistema risponde ad un sistema di corpovarietà di S_r di dimensione massima: $nr-1$, fondamentale rispetto al sottogruppo ψ^* di corpoproiettività perchè ogni corpoproiettività di ψ^* lo trasforma evidentemente in sè stesso. Considerando l'S_r come *spazio fondamentale* del I° tipo, (di dimensione complessa: $nr-1$) le corpovarietà di detto sistema fondamentale si diranno *ipersuperficie fondamentali di ordine* q (di dimensione $nr-1$). Considerando l'S_r ipercomplesso come spazio fondamentale del II° tipo si introducono pure le ipersuperficie fondamentali di ordine q, sostituendo ad ogni corpovarietà, di dimensione $nr-1$, del sistema fondamentale considerato, l'insieme degli ∞^{nr-1} *gruppi neutri* che essa contiene (gruppi che costituiscono i *punti* in tale Geometria). Le varietà dell'S_r ipercomplesso [considerato come spazio fondamentale del I° o II° tipo, di dimensione complessa nr] ottenute considerando i punti comuni a due o più ipersuperficie fondamentali, si diranno *varietà fondamentali*. Si diranno, in particolare, rette, piani, ecc.... spazi subordinati fondamentali, le varietà ad 1, 2..., ecc. dimensioni, ottenute intersecando *degli iperpiani fondamentali*.

Si ha allora che:

a) *Ogni ipersuperficie fondamentale di ordine* q *di uno spazio fondamentale del II° tipo ha in comune* q *punti con una retta fondamentale generica.*

Se diciamo ν il numero dei punti costituenti un gruppo neutro di S_r, rispetto al sottogruppo fondamentale considerato ψ^*, si ha che:

b) *Ogni ipersuperficie fondamentale di ordine* q *di uno spazio fon-*

---

[1]) *Loc. cit.* [2]), Parte I Cap. I° e II°, e parte III[a], cap. IV.

damentale del I° tipo ha in comune con una retta fondamentale generica ν q *punti.*

Le proprietà *a)* e *b)* sono immediata conseguenza del fatto che *gl' iperpiani fondamentali* rispondono, sulla W_{nr}, a sezioni iperpiane di W_{nr} eseguite con gl' ∞^{nr} iperpiani della stella di vertice $S^*_{R\,-nr-1}$.

Si osservi che il numero ν dei punti costituenti un gruppo neutro rispetto a ψ^* è dato dal numero di punti *variabibi* ottenuti intersecando la W_{nr} con un $S_{R\,-nr}$ *generico* passante per $S_{R\,-nr-1}$. Se questo spazio non ha alcun punto in comune con la W_{nr}, sarà ν uguale all'ordine di W_{nr}. Per particolari posizioni di $S^*_{R\,-nr-1}$, rispetto alla riemanniana W_{nr}, ν può essere inferiore all'ordine di W_{nr}. Nel caso che risulti $\nu = 1$ la Geometria fondamentale del I° tipo coincide con quella del II° tipo. Per essere queste due Geometrie distinte deve essere $\nu > 1$, perchè in tal caso, e solo in tal caso, i gruppi neutri (che sono gli elementi da dirsi *punti* nella Geometria del II° tipo) non coincidono con i singoli punti di W_{nr} (che costituiscono i punti nella Geometria del I° tipo).

Il numero ν dei punti costituenti un gruppo neutro, rispetto a ψ^*, si dirà *grado della Geometria fondamentale del I° (o II° tipo)*, determinata dal sottogruppo fondamentale di corpoproiettività ψ^*, perchè è eguale al grado del sistema semplice di ipersuperficie che si ottiene secando il sistema composto, di S_N, rispondente al sistema fondamentale $[C_{nr-1}]$, con uno spazio S^*_{nr} fissato genericamente in S_N, [cioè quando si considera la III^a^ *rappresentazione* dell' S_r ipercomplesso, ottenuta dalla I^a^ in S_N intersecando gli S_{n-1} di (S_{n-1}) con detto S^*_{nr}].

6. Nota I^a^ — *Quanto s' è detto nei numeri precedenti, per il caso di uno* S_r *legato ad un' algebra complessa, si può ripetere per un' algebra reale, prolungandola nel corpo complesso.* In questo caso le forme $f_1, \ldots, f_{R+1}$ di cui al n.° 1 sono a *coefficienti reali*, [perchè nella tabella di moltiplicazione delle unità $u_1, \ldots, u_n$, essendo l' algebra reale, compaiono solo coefficienti reali].

Ne segue che la riemanniana W_{nr}, di equazioni parametriche [1] risulta una varietà *reale* che con i suoi ∞^{nr} punti *reali* (dimensione reale) rappresenta (II^a^ rappresentazione) l' S_r legato all' algebra reale, e con i suoi ∞^{nr} punti *reali e immaginari*, (dimensione complessa) rappresenta l' S_r ipercomplesso legato a detta algebra dopo averla prolungata nel corpo complesso.

Analoghe osservazioni si fanno per la I^a^ rappresentazione. Quando si considerano varietà algebriche subordinate dalla W_{nr} *reale*, come riemanniana dell' S_r legata all' algebra reale, bisogna aggiungere la condizione che siano reali e che abbiano, come la W_{nr}, la dimensione reale uguale a quella complessa. Così per es.: quando si considera l' S_1 proiettivo complesso come legato all' algebra *reale a due unità*, 1 e i [costituenti anche un corpo numerico, il corpo complesso] si perviene alla riemanniana W_2, (che si può

ridurre alla sfera di RIEMANN) che è una superficie reale nei cui ∞^2 punti reali (dimensione reale) è rappresentato detto S_1 complesso. Se ora si *prolunga* l'algebra reale a due unità 1 e i nel corpo complesso, si ottiene l'algebra dei *numeri bicomplessi* e, in corrispondenza l'S_1 bicomplesso, che risulterà rappresentato negli ∞^2 punti reali e immaginari (dimensione complessa) della sfera di RIEMANN W_2. Quando si considera W_2 come riemanniana dell'S_1 complesso (e non bicomplesso), cioè legato all'algebra reale a due unità 1 e i, le curve algebriche che sono da considerarsi nella W_2 sono solo quelle reali e con ∞^1 punti reali. Per es. quando si studiano nella sfera di RIEMANN W_2 le geometrie fondamentali che danno le geometrie non euclidee bidimensionali [1]), le sezioni piane di W_2 che si considerano sono solo quelle ottenute con piani reali secanti (che danno come sezioni cerchi reali con ∞^1 punti reali).

7. NOTA II^a — Quanto s'è detto per la I^a e II^a rappresentazione si estende, al solito, per la III^a rappresentazione in un S_{nr} di S_N. Nel caso che si tratti di algebra reale, tale S_{nr} occorre fissarlo reale, come del resto si usa pure, in pratica, anche nel caso di un'algebra complessa.

---

[1]) *Loc. cit.* [2]), Parte I.

L'India nelle lettere di Pietro Della Valle

Nota del socio **Giuseppe De Lorenzo**

(presentata all' Accademia il dì 4 novembre 1950)

Sunto. — In questa Nota si prende occasione da alcune pubblicazioni francesi di questi ultimi anni, nelle quali sono descritte le lingue, le religioni, le filosofie, le credenze e le usanze dell' India e l' influenza, che esse hanno avuto sull' Occidente, ad opera soprattutto dell' Inghilterra, della Germania e della Francia, per rivendicare ad alcuni italiani, e particolarmente a Pietro Della Valle, il merito di avere, come pionieri, dato all' Europa alcune prime notizie della civiltà e della cultura dell' India.

In questi ultimi anni la *Bibliotèque scientifique* e la *Bibliotèque historique* della casa editrice Payot, in Parigi, si sono arricchite di alcune importanti opere sulla civiltà e sulla cultura dell' India. Prima è apparsa, nel 1945, l' opera di Schweitzer su *Les grands penseurs de l' Inde*. Lo Schweitzer, dottore in filosofia, in teologia ed in medicina, dopo aver peregrinato per tutte le parti del mondo, vive da molti anni nell'Africa centrale, svolgendovi attività di medico e di missionario, così come aveva fatto David Livingstone nell'Africa australe, ma con un assai più vasto e profondo corredo di esperienza e di cultura. Egli, infatti, essendo anche organista, ha scritto, oltre diversi libri di viaggi e di ricordi, opere su Giovan Sebastiano Bach: simile, in ciò, al nostro benemerito Alessandro Costa; il quale, essendo pianista, mentre fondava e dirigeva a Roma la società musicale *Giovan Sebastiano Bach*, contemporaneamente scriveva e pubblicava presso il Bocca, a Torino, i suoi interessanti volumi, *Il Buddha e la sua dottrina* e *Filosofia e Buddhismo*. Lo Schweitzer nella sua opera, su accennata, mette a confronto la concezione indianorientale del mondo, polarizzata verso la negazione della vita, con quella europeoccidentale, diretta verso l' affermazione della vita; e cerca di dimostrare, che la prima ha avuto, nel buddhismo mahâyânico e nel hinduismo vaisnavico, evoluzioni verso l' affermazione della vita, come quelle della *Bhâgavad-Gîtâ* e delle dottrine di Ramanuja, del mille dopo Cristo, e dei moderni Mahâtma Gandhi e Rabindranath Tagore; mentre nella seconda si sono generate correnti di negazione della vita, come l' ascetismo, il misticismo ed il monachismo cristiano - cattolico ed il pessimismo di Schopenhauer e di Leopardi: sì che le due opposte concezioni del mondo, l' orientale e l' occidentale, vengono in alcuni punti a coincidere.

D'altro genere è l'opera di Alfred Foucher, pubblicata nel 1949, su *La Vie du Bouddha*. L'insigne indianista-archeologo ha voluto con essa coronare i suoi ottantaquattro anni di età ed i suoi sessanta anni di intensa attività, dedicata allo studio delle religioni, delle arti e delle letterature dell'India, cercando, con la scorta degli antichi testi e dati archeologici ed epigrafici, di enucleare dalla leggenda, dal mito e dalla deificazione la persona storica e reale di una delle più grandi figure dell'umanità e del più grande figlio dell'India, il Buddha Sakyamuni; giungendo alla conclusione, che verrà riportata alla fine di questo scritto.

Segue, nel 1950, un libro di Louis Renou, *Sanskrit et Culture, l'apport de l'Inde à la civilisation humaine*; nel quale l'autore mostra l'originalità fondamentale della civilizzazione indiana e dimostra, che, qualunque sia il giudizio, che si voglia su essa portare, è ormai indiscutibile, che quel vasto insieme di pensieri, di intuizioni e di miti, caratteristico della tradizione indiana, non può essere più negletto da chiunque voglia raggiungere un umanesimo degno di tale nome. Si tratta di forme spirituali, che hanno valore universale, anche se gli approcci ne sono difficili e le apparenze sembrano a volte esoteriche. Nessuno può ormai più ignorarle.

Non le aveva ignorate il nostro Leopardi, che tra il 1821 ed il 1823 annotava nel suo *Zibaldone*: « La lingua sacra degli Indiani, la sanscrita, costruita secondo il disegno più perfetto forse che dall'ingegno umano sia stato immaginato giammai... più simile alla latina che alla greca... prodigiosamense ricca, traendo la sua ricchezza da sole pochissime radici... ha primeggiato in tutta l'antichità in ordine al pensiero, alla profondità alle cognizioni più metafisiche e alla morale. » E con ciò implicitamente riconosceva il principio del primato filosofico dell'Oriente.

Su questo principio appunto è fondato il grosso volume di Raimond Schwab, apparso pure nel 1950, su la *La Renaissance Orientale*, con prefazione dello stesso Louis Renou. Nel 1841 Eduard Quinet aveva dato il titolo di *Renaissance Orientale* ad uno dei capitoli essenziali del suo *Génie des Religions*, Lo Schwab lo ha ripreso, per indicare con esso il rinascimento umanistico, che si è prodotto in Europa ed in Occidente in questi ultimi due secoli, dal 1750 ad oggi: analogo al rinascimento classico, che sorse in Italia nel Trecento, col Petrarca e con le decifrazioni dei testi antichi latini dei palinsesti, si accrebbe con la conoscenza dei testi greci, portati nel 1452, dopo la presa di Costantinopoli, in Italia, e di qui si diffuse, durante il Quattrocento ed il Cinquecento, per tutta l'Europa. Questa analogia fu per la prima volta indicata da Schopenhauer, nell'agosto del 1818, nella prefazione al primo volume di *Die Welt als Wille und Vorstellung*, nella quale scriveva: « Se il mio lettore è divenuto partecipe anche del beneficio del *Veda*, il cui accesso mediante le *Upanisciade* è, ai miei occhi, il più grande privilegio, che questo ancor giovine secolo deve al suo predecessore, poichè io penso, che l'influsso della letteratura sanscrita pene-

trerà non meno profondamente di quel che nel quindicesimo secolo fece la rinascita della greca; se dunque, io dico, il lettore ha anche già ricevuto la consacrazione dell'antica sapienza indiana, allora egli è preparato nel modo migliore ad ascoltare quel che ho da esporgli. » Così lo SCHWAB può giustamente dare al nostro movimento culturale di questi ultimi due secoli il titolo di *Rinascimento Orientale*; di cui il primo barlume si scorge nei versi 686-87 del canto VIII dell'*Eneide* di VIRGILIO: « Aurorae populi viresque Orientis »; nei « superbi Indi » del *Carmen saeculare* », e nei « subiectos Orientis orae Seras et Indos » della XII ode del primo libro di ORAZIO.

Questo rinascimento orientale ebbe inizio nella seconda metà del Settecento, con la conoscenza delle antiche lingue dell'Iran e dell'India, lo *zendo* ed il *sanscrito*, a cui nella prima metà dell'Ottocento si aggiunse quella dell'antica lingua indiana buddhista, il *pâli*. A tale conoscenza contribuirono essenzialmente gli studiosi inglesi, tedeschi e francesi. Gli italiani vi parteciparono solo dopo ed in maniera secondaria: cominciando dal grande editore e traduttore del *Râmayâna*, Gaspare GORRESIO, istruitosi alla grande scuola francese di Eugène BURNOUF ed a quella inglese del WILSON: per passare poi ai suoi immediati discepoli, quali il DE GUBERNATIS ed il KERBAKER, ed ai discepoli dei loro discepoli. Lo SCHWAB nel suo grande volume su *La Renaissance Orientale*, così ricco di erudizione, si ferma principalmente sui contributi inglesi, tedeschi e francesi; ma, naturalmente, si estende assai più sul rinascimento orientale della Francia, sia nel campo linguistico che in quello culturale. Ed egli, del resto, ne ha ben donde, perchè in Francia per primo Anquetil DUPERRON, con la sua traduzione dello *Zend-Avesta*, del 1771, schiuse all'Europa l'antico mondo dell'Iran e di ZARATHUSTRA, e poi con la sua traduzione dal persiano in latino delle *Upanisciade*, *Oupnek-hat*, del 1801-02, fece conoscere l'antica sapienza indiana. Dopo di lui il genio di Eugène BURNOUF gettò le basi granitiche dello studio del sanscrito e del pâli e delle loro letterature, filosofie e religioni, sulle quali si sono elevate le costruzioni di tanti orientalisti francesi, fino ai loro ultimi, illustri rappresentanti, quali Sylvain LEVI, CHAVANNES, PELLIOT, FOUCHER e RENOU. Tali studi orientalistici produssero un riverbero su tutta la cultura letteraria ed artistica della Francia, a cominciare dal principio dell'Ottocento fino ad oggi: da BALZAC, HUGO e DE VIGNY, passando per BIZET e RODIN fino a FLAUBERT, VERLAINE e Jules LAFORGUE.

Ma, già prima di essi, alla metà del Settecento, VOLTAIRE aveva col suo genio intuito il grande valore del pensiero indiano ed orientale sulla nostra cultura occidentale: e non per i nuovi studi orientalistici, che egli non poteva ancora conoscere, nè per le anteriori relazioni dei viaggiatori italiani, che qui appresso indicherò, ma solo per quel che aveva appreso da ARRIANO e da PLUTARCO, sulla spedizione di ALESSANDRO in India, e dagli scrittori e filosofi alessandrini. Per darne un esempio, tra tanti altri, basta

rileggere il seguente pezzo del *Dialogue entre le chapon et la poularde*. La pollastra, atterrita ed inferocita per la sorte loro fatta dagli uomini, di essere castrati, accecati ed ingrassati, per poi sgozzarli, arrostirli e mangiarli, chiede al cappone, se questa è l'usanza fra tutti i popoli della terra. Il cappone risponde che no, « que dans un pays nommé l'*Inde*, beaucoup plus grand, plus beau, plus fertile que le nôtre, les hommes ont une loi sainte, qui depuis de milliers d'années leur defend, de nous manger; que même un homme nommé PYTHAGORE, ayant voyagé chez ces peuples justes, avait rapporté en Europe cette loi humaine, qui fut suivie par tous ses disciples. On doit lire PORPHYRE le pythagoricien, qui a écrit un beau livre contre les broches. Oh le grand-homme! le divin homme que ce PORPHYRE! avec quelle sagesse, quelle force, quel respect tendre pour la divinité, il prouve que nous sommes les alliés et le parens des hommes, que Dieu nous donna les mêmes organes, les mêmes sentimens, la même mémoire, le même germe inconnu d'ententement, qui se developpe dans nous jusq'au point determiné par les lois éternelles, et que ni les hommes ni nous passons jamais. En éfet, ma chére poularde, ne serait-ce pas un outrage à la divinité, de dire que nous avons des sens pour ne point sentir, une cervelle pour ne point penser? Cette immagination digne d'un fou nommé DESCARTES, ne serait-elle pas le comble du ridicule, et la vaine excuse de la barbarie?». Come si vede, VOLTAIRE aveva perfettamente intuito, attraverso PORFIRIO, il principio della identità della vita universale, espresso dalle *Upanisciade* con la formula « questo sei tu - *tat tvam asi*, » e la legge indiana della non violenza, o non nocenza, *ahimsâ*: senza conoscere l'*Oupnek'hat*, che Anquetil DUPERRON doveva pubblicare quasi mezzo secolo dopo, nè le anteriori relazioni dei viaggiatori italiani, che già avevano ampiamente descritto la *ahimsâ* indiana.

Ma lo SCHWAB, che nel suo libro esalta, e giustamente, l'opera di Anquetil DUPERRON, accenna solo fuggevolmente a quella degli italiani, che pure avevano contribuito, a loro modo, a far conoscere in Europa i pensieri e gli usi e i costumi dell'India. Eppure già Angelo DE GUBERNATIS nel suo libro, *Matériaux pour servir à l'Histoire des Études Orientales en Italie*, Paris, Firenze, Roma, Torino, presso Loescher, 1876, dedicato al Congresso degli Orientalisti a Pietroburgo, e nell'altro, *Storia dei viaggiatori italiani nelle Indie Orientali*, Livorno 1877, aveva indicato l'apporto dato dagli italiani alla conoscenza dell'India in Europa. Ed Ernst WINDISCH, infatti, ne ha onorevolmente tenuto il debito conto nella sua poderosa *Geschichte der Sanskrit-Philologie und indischen Altertumskunde*, Strassburg 1917.

Tra gli italiani, i quali, dopo la caduta dell'impero romano, contribuirono a far conoscere l'Oriente all'Occidente, il primo, anzi il principe, per la ricchezza e l'esattezza delle notizie da lui date, è senza dubbio Marco POLO. Come con le sue descrizioni delle magnificenze e degli splendori della Cina e del Giappone egli accese in Cristoforo COLOMBO, già consapevole della

sfericità della terra, l'ardore di *buscàr el levante por el poniente*, e lo portò quindi, senza che se ne accorgesse, a scoprire un nuovo continente, che doveva poi da un altro italiano prendere l'alto e sonante nome di America: così Marco Polo, dopo che per più di un millennio era sceso sull'Occidente un velo di silenzio sulle rivelazioni orientali degli scrittori alessandrini, schiuse di nuovo all'Europa i misteri delle civiltà e delle culture dell'Asia e descrisse con insuperata chiarezza alcune forme di purezza, sapienza e santità delle manifestazioni civili e religiose dell'India.

Marco Polo era nato, come si sa, nel 1254 a Venezia. All'età di 17 anni, nel 1271, si recò, insieme con gli zii Niccolò e Matteo, attraverso l'impervia Asia centrale alla corte di Kublai-Khan in Cina, dove giunsero nel maggio del 1275 e vi rimasero fino al 1292; quando intrapresero il ritorno, questa volta per mare, lungo le coste della Cina, dell'Indocina e dell'India ed attraverso la Persia e l'Asia Minore, finchè giunsero nel 1295 a Venezia Qui si trovò coinvolto nella guerra tra Venezia e Genova e, fatto prigioniero nella battaglia della Curzola, il 7 settembre 1298, fu tradotto nelle carceri di Genova, dove tra il 1298 ed il 1299 dettò ad un suo compagno di prigionia, Rustichello da Pisa, in un francese venezianizzato, la narrazione dei suoi viaggi; di cui egli stesso poi nel 1307, quando era da sette anni libero, diede una copia corretta a Thibault de Cepoy. Ma essa era già nota e tradotta in varie redazioni italiane: come ne fa fede il codice magliabechiano II, IV, 88 « scritto a Firenze da Michele Ormani, quale morì negli anni di Cristo mille trecento nove. »

Togliamo da essa solo quello che riguarda l'India. Anzitutto egli descrive i brâhmani, come ancor oggi non si potrebbero meglio descrivere. « E di questa provincia son nati i bregomanni e di là vennero primamente. E sì vi dico che questi bregomanni sono i migliori uomini e gli più leali del mondo, che giammai non direbbono bugia per veruna cosa al mondo. E non mangiano carne nè beono vino, e istanno in molta grande astinenza e onestade, e non toccherebbero altra femmina che la loro moglie, nè non ucciderebbono verun animale, nè non farebbono cosa onde credessono aver peccato. Tutti gli bregomanni sono conosciuti per un filo di bambagia, ch'egli portano sotto la spalla manca, e sì che gli viene il filo a traverso il petto e le spalle. » Dopo aver così indicato il *brahmacârya* e la *ahimsâ* dei brâhmani, passa a descrivere, con non minore esattezza, le manifestazioni ascetiche dei *yogi* o penitenti nudi o ginnosofisti, jainisti: « E questi regolati si chiamano *cuigui*... e vanno tutti ignudi senza coprire loro natura... e non mangiano nè in taglieri nè in iscodelle, ma in su foglie di certi alberi, secche e non verdi, che dicono che le verdi hanno anima, sì che sarebbe peccato. Ed eglino si guardano di far cosa onde eglino credessono aver peccato: innanzi si lascerebbono morire. E quando sono domandati: Perchè andate voi ignudi? E quegli dicono: Perchè in questo mondo noi non recammo nulla, e nulla vogliamo di questo mondo... E ancora vi dico, che

costoro non ucciderebbero veruno animale di mondo, nè pulce, nè pidocchi, nè mosca nè veruno altro, perchè dicono ch'egli hanno anima. Ancora non mangiano veruna cosa verde, nè erba, nè frutti, infino tanto che eglino non sono secchi, perchè dicono anche che hanno anima. Egli dormono ignudi in su la terra, ne non toccherebbono nulla, nè sotto nè addosso: e tutto l'anno digiunano e non mangiano se non pane e acqua. » Dopo aver così descritto queste estreme forme di mortificazione, che vigono ancor oggi da millenni nell'India e che già due millenni e mezzo fa erano state solennemente riprovate dal Buddha Sakyamuni, il nostro Marco Polo imprende a narrare in maniera veramente mirabile la vita leggendaria dello stesso Sakyamuni Buddha, che egli chiama Sagamoni Borcan, secondo la pronunzia mongolica; della sua nascita regale, della sua vita di giovinezza, tra gli agi, il lusso e la voluttà, lungi dalle miserie e dai dolori del mondo, finchè, venuto a contatto col mondo ed avendo visto in esso regnare vecchiezza, malattia, affanni, dolore e morte « questo giovine si ritirò al palagio, e disse che non voleva piue restare in questo misero mondo, ma disse che voleva cercare quello che mai non moriva nè non invecchiava... e incontanente si partì da questo palagio e andonne su alta montagna, molto rimota, e quivi dimorò poscia tutta la sua vita molto onestamente: chè per certo, s'egli fosse istato cristiano battezzato, egli sarebbe stato un gran santo appo Dio. » E non si potrebbe, certo, esporre con più brevità ed esattezza la vita, la concezione del mondo e la santità del Buddha.

Ora questa narrazione di Marco Polo, che, come ho cercato di dimostrare nel mio libro *India e Buddhismo antico*, 5ª ed., Bari, Laterza, 1926, pare quasi una traduzione letterale di antichi testi indiani, tradotti anche in cinese, doveva essere nota a Dante; il quale conosceva tutto il conoscibile dei suoi tempi. Solo così si spiega il dubbio, ch'egli si pone nel canto XIX del *Paradiso*, descrivendo un santo dell'India:

Un uom nasce alla riva
Dell'Indo, e quivi non è chi ragioni
Di Cristo, nè chi legga, nè chi scriva;
E tutti i suoi voleri ed atti buoni
Sono, quanto ragione umana vede,
Senza peccato in vita ed in sermoni.
Muore non battezzato e senza fede:
Ov'è questa Giustizia che il condanna?
Ov'è la colpa sua, se ei non crede?

Nella quale ultima terzina Dante pare che pigli le mosse proprio delle ultime su citate parole di Marco Polo, riguardanti Buddha: « Chè per certo, s'egli fosse istato cristiano battezzato, egli sarebbe stato un grande santo

appo Dio.» Ma la Giustizia risolve il dubbio di Dante, rispondendogli con la voce dell'aquila:

> Ma, vedi! molti gridan «Cristo! Cristo!»,
> Che saranno in giudizio assai men *prope*
> a lui, che tal che non conosce Cristo.

E qui veramente Dante, con uno dei suoi formidabili colpi d'ala d'aquila, spazza via dal cielo sereno della santità ogni nube di ristrettezza e di intolleranza religiosa e mette alla pari, nel campo morale, il Buddhismo col Cristianesimo, l'Oriente con l'Occidente.

Due secoli e più dopo Marco Polo viaggiava per l'India un fiorentino, Andrea Corsali, che ne ritornò nell'ottobre del 1516. Il Corsali riferì del suo viaggio in due lettere, una diretta a Giuliano e l'altra a Lorenzo de' Medici, riprodotte poi dal Ramusio e tradotte in francese da Gabriel Symeon. Il Richter nella sua opera *The literary Works of Leonardo da Vinci*, London, 1883, riporta dalla lettera a Giuliano de' Medici il passo seguente: «Alcuni gentili chiamati Guzzarati non si cibano di cosa alcuna che abbia sangue, nè fra essi loro consentono che si noccia ad alcuna cosa animata come il nostro Leonardo da Vinci.» Come dunque Marco Polo con la sua descrizione della santità di Buddha quasi certamente influì sullo spirito grande di Dante: così il Corsali, osservando nell'India la concezione e la pratica della non-nocenza, o *ahimsâ*, verso tutti gli animali, corse subito col pensiero all'altro grande italiano, Leonardo da Vinci; il quale, come San Francesco d'Assisi, aveva amore e compassione per tutti gli esseri viventi.

Pochi anni dopo il Corsali un altro fiorentino, Filippo Sassetti, mandò notizie dell'India in Europa. Il Sassetti era nato a Firenze nel 1540, aveva studiato a Pisa, aveva viaggiato per la Spagna ed il Portogallo e si era recato poi per ragioni di commercio in India, dove morì a Goa nel 1588, essendo, quindi, uomo di studio, riferì nelle sue *lettere* osservazioni molto interessanti sulla cultura dell'India. Anzitutto sulla sua classica lingua, a cui egli non dà ancora il nome di sanscrito, ma di cui riconosce l'importanza, specialmente per la ricchezza e l'antichità della sua grammatica, sia nella morfologia, che nella sintassi e nella fonetica: «Costoro hanno la grammatica e se ne servono. La lingua in sè è dilettevole e di bel suono, per i molti elementi, che egli hanno fino a 53; de' quali tutti rendono ragione, facendoli nascere tutti dai diversi movimenti della bocca e della lingua. Traducono nella loro facilmente tutti i concetti nostri, e stimano che noi non possiamo fare il medesimo de' loro nella lingua nostra, per mancare della metà degli elementi, e più.» Attribuisce, poi, la maggiore agilità degli Indiani nel parlare alla masticazione, che essi usano fare, delle foglie di *betel* con noci di *areca* e calce, per cui «hanno conseguentemente

la lingua e la bocca asciutta è veloce, e noi per lo contrario.» Passa poi a descrivere i brâhmani, con la loro purezza e la loro *ahimsâ*, come avevano già fatto Marco Polo ed il Corsali: «Tra i più vaghi sono una razza che domandano Brameni, de' quali fece menzione Plinio, che, trattando di queste genti orientali, dice: *audio complures eorum vocari Bracmenes:* i quali appresso tutti sono reputati i più nobili e i migliori e i più intelligenti di tutti li altri; onde dal resto delle genti stimati, e nell'esteriore reveriti e ben trattati. Et il nome loro è composto, e la prima parte *Bra* nella loro antica lingua significa Iddio, e la seconda *mene* speculare; sicchè in tutto gli potremmo chiamare teologi [speculatori di Dio]. Sono tutti d'ingegno velocissimo... ed alla virtù della temperanza è particolarmente indiritta la vita loro... molto più austera che quella degli Scappuccini perchè quelli di loro di vita più stretta non mangiano carne nè cosa che abbia senso, o che tenga similitudine a cosa sensata. Non beono vino, nè volentieri ne sentono ragionare; e tutto è indiritto a non perturbare col cibo e col bere superchio la loro speculazione, ancora che ciò sia passato da poi in una superstizione tanto terribile, che, a considerare le azioni loro, paiono cose favolose o sogni: perchè dal non mangiare carne, pel rispetto sopra detto, al ricomperare la vita degli animali, che ammazzano i Cristiani et i Mori, al fare lo spedale per gli uccelli ed altre bestie inferme, al dare libertà agli uccelli presi, al consumare molti fardi di riso ogni anno in casa loro, perchè i topi non pure ne vivano ma ne sguazzino, è differenza tanto grande, che non può altrui non si meravigliare. La vita loro è di riso, frutti della terra, latte, burro, ed acqua, senza più. Non possono porsi a mangiare, il riso particolarmente, se prima non si lavano tutto il corpo E dove anticamento si lavavano per delizia, costoro l'hanno ridotta in superstizione, chè anzi si lasceranno morire di fame e di sete, che porsi a tavola non lavati. E come tra loro sono differenti in religione et in nobiltà, i più nobili nè mangiano nè beono cosa, che sia stata tocca da manco nobili a pena di essere reputati infami.» Come già si scorge da queste ultime osservazioni, il Sassetti non ha più la serena obiettività di Marco Polo e del Corsali. Non ha l'equanimità e la tolleranza religiosa, che il Polo aveva appreso nella Cina di Kublai-Khan e che gli permise di collocare il Buddha Sakyamuni quale «un grande santo appo Dio»; nè aveva la libertà di spirito, a cui s'era educato il Corsali nella Firenze medicea ed antisavonaroliana e per cui poteva magnificare «il nostro Leonardo da Vinci»; il quale, come dice il Vasari «aveva fatto nell'animo un concetto così eretico, che ei non si accostava a qualsivoglia religione, stimando assai più lo esser filosofo, che cristiano.» Il Sassetti, invece, era più cristiano che filosofo, e cristiano di quel cristianesimo posteriore al Concilio di Trento, che doveva poi col suo fanatismo e la sua intolleranza fiammeggiare nei roghi dell'inquisizione. Infatti il Sassetti nella sua lettera dal Cocin del 27 gennaio 1585 scriveva: «La loro religione, io dico, che è cosa da cercarla

d' intenderla, per ridersi della vanità loro: perchè, ancora che non ricordino mai altro che Iddio, che sta in cielo, che fa ogni cosa, incorporeo, uno solo ed eterno; a vedere poi le loro sciempiezze ne' tempj loro, è cosa de ridersene. » E continua, infatti, a ridere delle loro superstizioni ed idolatrie, quasi come se noi non ne avessimo altrettali ed altrettante in casa nostra. Un anno dopo che il Sassetti aveva scritto quella lettera, l' 11 aprile del 1586, nasceva in Roma l' ultimo dei viaggiatori italiani, di cui voglio qui parlare: Pietro Della Valle, il quale, insieme con i suoi grandi pregi di osservatore e di descrittore, presenta a volte le stesse ristrettezze mentali allor che porta il suo giudizio sulle religioni dell' India e dell' Oriente.

Pietro Della Valle non era, come i tre su mentovati viaggiatori italiani, suoi predecessori nell' Oriente, un mercante. Patrizio, discendente dalla nobile famiglia dei Della Valle di Roma ed altero della sua qualità di *civis romanus*, era uomo d' arme e di lettere, esperto anche d' arte musicale, ed aveva preso parte anche alle guerre nell'Africa settentrionale, prima che si decidesse, per una contrastata passione amorosa, ad intraprendere il suo lungo viaggio, di dodici anni, in Oriente, non a scopo di mercatanzia, ma, come l' Ulisse dantesco, per seguir virtute e conoscenza. A tal fine, come tre secoli prima di lui Francesco Petrarca era venuto a Napoli, per essere esaminato dal buono e dotto re Roberto, così egli pure venne a Napoli, per essere esaminato e consigliato dal suo amico, l' eruditissimo letterato e stimatissimo medico Mario Schipano; al quale egli dirigerà poi le 54 lettere narrative del suo viaggio, che furono poi, dopo la sua morte, il 21 aprile 1652, fatte pubblicare dai suoi figli, a Roma ed a cura di Gio. Pietro Bellori, nel 1658-1663, col titolo *Viaggi di Pietro Della Valle il Pellegrino, descritti da lui medesimo in lettere familiari all' erudito suo amico Mario Schipano, divisi in tre parti, cioè: la Turchia, la Persia e l' India.* Ed a Napoli, prima di andare ad imbarcarsi a Venezia sul vascello da guerra il *Gran Delfino*, che fece vela l'8 giugno 1614 per la Terrasanta, volle « prima di partire di Napoli, per dar vero titolo a questa sua peregrinazione, nella chiesa di san Marcellino, tra le preghiere di quelle signore monache, cantata una messa alla prosperità del suo viaggio, e fece benedire una tonaca e 'l bordoncino di oro che si cinse al collo, intitolandosi il Pellegrino, senza più mai levarselo, se non dopo visitata Terra Santa. »

Durante tutto il suo lungo e fortunoso viaggio rimasero indelebili in lui l' amore e l' ammirazione per lo Schipano e la nostalgia per la bella Napoli ed i suoi abitanti, il suo linguaggio, il suo mare ed il suo Posillipo. Leggasi, p. es., quel che egli scriveva da Ferhabad in Persia nel maggio del 1618. « Non fia mai, fin che io viva, che le Campane Deità, che la bella Partenope, che sì dolci ozii un tempo mi diede, abbia bando dal mio cuore. Partenope a me fia sempre nel pensiero: Partenope ricorderanno sempre le parole mie: Partenope, poichè gli occhi non può, diletterà in sogno con

dolce inganno la mia vaga mente. Partenope intanto coi suoi penati, ch'io tanto onoro, sia propizia ai miei voti... Ed io, se avverrà mai che, circondate le tempie di doppio lauro, riveda un giorno gli scogli amati di Posilipo; alle Muse, alle Ninfe, ai Dei marini e terrestri della cara terra, o quante corone appenderò grato, quanti altari farò fumar d'arabi incensi e di preziosi odori orientali. » E vi si aggiunga quel che scriveva da Ispahan il 3 agosto 1620: « O se io potessi venire a Napoli insieme con questa lettera... quanti discorsi, quante *chiacchieriate*: che buone conversazioni, che dotti ragionamenti avremmo da fare, e bene spesso all'ombra degli amati miei scogli di Posilipo. » Ma l'amore di Napoli non gli fa svanire il ricordo delle altre città d'Italia, come quando nella su citata lettera da Ferhabad descrive il gioco del *polo*, ora universalmente praticato, allora esercitato solo nella Persia e nell'India: « Il giuoco del pallamaglio a cavallo non è altro, se non quel medesimo appunto, che fanno i Fiorentini a piedi. Vi è solo questa differenza fra il giuoco de' Persiani e il calcio de' Fiorentini, che i Fiorentini giuocano con molta gente a piedi in piazze più piccole, balzando il pallone in aria, e bene spesso, per toglierselo gli uni agli altri, o per impedirsi e disturbarsi, si danno di matti sgrugnoni, e pestandosi il volto e facendosi lividi che pare non abbia troppo del buono per persone nobili. Ma i Persiani più nobilmente giuocano a cavallo, pochi di numero, solo cinque o sei per parte, e senza sgrugnoni e senza battersi l'un l'altro, battono solo la palla, che è una boccia di legno leggero, agitandola per terra e percuotendola col fianco lungo del maglio, il quale anco è inarcato alquanto per coglierla meglio... Nelle quali cose tutte si ricerca una gran destrezza ed agilità, tanto del cavallo quanto del cavaliere e, quello che importa, si esercitano in questo giuoco assai bene ed i cavalieri ed i cavalli, in tutti i moti ed in tutti gli atti, che sono necessari per la guerra. Insomma, è bellissimo giuoco, assai più dei caroselli e di ogni altro simile, che si faccia da noi. » L'esattezza di questa descrizione di Pietro Della Valle può essere nel suo giusto valore apprezzata da ogni cavaliere inglese, che abbia giocato il *polo* nell'India, od anche da chi abbia letto il racconto *The Maltese Cat* di Rudyard Kipling. Perchè Pietro Della Valle pare, che abbia fatto suo e magistralmente applicato il precetto, già impartito dal Petrarca a sè stesso e ad ogni viaggiatore: « Scrivi, scrivi quel che vedesti. » E per questo forse, fu anche apprezzato da Goethe.

Infatti, la curiosità della conoscenza, l'acutezza dell'osservazione e l'esattezza della descrizione sono le doti precipue delle lettere di Pietro Della Valle. Ne danno prova, nei più svariati campi: l'ansia febbrile delle sue ricerche archeologiche nelle rovine della distrutta Troia; l'esplorazione delle profonde camere sepolcrali faraoniche, nel centro delle grandi piramidi; lo scavo e l'acquisto di preziosissime mummie, da portare in Italia; e perfino l'ascensione, in una tempesta di neve, della cima del monte Sinai, a 2602 m. sul mare, alle falde del quale sono i monasteri, infestati da pezzenti

vagabondi, che egli descrive in conformità delle concezioni sui nostri progenitori primitivi, dategli da Lucrezio e da Orazio: «vivendo in libertà e facendo quella vita, che io credo per appunto che facessero quelli che vivevano al tempo del secolo dell'oro, che da molti è tenuto in gran pregio ma da me e stimato assai meno di questo nostro di ferro, nel quale almeno gli uomini vivono da uomini e non da bestie.» E con ciò egli anticipava di un secolo quel che G. B. Vico avrebbe scritto nei suoi *Principii di una scienza nuova*, del 1725, sul primitivo *erramento ferino* dell'umanità e sugli uomini preistorici, che non erano uomini, ma uomini-bestie, bestioni.

Ben altri accenti, invece, trova il Della Valle, quando va a visitare, nei giardini di Sciraz, le tombe dei grandi poeti medievali persiani: Hafiz, di cui paragona il *Divan* al canzoniere del Petrarca, e Saadi, del quale ricorda il *Divan*, il *Bustan* ed il *Gulistan*: meravigliandosi e deplorando, però, da buon cristiano, che il sepolcro di un poeta sia ritenuto dai persiani «degno di visitarsi per divozione come luogo santo, che per tale scioccamente lo venerano: tale è la stima che si fa qui di chi compone libri, e particolarmente dei poeti: i quali appunto, come anticamente fra i Greci, sono ora in Persia tenuti per uomini d'intelletto sovrumano, e quasi illuminati da qualche raggio di divinità, *afflatos numine* gli direbbero i Latini.» Dal che si vede, che il nobile patrizio romano non era in grado, nella sua colta rozzezza, di comprendere la squisita sensibilità artistica dei Persiani suoi contemporanei.

In Persia egli fece la prima conoscenza con gli Indiani, propriamente *Hindi*, rappresentati dai mercatanti, chiamati dai portoghesi, come ancor oggi comunemente si chiamano, *baniani*, dal sanscrito *bânija*: che sono i mercanti della terza casta, dei *vaisya*, o borghesi, costituita dagli agricoltori, artigiani e commercianti, compresa tra le prime due caste, dei *brâhmani* e dei *kṣâtriya* o guerrieri, e la quarta casta dei *sudra*, o plebei. Dai baniani, appunto, che egli incontrò ad Ispahan, il Della Valle ebbe le prime informazioni sugli ordinamenti civili, gli usi, i costumi e le religioni dell'India, che egli trasmise fedelmente all'amico Mario Schipano in una lunga lunga lettera del 18 dicembre 1617, della quale, tralasciando le sue spiegazioni evemeristiche sull'origine delle religioni indiane, riporto qui un poco di quel che egli vi scrisse sul già noto tema della *ahimsâ*:

«In quanto ai riti della religione, sono gl'Indiani fra di loro molto diversi, perchè i più osservanti e i più rigorosi non mangiano, nè uccidono cosa alcuna vivente: anzi l'hanno per grandissimo peccato fin d'ammazzare gli animali immondi, come pulci e simili. Pulci, cimici e simili altri animali infesti all'uomo, si pigliano con due dita con la maggior gentilezza possibile, e pian piano si buttano in terra, acciochè non si rompano il collo per aria nella caduta. E per contrario stimano opera tanto buona e santa il dar vita e libertà agli animali, che bene spesso comprano molto

cari gli uccelli, che altri tiene in gabbia, e quelli che son presi da' cacciatori per mangiare, solo per liberarli dalla morte, e dar loro, come fanno, libertà per l'amor di Dio. E tanto frequente è questo caso fra di loro, che un giorno avvenne in Hormuz un caso galante. Un cristiano, che si trovava vestito all'indiana, comprò da un cacciatore certi uccelli per mangiarseli; ma il cacciatore, all'abito credendolo Indiano, che volesse far la limosina di liberar gli uccelli, subito che prese i denari aprì la gabbia e gli lasciò andare: cominciò a gridare il cristiano, e infatti scopertosi l'inganno, perdè il cacciatore gli uccelli e fu costretto a rendere i denari al cristiano, con molte rise dei circostanti. Stimano anche opera molto pia il dar da vivere agli animali, e però vi sono ospedali pubblici, molto grandi e ricchi, di animali di ogni sorta, e di uccellami, ai quali per amor di Dio si dà da vivere. E sopratutto vi si vedono molte vacche (perchè queste, come dirò, sono in più venerazione di ogni altro animale) bellissime, con corna ornate tutte d'oro e di gioie, che certo deve esser cosa curiosa, e io solo per questo sono in pensiero di andarvi a vederle...»

Ed infatti, quando giunse nell'India, potè appagare la sua curiosità, di vedere gli ospedali per animali, e ne scrisse nella sua lettera da Surat, del 22 marzo 1623: «Il popolo di Cambaia la maggior parte è gentile, e quivi più che altrove si osservano con rigore le lor vane superstizioni. Onde noi, che particolarmente per vedere queste lor cose eravamo venuti, il medesimo giorno che arrivammo, dopo aver desinato e riposato alquanto, ci facemmo condurre a vedere uno spedale famoso che vi è, di uccelli di ogni sorta, i quali per esser, chi ammalato, chi storpiato, chi senza la sua compagnia, o in altro modo bisognoso di vitto e di cura, sono ivi custoditi e governati con diligenza, come anche gli uomini che ne hanno pensiero, mantenuti di pubbliche limosine... La cosa più curiosa, che vidi in questo luogo, furono certi piccoli sorcetti che essendosi trovati orfani, senza padre e madre che li governassero, furono messi in questo spedale, ed un vecchio veneraudo, di barba bianca, tenendogli in una scatola fra la bambagia, con occhiali al naso, gli maneggiava con molta attenzione, dando loro a mangiar del latte con una penna di uccello, perchè eran tanto piccoli che ancor di altra cosa non gustavano, e, per quanto ci disse, aveva intenzione, quando fossero allevati e fatti grandi, di lasciargli andar liberi a loro beneplacito... La mattina che seguì andammo a veder un altro spedale, che v'è, di capre, capretti, pecore e castroni, pur infermi e storpiati... E poi vedemmo un altro spedale di vacche e vitelle, che erano, qual con gambe rotte e quali inferme, e quali molto vecchie e magre che perciò stavano quivi a curarsi... Fuori poi di una delle porte della città vedemmo un'altra grossa mandra di vacche, vitelle e capre, che curate e ridotte in migliore stato o raccolte insieme, per essersi trovate disperse, o riscattate con denari da' maomettani, che volevano ammazzarle per mangiarsele, si mandavano nel campo a pascere, con pastori sostentati dal pubblico a questo effetto, e si guar-

davano fin tanto che, ridotte a perfetta sanità, si fosse trovato a ciascuna di esse miglior recapito, con darle a qualche cittadino o a chi che sia, che pietosamente le custodisse... Vacche, vitelle e buoi non si uccidono da alcuno, e ve n'è proibizione grandissima, e se si trovasse chi ne uccidesse, o maomettano o qualsivoglia che fosse, sarebbe castigato rigorosamente, nella vita » Questa venerazione millenaria degli Indiani per la vacca è ancor oggi più che mai viva e se n'è fatto strenuo sostenitore il Mahâtma Gandhi, che in *Young India* del 6 ottobre del 1921 ne scriveva quest'alata apologia: « Il fatto centrale del Hinduismo è la protezione della vacca. La protezione della vacca è per me uno dei più mirabili fenomeni della evoluzione umana. Essa porta l'essere umano oltre la sua specie. La vacca per me significa tutto il mondo subumano. L'uomo deve, mediante essa, realizzare la sua identità con tutto ciò che vive. Perche la vacca pervenne a tale apoteosi, è per me ovvio. Essa fu sempre in India la migliore compagna: fu la datrice dell'abbondanza, perche non solo diede il latte, ma rese possibile l'agricoltura. La vacca e un poema di pietà: si legge la pietà negli occhi del gentile animale. Esssa è la madre di milioni di Indiani. Protezione della vacca significa protezione di tutte le creature, che non possono parlare. La protezione della vacca è il dono del Hinduismo al mondo. E l'Hinduismo vivrà finche gli Hindu protegeranno la vacca. »

Se la millenaria venerazione degli Indiani per la vacca, così altamente proclamata da Gandhi, e cosa universalmente nota ed assai spesso derisa nel mondo occidentele, non e altrettanto conosciuta l'istituzione degli ospedali per gli animali, descritta tre secoli fa da Pietro Della Valle ed ancor oggi vigente nell'India; la quale ha anch'essa radici millenarie, che rimontano, storicamente, almeno al terzo secolo prima di Cristo: a quando, cioè, il grande re Asoka Piyadassi, che imperava su tutta l'India, dal Himàlaya all'Oceano, faceva incidere su rocce e colonne i suoi editti, che sono stati in quest'ultimo secolo scoperti e decifrati e di cui ho dato un largo cenno nel mio libro *Oriente ed Occidente*, Bari, Laterza, 1931. In esso ho riportato appunto quest'editto, inciso sul masso di roccia granitica di Girnàr: « Ovunque, sia nell'impero della sacra e graziosa maestà del Re, che tra i popoli di confine, e perfino presso il re ionico Antioco e gli altri limitrofi, dovunque la sacra graziosa maestà del Re ha fondato ospedali per gli uomini ed ospedali per gli animali. Dove non si trovavano erbe salutari per gli uomini ed erbe salutari per gli animali, esse vi sono state importate e piantate, per ordine del Re. Ed anche radici ed alberi da frutti dove mancavano, sono stati importati e piantati. E, per suo ordine, pozzi sono stati scavati ed alberi piantati lungo le vie, per ristoro degli uomini e degli animali. » Come si vede, dunque, Pietro Della Valle si trovava innanzi ad usi e costumi, istituzioni e religioni, che vigevano e vigono da millenni nell'India; che è un paese storicamente statico nella sua dinamica attività di vita e di pensiero.

E così lo stesso Pietro Della Valle, dopo aver cercato, di dare una spiegazione evemeristica, e quindi storica, delle divinità indiane, è costretto suo malgrado, a cercare un significato simbolico in quelle loro « pazze istorie e figure » ed a scrivere: « ma io non dubito, che sotto il velame di quelle favole i lor savi antichi non abbiano occultato al volgo molti secreti, o della filosofia naturale e morale, o forse anco della storia; e tengo per certo che tutte queste figure così mostruose, di *Ganescia, Narasinha* etc., abbiano in secreto significati più ragionevoli, benchè in tal guisa sciocca-mente espressi, come ben sappiamo essere avvenuto al tempo antico fra' gentili de' nostri paesi, nelle figure di Giano quadrifronte, di altre stravaganze, non solo de' Greci e degli Egizi, ma fin de' nostri Italiani. » E qui veramente il Della Valle dà prova del suo acume e del suo buon senso, come anche quando scrive degli altri usi e costumi degli Indiani e torna a parlare delle vacche, con parole, che quasi anticipano quelle, su riportate, di Gandhi: « l'ammazzare e il mangiare le vacche, tutti in generale abboriscono; dicendo che la vacca è la lor madre per lo latte che dà e per li buoi, che ne nascono, i quali arano la terra e fanno mille altri servigi... con ragione adunque par loro di dire che le vacche siano il sostegno del mondo ». Questi stessi Indiani, così umili verso le vacche, sono a volte superbissimi verso le cose, stimate grandi dal volgo; come ne dà prova l'ambasciatore indiano del Gran Mogol presso la corte abbaside di Ispahan; il quale guardava con disprezzo le grandi riviste militari, le luminarie, le feste ed i sontuosi banchetti dati in suo onore dal re di Persia, sì da impersonare davvero l'immagine dei *superbi Indi*, già cantata da Orazio.

Ma non erano solo le religioni, gli usi ed i costumi dei popoli da lui visitati, che attraevano l'insaziabile curiosità di sapere di Pietro Della Valle. È noto, che egli fu il primo a scoprire, tra le ruine di Persepoli, ed a copiare e portare in Europa le prove di quelle misteriose scritture cuneiformi; le quali dovevano poi aspettare ancora più di due secoli, per essere decifrate, ad opera di Grotenfeld, Burnouf, Lassen e Rawlinson. Così egli fu anche il primo a far noto in Europa, che in India, v'è una lingua colta o classica, il *sanscrito*, con scrittura speciale, la *devanâgarî*, che rappresenta per la cultura di quel paese quel che per la cultura dell'Europa è stata la lingua latina: « Dopo aver veduto il tempio di Mahavir, andammo a visitare un Brahmano vecchio, stimato molto dotto fra costoro, col quale parlammo al meglio che si potè, per mezzo d'interprete, perchè altra lingua che l'Indiano egli non sapeva. Lo trovammo fra molti scolari, ai quali dava lezione. Ci mostrò i suoi libri, scritti in un carattere antico, fra di loro letterale, non comune al volgo, ma noto solo ai dotti, ed usato da' brahmani, che, a differenza di diversi altri caratteri volgari, usati variamente in varie provincie dell'India, lo chiamano *nagherî*... e questo carattere *nagherî*, noto ai dotti, nel quale tutti convengono e s'intendono, come giusto avviene fra di noi in Europa, dove tante e sì diverse

nazioni tutte c'intendiamo insieme nella lingua e nel carattere latino. Di questo carattere *nagherî*, che è bello assai, benchè sia grande ed occupi gran luogo, io ne ho veduti scritti più libri, e ne ho presi anche due libretti, quantunque io non gli sappia leggere, che con me gli porterò. » Questo dunque, scriveva il Della Valle il 29 novembre 1622 ed il 22 marzo 1623: ossia quasi trent'anni prima che il missionario olandese Abraham Roger pubblicasse, nel 1651 a Leida, la traduzione della seconda e terza delle tre *Centurie* del poeta Bhartrihari, che egli s'era fatta dare in India dal brâhmano Padmanabha.

Ma, dopo queste brevi e rapide escursioni in campi linguistici, Pietro Della Valle riprende nelle sue lettere il suo compito principale, che è la descrizione degli usi e costumi, religiosi e sociali, dei paesi da lui percorsi. Di tali descrizioni mi basti qui segnalare solo due, riguardanti due manifestazioni tradizionali e millenarie dell'India: il *yoga* e la *satî*.

Il *yoga*, latino *jugum* ed italiano *giogo*, è il modo di ottenere, mediante strenui esercizi fisici e psichici, assai spesso stravaganti e ripugnanti, l'aggiogamento o congiungimento del proprio sè od io o spirito od anima individuale, *âtmâ*, con l'*âtman* od anima universale, detto anche *brahman*, ed acquistare forza magica, per dominare il mondo circostante. Già Marco Polo, come ho indicato al principio di questo scritto, aveva dato un esatto cenno dei *yogi*, includendo in essi anche tutti i gimnofisti e jainisti. Pietro Della Valle li descrive più minutamente, non per sentito dire, ma per propria conoscenza personale: « Usciti dal tempio, e salendo là vicino su la muraglia della città, vedemmo da quell'alto il piccolo fiume chiamato *Sabermetî*, che fuor della città corre da quella banda sotto le mura. Sopra la sua riva stavano esposti al sole molti *gioghi* di vita più austera, cioè di quelli che non solo nudi, come gli altri che ho descritti, ma vanno anche tutti sparsi di cenere o tinti il corpo e il viso di un color biancaccio quasi nero, e portano barba e capelli lunghi, incolti, avviluppati rozzamente... La cenere, di che si spargono i corpi, intendo che sia cenere di cadaveri bruciati e che, per aver di continuo memoria della morte, ne vadando sempre in quella guisa imbrattati tutta la vita... Questi *gioghi* non son per razza, come i brâhmani, ma per elezion di vita, come appunto fra noi i religiosi... Vivono di limosine, sprezzando la roba e tutte le altre cose del mondo. Non pigliano moglie, e professano rigorosa castità, almeno in apparenza, che in secreto si sa che molti di loro fan vigliaccherie quanto possono... Le loro abitazioni son le piazze, le strade, i portici, gli atri dei templi, gli alberi, massimo sotto a quelli, dove sia qualche superstizione da loro venerata, e soffrono con gran pazienza di giorno e di notte, non meno ogni rigore dell'aere che gli ardori eccessivi del sole, che in quei paesi caldi è certo cosa da ammirare. Hanno esercizi spirituali a lor modo, ed anche qualche esercizio di scienza, ma l'uno e l'altro al mio parere per lo più non consistono in altro che in arti divinatorie, in secreti d'erbe

e d'altre cose naturali ed anco in magia ed incantesimi, a che son molto dediti e con che si vantano di far gran meraviglie.. E delle scienze dei *gioghi* e dei loro esercizi spirituali, e particolarmente d'un modo curiosissimo, ed al mio parere piuttosto naturale che superstizioso, da divinar per la respirazione dell'uomo, nella quale hanno fatto invero curiose e minutissime osservazioni, che io stesso volendole provare ho sperimentato esser vere. » E non si potrebbero, invero, descrivere con maggiore esattezza ed obiettività le realizzazioni effettive e le mistificazioni superstiziose, le parti di bianco e di nero dell'ascetismo indiano.

L'altra descrizione, cui voglio qui accennare, è quella della *satî*, di cui il Della Valle fece anche conoscenza personale. *Satî* è il sostantivo femminile del participio presente *sat*, ente, essente, dalla radice *as* del verbo essere: quindi *satî* è quella che è quale deve essere, la sposa leale, buona, virtuosa, fedele, che segue il marito fin nella morte ed oltre, facendosi bruciare sul rogo di lui. Quest'uso fulgidissimo e crudele fu invano combattuto nel Cinquecento da Akbar il Gran Mogol e da Albuquerque, il governatore portoghese di Goa, e fu poi legalmente vietato dagli Inglesi nel 1829; ma qua e là continuò clandestinamente a sopravvivere, specialmente nelle caste nobili. Il fiorentino Nicolò Conti, che fu a Vijayanagar nel 1420, scrisse di aver sentito raccontare che più di duemila delle dodicimila donne del re Deva Raya II furono bruciate intorno al rogo di lui. Ora, con l'indipendenza e la libertà riacquistate dal Hindusthan, l'uso ricomincia palesemente a riaffiorare. L'uso è posteriore al periodo vedico, ma è certamente anteriore all'era volgare: perchè già gli antichi Greci ed i Romani ne avevano contezza. Esso affonda radici millenarie non solo nella tradizione indiana, ma anche nel suolo indoeuropeo. Ne è una prova il sacrificio volontario di Evadne, la sposa di Capaneo, che si lancia nel rogo del cadavere del marito, com'è descritto nelle *Supplici* di Euripide con le parole della traduzione di Romagnoli:

> Nel baglior del rogo
> il corpo al dilettissimo
> consorte unendo in cenere
> scenderò nelle stanze di Persefone.

Similmente la Didone di Virgilio, che si uccide sul rogo, non certo per amor del cener di Sicheo, ma per amore ed odio, *odi et amo*, del fuggitivo Enea, esclamando: *Sic, sic iuvat ire sub umbras*. Così pure avviene nella saga germanica di Siegfried, ricreata da Riccardo Wagner nel *Crepuscolo degli dei*, quando Brünnhilde si lancia col suo cavallo sul rogo dell'eroe, cantando: «Il mio corpo vuol partecipare al più sacro onore dell'eroe... Siegfried...! Siegfried! Vedi! Beata ti saluta la tua donna!» Famosa è la rappresentazione di tale uso, datane da Goethe nel 1797 nella sua stupenda

poesia *Il dio e la bajadera*; nella quale la fanciulla si lancia a braccia aperte nella morte ardente, in cui brucia il dio fattosi uomo, e questo la solleva dalla fiamma e l'innalza al cielo con braccia di fuoco. Il pittore moderno indiano Nanda Lal Bose ha dato della *satî* una bellissima figurazione pittorica, tutta in tonalità rosso ed oro, in cui la donna, avvolta nel *sarî*, con i capelli discinti e a mani giunte, nel gesto di adorazione di *añjali*, ascende sul rogo.

Della *satî*, dunque, scrisse Pietro Della Valle al suo amico Schipano il 22 novembre 1623 da Ikkerì, nel modo seguente: « La sera tornando a casa incontrai per la via dentro la città di Ikkerì una donna che essendole morto il suo marito, voleva bruciarsi e morire con lui, come molte Indiane costumano. Andava perciò passeggiando per tutta la città, a cavallo col viso scoperto, non so se parlando o cantando, in un certo lamentevol tono assai compassionevole a sentire, certe parole che io non intesi non sapendo la lor lingua, ma mi dissero ch'erano come un licenziamento dal mondo e da sè medesima in flebil modo; che certo dette con quell'affetto, che un tal caso poteva partorire, commovevano a condolersi chiunque la sentiva, e fin noi altri che la lingua non intendevamo. Era seguita a piedi da molt'altre donne e uomini forse del suo parentado, ed innanzi le andavan suonando tamburi, il cui suono ella non cessava mai d'accompagnare con quelle sue meste dicerie e cantilene, ma però con faccia tranquilla e costante, senza lagrime, mostrando più dolore della morte del marito che della sua propria, e più desiderio d'andarlo a trovare nell'altro mondo, che doglia per partirsi ella da questo: costume in vero crudele e barbaro, ma con tutto ciò di gran generosità e gran virtù in tali donne, degno però di non poca lode. Dissero che aveva d'andar passeggiando in quella guisa per la città non so quanti giorni, infin de' quali all'ultimo sarebbe andata fuori della città a bruciarsi con maggior accompagnamento e solennità. Se potrò saper quanto sarà non mancherò d'andarla a vedere e d'onorar di presenza il suo funerale, con quel pietoso affetto che a me par che meriti tanta fede ed amor coniugale... Il sedici di novembre mi avevano detto che aveva da morir quella donna, che voleva bruciarsi per la morte del marito; ond'io, per vedere tale spettacolo, andai in cerca della casa della donna, e la trovai fuori dell'interior recinto, in una contrada che si chiama Matarskiné... Vidi la donna nel cortile assisa con persone appresso, vestita tutta di bianco, con molte maniglie, braccialetti ed altri ornamenti d'oro, col capo tutto pieno di fiori, de' quali aveva ancora una ghirlanda, fatta come i raggi di sole, in abito insomma da nozze; e stava di buonissima voglia, ragionando e ridendo in conversazione, come avrebbe fatto nei paesi nostri una sposa... Ebbero gusto quelle genti della mia venuta, ed ella stessa si levò da sedere donde stava e venne in persona a parlarmi, onde ragionammo insieme tutti in piedi buona pezza. Mi disse che si chiamava Giaccamà, che era circa a diciannove giorni che

suo marito era morto, e che aveva lasciato due altre mogli di più età [ella aveva trent'anni in circa, di buon aspetto, alta di statura, e di vita disposta e ben proporzionata], e prese innanzi a lei, delle quali nessuna voleva morire; ed elle stesse, che stavan presenti al ragionamento, adducevan per iscusa, che avevan molti figli. Onde io, valendomi di quell'argomento, dissi a GIACCAMÀ, che m'aveva mostrato un suo piccolo figliuolo di sei o sette anni in circa ed un'altra figliuola, come si poteva indurre a lasciar i suoi figliuoli piccoli, e che ella doveva ancora vivere, per non abbandonarli in quell'età. Mi rispose, che li lasciava ben raccomandati alla cura d'un suo zio, che era ivi presente, e che le altre due mogli del marito, che ancora restavano, ne avrebbero avuto cura... Io le feci diversi argomenti, per distorla dal suo proposito, tuttavia il mio parlare fu invano ed ella mi rispose sempre tutte le ragioni, con faccia non solo intrepidissima e costante, ma anzi allegra, e dicendo in modo, che non mostrava avere di ciò neppure un minimo senso. Mi disse anche, perchè io le domandai, se ciò faceva di sua propria volontà, che stava in sua libertà, e non forzata, nè persuasa da alcuno... e domandando io degli ornamenti e dei fiori nhe portava, mi dissero esser così costume in segno dell'allegrezza della *sati*, come si chiama la donna che si vuol bruciare per la morte del marito, quale volendo andar presto a trovare, è ragion che si rallegri... Mi licenziai da lei assai più mesto della sua morte, ch'ella stessa, maledicendo il costume dell'India, che con le donne è tanto spietato.» Ed è certo questa una delle tante pazzie dell'uman genere, per cui LUCREZIO a ragione in *De rerum natura* II, 14-16, cantava:

> O miseras hominum mentes, o pectora caeca!
> Qualibus in tenebris vitae quantisque periclis
> degitur hoc aevi quodcumquest.

Ed in questo senso appunto ne scrisse VOLTAIRE nel suo romanzo *Zadig* del 1748.

Pochi anni prima che Pietro DELLA VALLE scrivesse la su riportata lettera, nel 1588, MONTAIGNE, prendendo argomento da alcuni versi della XIII del terzo libro delle *Elegie* di PROPERZIO, scriveva, nel capitolo XXIX del secondo libro dei suoi *Essais:* «C'est bien aultre chose des femmes indiennes: car estant leur constume, aux maris d'avoir plusieurs femmes, et à la plus chere d'elles de se tuer aprez son mary, chascune, par le desseing de tonte sa vie, vise à gaigner ce poinct et cet advantage sur ses compaignes; et les bons offices qu'elles rendent à leur mary ne regardent aultre recompense que d'estre preferees à la compaignie de sa mort:

> Felix Eois lex funeris una maritis,
> quos Aurora suis rubra colorat equis.

Namque ubi mortifero iacta est fax ultima lecto,
uxorum fusis stat pia turba comis:
et certamen habent lethi, quae viva sequatur
coniugium: pudor est non licuisse mori.
Ardent victrices, et flammae pectora praebent,
imponuntque suis ora perusta viris. »

Così che l'ammirazione di Properzio e di Montaigne per la *satî* indiana, ad essi nota solo per sentita dire, si accorda con quella, temperata da pietà, di Pietro Della Valle, che la conobbe direttamente di persona. Da ciò e dagli altri pochi cenni, che ho dato, delle descrizioni dell'India, contenute nelle sue lettere, si può desumere con quanta coscienza ed esattezza il Della Valle riferisse quel che aveva visto, e come egli meriti un posto onorevole tra i viaggiatori italiani, che prima di tanti altri hanno fatto conoscere l'Oriente all'Occidente.

Se ora chiediamo, quale risultato il Della Valle abbia tratto per sè dal suo lungo, duodecennale pellegrinare per tante e sì estranie contrade, la risposta ce la dà il suo biografo Pietro Bellori nella *Vita*, da lui premessa all'edizione del 1662, nella quale scrive: « Soleva dire de' costumi degli uomini: che i vizi e le virtù erano in ogni luogo; e che i beni e i mali per tutto si trovano seminati: non avere conosciuto cosa migliore e peggiore dell'uomo: potentissimi essere l'opinione e l'uso: ciascuno professare di sapere, comune essere l'ignoranza: moltissime essere le disgrazie, poche le prosperità: quelle star sempre apparecchiate, queste succedere a noi raramente... Diceva in fine, che tra tante cose che aveva vedute, una sola gli restava da vedere, che aveva cercato invano, in tanti viaggi di tanti anni, in tanti luoghi, nell'umile, nell'alta e nella regia fortuna: e questa era, di non aver mai incontrato un uomo intieramente felice; benchè, al contrario, moltissimi, e senza numero, ne avesse trovati infelicissimi. » E questo ci richiama di nuovo Lucrezio ed il suo *genus infelix humanum*, per il quale *eadem sunt omnia semper*.

Questo richiamo di Lucrezio, *felix qui potuit rerum cognoscere causas*, come lo cantò Virgilio, ci riporta di nuovo all'India ed al suo più grande figlio, il Buddha Sakyamuni, che viene sempre celebrato negli antichi testi come il conoscitore delle cause delle cose: « Di tutte le cose originate da cause il Compiuto dice le cause — e la loro estinzione dice anche il grande Asceta: *yê dhar mâ hêtu têsan hêtum Tathâgata uvâca-têsan ca yô nirôdha êvamvadî mahâsramanah.* » E ciò ci fa ritornare a quel che ho detto, al principio di questo scritto, su La *Vie du Bouddha* di A. Foucher, in cui il grande indianista ha cercato di enucleare dal mito e dalla leggenda la figura storica e reale del Buddha, giungendo in fine a questa conclusione: « L'historien futur qui, à la faveur de l'expérience accrue des faits sociologiques et du progrès des études indiennes, osera prendre sur lui l'écra-

sante responsabilité de rédiger sous sa forme définitive la citation à l'ordre du jour de l'humanité de l'une des plus hautes figures de l'histoire universelle, approchera sans doute de plus près son modèle et ajoutera plus d'un traict caractéristique à ceux que nous avons réunis : il devra en retenir l'essentiel. La façon dont tous ces traicts s'harmonisent spontanément n'a rien qui doive surprendre : avant d'être transfiguré, par l'idolâtrie des ses sectateurs, en moine-dieu, Çâkya-mouni se devait a lui-même d'être de-son vivant le type accompli du moine-gentilhomme. Gentilhomme jusqu'au bout des ongles et pur de tout soupçon de charlatanisme ou de fanatisme ; doué d'une force d'âme incomparable et d'une parfaite sérénité ; moraliste austère, mais sans excès, et secourable aux autres ; libre et judicieux penseur, aussi ennemi des métaphysiques oiseuses que des superstitions vulgaires ; fondateur d'une religion tout imbue, dans sa sacrète désespérance, de l'esprit de miséricorde, le Bouddha Çâkya-mouni a été le premier — le premier du moins dont le monde ait tout lieu de se souvenir — à dénoncer dans l'égoisme du désir la source de la malveillance et de la haine, et à prêcher à ses semblables un infaillible remède à leurs pires misères dans la douceur d'un mutuel amour. » Così che, per conchiudere questa forse troppo lunga tiritera, possiamo dire, che il pellegrino viaggiatore gentiluomo Pietro Della Valle giunse, nella limitata sfera della sua esperienza personale e delle genti da lui conosciute, a quella concezione dell' umana infelicità, che il santo monaco gentiluomo, per usare la definizione di Foucher, il Buddha Sâkyamuni dell' India, aveva, col suo occhio di Svegliato, riconosciuto e proclamato nella nobile verità del dolore del mondo.

Sopra un teschio di *Bos taurus primigenius* Bojanus recentemente rinvenuto a Pignataro Interamna

Nota del socio ordinario **Geremia D' Erasmo**

(Adunanza del dì 4 novembre 1950)

Sunto. — Viene data breve notizia del recente rinvenimento di un teschio di *Bos taurus primigenius* Boj. nel deposito alluvionale di Pignataro Interamna presso Cassino (podere Tiseo), già noto per avere precedentemente fornito altri avanzi di mammiferi quaternari.

Nel podere del sig. Vincenzo Tiseo, fu Saverio, in località Fontanarosa a Pignataro Interamna (Frosinone), a otto chilometri da Cassino, dove già lo scorso anno fu rinvenuto un cranio di *Elephas antiquus italicus* di cui fu data notizia a questa Accademia [1]), è venuto recentemente alla luce un avanzo fossile di cranio di *Bos taurus primigenius* Bojanus. La località è ben nota ai cultori di paleontologia ed è descritta in De Lorenzo e D'Erasmo, 1932 [2]).

Il nuovo avanzo si trova a 62 m. di distanza, in direzione quasi NE (40° di azimut), partendo dal luogo dove fu fatto il precedente rinvenimento di *Elephas*, in un fosso scavato per l'estrazione di sabbia utilizzata a scopo edilizio. Il piano di appoggio del fossile risulta trovarsi a m. 4,50 dal piano di campagna, misurato lungo la parete meridionale del fosso stesso. Esso giace pertanto ad una quota più elevata dei precedenti ritrovamenti. La roccia inglobante è tuttavia sempre la medesima, cioè quell'insieme di sabbie e ghiaiette di natura prevalentemente calcarea e di origine fluviale, derivate in massima parte dal disfacimento delle rocce mesozoiche che costituiscono l'ossatura dei monti vicini. Localmente si trova la seguente successione a cominciare dall'alto: m. 1 di terreno vegetale; m. 1 di sabbia e ghiaietta con listerelle torbose; m. 0,80 di sabbia fina giallastra; m. 1 di sabbia grossolana; m. 0,70 di sabbia fina. Il fossile poggia su di un fondo argilloso.

Il cranio, del quale manca tutta la porzione facciale, si trova con la sua base rivolta verso l'alto ed appoggia sulla superficie posteriore delle

---

[1]) D'Erasmo G. *Nuovi rinvenimenti di pachidermi quaternari nella valle del Liri.* Rend. Acc. Sc. fis. e mat., s. 4ª, vol. XVI, pag. 160. Napoli, 1949.

[2]) De Lorenzo G. e D'Erasmo G. *L'uomo paleolitico e l'Elephas antiquus nell'Italia meridionale.* Atti R. Acc. Sc. fis. e mat., s. 2ª, vol. XIX, n. 5, pag. 38. Napoli, 1932.

corna. Esso è disposto su di un piano quasi orizzontale, appena inclinato, in modo che il cornò sinistro si trova ad un livello lievemente inferiore a quello destro. Si tratta quindi, anche in questo caso, di un avanzo in giacitura secondaria, ciò che è confermato dal fatto che finora nelle immediate vicinanze non vi sono altri residui fossili, e che il cranio, incompleto, è sprovvisto della mandibola. La posizione di rinvenimento è quella di equilibrio più stabile per un cranio del genere: infatti, all'atto della fossilizzazione esso doveva trovarsi con i condili e l'estremità delle corna poggiati a terra, posizione che consente il più ampio poligono di appoggio, e con la porzione facciale, ormai distrutta, rivolta verso l'alto.

Dato che si è proceduto soltanto alla ricognizione sul posto dell'avanzo in questione, non è possibile darne per ora una compiuta descrizione, ciò che si spera di poter fare dopo il consolidamento, l'isolamento e il probabile acquisto del fossile per le collezioni del Museo Paleontologico di Napoli. Tuttavia da questo primo esame si rileva che sono perfettamente conservate le due corna, le quali non presentano fratture di sorta. In special modo il corno destro, che si trova inglobato nella sabbia argillosa, è ben visibile, mentre quello sinistro è per buona parte incluso nella sabbia grossolana cementata, per cui si richiede un isolamento accurato.

La regione del frontale interposta tra le corna è perfettamente conservata e si estende verso l'innanzi fino al limite delle orbite, di cui rimane parte della volta. È allo scoperto porzione dei seni frontali, riempiti di ghiaietta. Sono visibili chiaramente le due fosse condiloidee per l'articolazione della mandibola. I condili occipitali, se conservati, si trovano ancora inglobati nella sabbia.

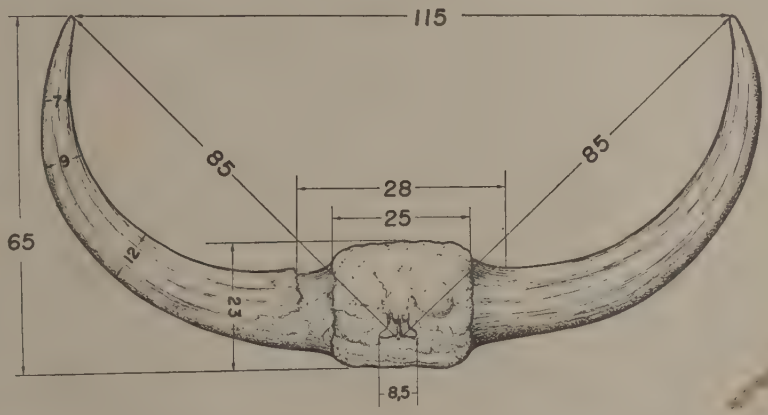
Si riportano alcuni diametri che daranno l'idea delle dimensioni del fossile (v. lo schizzo dimostrativo alla pagina seguente):

Larghezza del cranio al margine superiore delle orbite . .	cm.	25
Spessore del cranio all'altezza dei margini sup. delle orbite .	»	23
Diametro alla base del corno destro (caviglia cornigera) . .	»	17
Diametro a circa metà lungh. del corno destro	»	12
Diametro a circa $^2/_3$ distali » » » . . .	»	9
Diametro a circa $^6/_7$ » » » » . . .	»	7
Lunghezza del corno destro misurata lungo l'arco interno dalla caviglia cornigera all'apice.	»	73
Lunghezza c. s., misurata lungo l'arco esterno	»	90
Distanza delle estremità distali delle due corna . . .	»	115
Distanza dalla caviglia cornigera al piano di frattura del cranio	»	17

Tali dimensioni — concordemente con l'aspetto e l'estensione della regione frontale, e con gli altri pochi caratteri osteologici che si sono potuti rilevare nell'esame sommario del fossile compiuto sul posto — dimostrano che ci troviamo innanzi ad un rappresentante di *Bos primigenius* Bojanus

(= *Bos urus* o *Urus priscus* o Uro), ritenuto dalla maggior parte degli autori come specificamente identico al nostro *Bos taurus* L. attuale, di cui costituirebbe, secondo l'opinione più accreditata, la razza selvatica ancestrale, distinta soltanto per le maggiori dimensioni e per i caratteri di più considerevole robustezza.

Il Bue primitivo o Uro, come è noto, si accompagna frequentemente a *Elephas antiquus italicus* Osborn, *Hippopotamus amphibius* Linn., *Rhinoceros Mercki* Kaup, *Cervus elaphus* Linn. ecc., nella maggior parte dei giacimenti pleistocenici delle principali valli appenniniche, ed è largamente



diffuso tanto in Europa (Spagna, Francia, Belgio, Svizzera, Germania, ecc.), quanto in Asia e in parecchie regioni dell'Africa settentrionale. Esso era stato, del resto, già segnalato nella stessa località di Pignataro Interamna da De Lorenzo e D'Erasmo, in base ad un altro frammento di teschio con caviglie cornee, di minori dimensioni, e a più scarsi avanzi dello scheletro e della dentatura [1]).

Parlando delle dimensioni raggiunte dal *Bos primigenius*, che definisce « une superbe créature, beaucoup plus grande que les plus beaux Taureaux actuels », Marcellin Boule cita esemplari del Museo di Paleontologia di Parigi con corna che raggiungono lungo l'asse osseo cm. 85 di sviluppo, ed un frammento di corno di altra collezione proveniente dalla grotta Barma Grande (Grimaldi, presso Mentone) che misura alla base un diametro di cm. 13,5 [2]). E, tacendo di numerosi altri autori che descrissero pure rappresentanti di considerevole statura della medesima specie, basterà qui ricordare, fra i maggiori esemplari di Uro conosciuti nel Pleistocene italiano, i teschi di Montalto di Castro e di Prato Fiscale in provincia di

---

[1]) De Lorenzo G. e D'Erasmo G. *L'uomo paleolitico* etc. Loc. cit. 1932, pag. 57, fig. 16.

[2]) Boule M. *Les grottes de Grimaldi*, tomo I, fasc. 3°, pag. 234. Monaco, 1910.

Roma, descritti dal Portis [1]), misuranti rispettivamente cm. 109 e 102 di distanza tra gli apici delle corna, cm. 120 e 99 nella lunghezza della caviglia cornigera secondo la curva esterna, e cm. 14,5 e 16,5 nel diametro basale massimo di dette caviglie.

Il nuovo esemplare di Pignataro Interamna, avendo dimensioni alquanto superiori a quelle testè citate, può considerarsi come uno degl' individui di maggiore statura del Bue primitivo, essendo sorpassato solo da pochi altri, veramente giganteschi, fra cui, p. es., quello di Athol nella Scozia descritto da Owen [2]) e conservato nel British Museum, e l' altro scavato nel 1772 presso Roma e descritto da Jaquier, che più tardi è andato perduto [3]).

Desidero infine informare l'Accademia che l' importante esemplare di *Elephas antiquus italicus*, scoperto nel 1949 a Pignataro Interamna e consistente nel cranio di un individuo assai giovane, del quale ho dato breve notizia nella citata nota preliminare, è stato definitivamente acquisito alle collezioni dello Stato. Raggiunto, dopo lunghe e laboriose trattative, un accordo col sig. Vincenzo Tiseo, proprietario del fondo e scopritore del fossile, fu possibile procedere con ogni cura allo scavo e all'isolamento di esso, al rafforzamento sul posto con ripetute spalmature di silicato sodico, ad uno speciale imballaggio e al successivo trasporto a Napoli; sicchè l'esemplare è pervenuto senza danneggiamenti in questo Museo di Paleontologia, dove subirà ora gli ulteriori lavori, necessariamente lenti e difficili, di restauro e di montatura, e sarà oggetto di studio e di confronto, potendo considerarsi — secondo quando è lecito prevedere fin da ora — uno dei più interessanti rappresentanti di *Elephas antiquus italicus* Osborn. Infatti, questa razza elefantina, che pur ha offerto avanzi molteplici di denti e di ossa, rivelando una larga diffusione, durante il Quaternario antico e medio, in tutte le vallate fluviali dell'Appennino ed è nota altresì per resti importanti del teschio, non ne aveva ancora fornito alcuno, che presentasse ben conservate la regione posteriore e quella basale del cranio, rimaste perciò finora assai incompletamente conosciute.

La memoria illustrativa delle nuove ricchezze paleontologiche della valle del Liri sarà, a suo tempo, presentata a questa Accademia, che già si piacque accogliere nei propri Atti le precedenti illustrazioni dei mammiferi quaternari del mezzogiorno d' Italia. *Hoc est in votis.*

Napoli, Istituto geo-paleontologico dell' Università, 3 Novembre 1950.

---

[1]) Portis A. *Di alcuni avanzi fossili di grandi ruminanti, principalmente della prov. di Roma.* Palaeont. italica, vol. XIII, pag. 142 e 152. Pisa, 1907.

[2]) Owen R. *History of british fossil mammals and birds*, pag. 438, fig. 208, e pag. 501. Londra, 1846.

[3]) Vedi, per la storia del rinvenimento, le principali dimensioni e le vicende di questo esemplare: Portis A. *Loc. cit.* 1907, pag. 155.

Sulla caduta di spinta per sforzo normale negli archi sottili ribassati

Nota del dott. **Vincenzo Franciosi**, *presentata dal socio corr.* **A. Galli**

(Adunanza del dì 4 novembre 1950)

Sunto. — Si prende in esame il caso di un arco parabolico a due cerniere soggetto ad un carico uniforme g, alle reazioni H_g e a due forze H, uguali e contrarie, alle imposte. Utilizzando l'equazione del Krall per le aste presso-inflesse, ottenuta attraverso la funzione di Green degli abbassamenti per forze verticali, si ricavano le espressioni delle deformazioni $\eta(x)$ e dell'avvicinamento Δ delle cerniere di imposta. Si fornisce infine l'espressione della caduta di spinta, calcolata tenendo conto delle sollecitazioni indotte dagli abbassamenti.

1) Premesse. — È noto che i maggiori sforzi dei costruttori di ponti sono diretti a raccostare quanto più è possibile la funicolare dei carichi permanenti all'asse geometrico della struttura, onde avvicinarsi al massimo alla condizione ideale di sezioni uniformemente compresse. Tale scopo, che parrebbe raggiunto con l'assegnare all'asse dell'arco un profilo coincidente con la funicolare dei carichi permanenti, è però frustrato dalle deformazioni assiali per sforzo normale, che inducono una caduta di spinta H_c rispetto alla H_g, componente orizzontale delle forze estreme della funicolare dei carichi.

Il problema è di interesse attuale, atteso il diffondersi degli archi ribassati, dove più forte è la caduta H_c. In genere per gli archi sottili la H_c è molto esigua [1]; ma, se l'arco è anche ribassato, è necessario non trascurarla. In quest'ultimo caso, però, è opportuno calcolare la H_c tenendo

---

[1]) Si ricordi (ved. ad es. O. Belluzzi, vol. II, pag. 162) che la spinta complessiva in un arco parabolico di luce l, freccia f, carico uniforme g, è data da

$$H \sim \frac{gl}{8f}\left(1 - \frac{15}{8}\,\frac{\rho^2}{f^2}\right)$$

dove si suppone che, essendo $A_{\frac{l}{2}}$ ed $I_{\frac{l}{2}}$ i valori dell'area e del momento d'inerzia della sezione in mezzeria, sia $A_x = A_{\frac{l}{2}} / \cos\vartheta$, $I_x = I_{\frac{l}{2}} / \cos\vartheta$ (con ϑ angolo formato dalla tangente all'asse nella sezione con l'orizzontale). È inoltre $I_x/A_x = \rho^2$.

La quantità $gl^2/8f$ è la spinta H_g, e $-\frac{gl^2}{8f}\,\frac{15\rho^2}{8f^2}$ è la caduta di spinta H_c.

conto delle sollecitazioni indotte dagli spostamenti, e cioè secondo la teoria del II ordine: si vedrà che il valore che così si ottiene è più basso di quello che deriverebbe dal calcolo eseguito secondo la teoria del I ordine.

Le ipotesi che si faranno in seguito sono le seguenti:

a) profilo dell'asse dell'arco parabolico, di luce l e freccia f;

b) cerniere alle imposte;

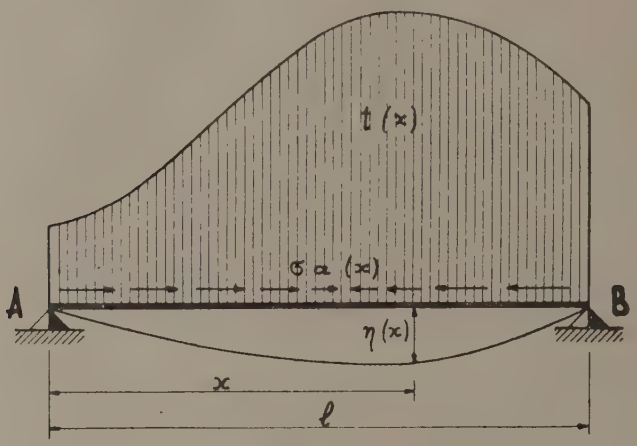


Fig. 1

c) carico g uniformemente distribuito;

d) prodotto $E I_x \cos \vartheta_x$ costante ed uguale a k; E, I_x e ϑ_x hanno i significati noti.

La via che si seguirà è quella maestra delle equazioni integrali secondo Fredholm già additata dal Krall ([1] pag. 371) per lo studio delle aste sottili soggette a condizioni qualunque di carico assiale e trasversale.

2) Introduzione dell'algoritmo. — Si richiamano dal Krall alcune nozioni, sulle quali poggeremo il nostro studio. Sia l'asta $A\,B$ (fig. 1) soggetta ad un sistema di carichi trasversali $t(x)$ e assiali $\sigma\, a\,(x)$, dove σ è una costante. Sia inoltre $G\,(x, x')$ la funzione di Green dell'abbassamento all'ascissa x provocato da un carico verticale unitario agente all'ascissa x'. L'abbassamento $\eta_t\,(x)$ dovuto ai carichi trasversali, in corrispondenza dell'ascissa x, è allora dato da

$$\eta_t\,(x) = \int_0^l G\,(x, x')\; t\,(x')\; dx' \tag{1}$$

Si ricordi ([2] pag. 361) che la derivata

$$\frac{\partial\, G\,(x, x')}{\partial\, x'} \tag{2}$$

e la funzione di Green dell'abbassamento all'ascissa x provocato da una coppia positiva unitaria agente all'ascissa x'; e si osservi inoltre che, passando dalla ascissa x' alla $x' + dx'$, l'ordinata $\eta(x')$ varia di

$$\frac{d\eta}{dx'}\,dx'$$

e cioè il momento flettente si incrementa della quantità

$$\sigma \cdot a(x') \cdot \frac{d\eta}{dx'}\,dx'$$

che può essere riguardata come una coppia applicata all'ascissa x'.

L'abbassamento $\eta_a(x)$ all'ascissa x, dovuto ai carichi assiali $\sigma \cdot a(x)$, è quindi espresso da

$$\eta_a(x) = \sigma \int_0^l \frac{\partial G(x, x')}{\partial x'}\, a(x') \frac{d\eta}{dx'}\,dx' \tag{3}$$

In complesso è quindi

$$\eta(x) = \int_0^l G(x, x')\, t(x')\,dx' + \sigma \int_0^l \frac{\partial G(x, x')}{\partial x'}\, a(x') \frac{d\eta}{dx'}\,dx' \tag{4}$$

Si introduca al posto di $\eta(x)$ l'altra funzione incognita $\varphi(x)$, legata alla $\eta(x)$ dalla relazione

$$\varphi(x) = \frac{d\eta}{dx} \tag{5}$$

e cioè la funzione « rotazione ». Derivando la (4) rispetto ad x si ottiene

$$\frac{d\eta}{dx} = \int_0^l \frac{\partial G(x, x')}{\partial x}\, t(x')\,dx' + \sigma \int_0^l \frac{\partial^2 G(x, x')}{\partial x\, \partial x'}\, a(x') \frac{d\eta}{dx'}\,dx'$$

e cioè ancora

$$\varphi(x) = h(x) + \sigma \int_0^l N(x, x')\, a(x')\, \varphi(x')\,dx' \tag{6}$$

dove $N(x,x')$, funzione di Green della rotazione in x per una coppia unitaria in x' ([2] pag. 361), è simmetrica rispetto alla coppia di variabili x ed x'.

La (6) è un'equazione integrale di Fredholm di II specie non omogenea nell'incognita funzione $\varphi(x)$, di nucleo $N(x,x')\ a(x')$.

3) Il caso della trave ad arco. — Si consideri un arco soggetto alle estremità a due forze H (fig 2) uguali e contrarie e dirette verso l'esterno.

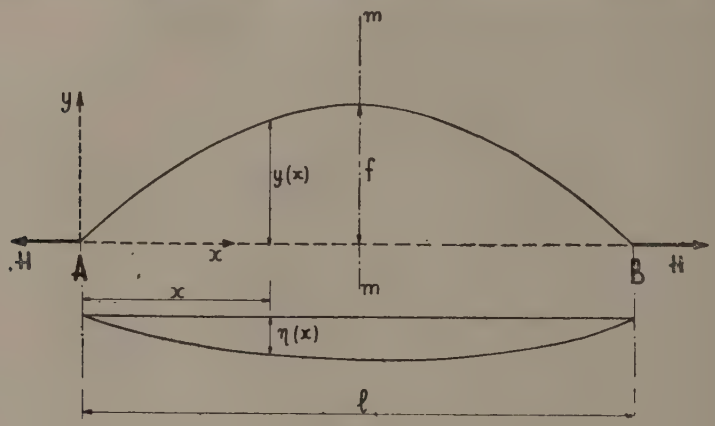


Fig. 2

In questo caso è

$$\sigma \ . \ a(x) = \text{cost} = - H$$

e il termine (3) si scrive

$$\eta_a(x) = - H \int_0^l \frac{\partial G(x,x')}{\partial x'} \frac{d\eta}{dx'} \, dx' \tag{7}$$

essendo le $\eta(x)$ positive se dirette verso il basso. È stato posto il segno — davanti all'integrale perchè, essendo le η positive verso il basso, un loro aumento induce, per il segno delle H, un incremento di momento negativo. D'altro canto il carico $t(x)$ è nullo; non va però a zero il termine (1). per la presenza della H che è nello stesso tempo assiale e trasversale. La $\eta_t(x)$ può quindi porsi sotto forma analoga alla (7); e infatti, poichè passando dall'ascissa x' alla $x' + dx'$ la $y(x')$ si incrementa di

$$\frac{dy}{dx'} \, dx'$$

il momento $+H.y(x)$ indotto dalle H si incrementa della quantità

$$H \frac{dy}{dx'} \, dx'$$

da considerarsi come coppia applicata; può quindi porsi

$$\eta_1(x) = H \int_0^l \frac{\partial G(x, x')}{\partial x'} \frac{dy}{dx'} dx' \tag{8}$$

E quindi

$$\eta(x) = H \int_0^l \frac{\partial G(x, x')}{\partial x'} \frac{dy}{dx'} dx' - H \int_0^l \frac{\partial G(x, x')}{\partial x'} \frac{d\eta}{dx'} dx'$$

e ancora

$$\varphi(x) = f(x) - H \int_0^l N(x, x') \varphi(x') dx' \tag{9}$$

Anche la (9) è un'equazione di Fredholm di II specie non omogenea nella $\varphi(x)$, a nucleo $N(x, x')$ simmetrico.

La spinta H_c nella teoria del I ordine si calcola svincolando l'arco alle imposte e sostituendo due carrelli alle cerniere, caricando l'arco con

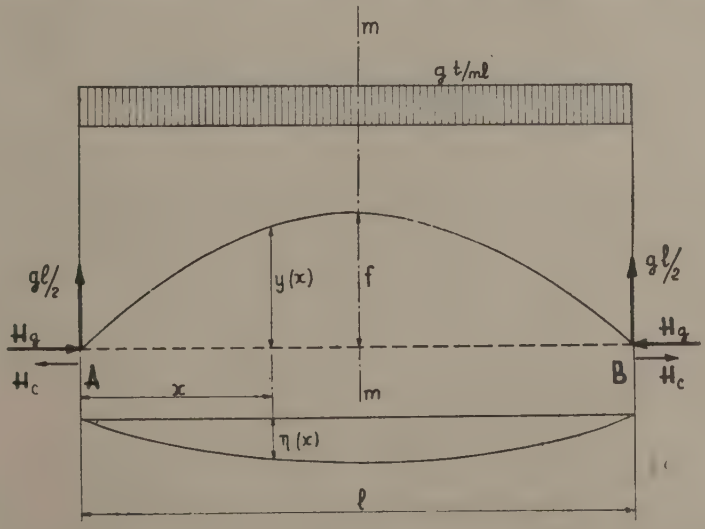


Fig. 3

il peso g uniformemente ripartito e con due forze orizzontali uguali ad, $H_g = \frac{g l^2}{8 f}$ alle imposte, calcolando l'avvicinamento Δ_c delle estremità e quindi le due forze H_c uguali e contrarie capaci di annullare Δ_c. Nella teoria del I ordine non ha importanza, agli effetti del calcolo di H_c che i carichi g siano già applicati o meno durante l'azione della H_c; se invece il calcolo della H_c si esegue secondo la teoria del II ordine occorre tener conto che la H_c agisce in presenza dei carichi g e della H_g. La forza

assiale è allora pari (fig. 3) ad $H_c - H_g$, e la forza trasversale è H_c, giacchè H_g genera momenti uguali e contrari a quelli di g:

$$H_g \frac{4f}{l^2} x(l-x) = \frac{g}{2} x(l-x) \ . \ (*)$$

(*) A rigore, poichè lo sforzo normale è dato da

$$N_x = H_g / \cos \vartheta_x$$

se l'area A_x della sezione retta all'ascissa x è data per es. dall'espressione (fig. 4)

$$A_x = A_{\frac{l}{2}} / \cos \vartheta_x$$

(altezza dell'arco costante) l'accorciamento di ogni elemento ds è dato da

$$\frac{N_x ds}{A_x E} = \frac{H_g ds}{A_{\frac{l}{2}} \cdot E} = \text{cost.} \times ds$$

L'asse dell'arco, dopo la deformazione, è simile all'asse dell'arco indeformato, e

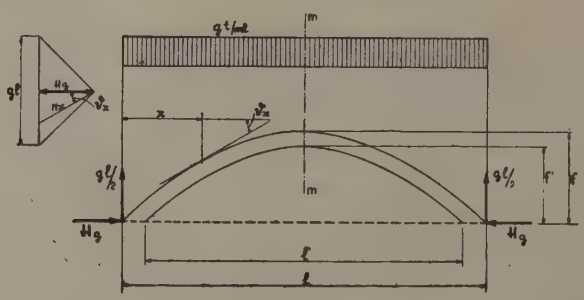


Fig. 4

cioè ancora parabolico, con freccia f' e luce l' ridotte; è cioè

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x) \quad ; \quad y' = \frac{4f'}{l'^2} x(l'-x)$$

Per ottenere quindi ancora una funicolare del carico centrata, occorrerebbe ridurre la spinta da H_g a

$$H'_g = \frac{gl'^2}{8f'}$$

e cioè sottrarre una spinta pari a

$$H_s = H_g - H'_g = \frac{g}{8} \frac{l}{f} (l - l')$$

La H_s sta quindi alla H_g nel rapporto di $l - l'$ ad l, cioè in genere del $0{,}05 \div 0{,}1\ \%$ e può quindi trascurarsi.

La (9) si scrive quindi, per una H generica,

$$(10) \qquad \varphi(x) = H \int_0^l N(x, x') \frac{dy}{dx'} dx' + (H_g - H) \int_0^l N(x, x') \varphi(x') dx'$$

e ancora

$$(11) \qquad \varphi(x) = f(x) + (H_g - H) \int_0^l N(x, x') \varphi(x') dx'$$

La funzione $G(x, x')$ è fornita, per trave semplicemente appoggiata, da ([3] pag. 404)

$$(12) \qquad G(x, x') = \frac{l^3}{6EI} \gamma(\xi, \xi')$$

dove

$$\gamma(\xi, \xi') = \begin{cases} (1 - \xi') [(2\xi' - \xi'^2) \xi - \xi^3] & \text{per } \xi \leq \xi' \\ (1 - \xi) [(2\xi - \xi^2) \xi' - \xi'^3] & \text{per } \xi \geq \xi' \end{cases}$$

essendo $\xi = x/l$ e $\xi' = x'/l$ numeri compresi tra zero ed uno. Nel caso in esame vale la stessa funzione, purchè al posto di EI si ponga $EI_x \cos \vartheta_x = K$. Il nucleo $N(x, x')$ è quindi espresso da

$$(13) \qquad N(x, x') = \frac{l}{6K} \nu(\xi, \xi')$$

dove

$$\nu(\xi, \xi') = \begin{cases} 3\xi^3 + 3\xi'^2 - 6\xi' + 2 & \text{per } \xi \leq \xi' \\ 3\xi'^3 + 3\xi^2 - 6\xi + 2 & \text{per } \xi \geq \xi' \end{cases}$$

La derivata $\frac{dy}{dx'}$ è data da

$$\frac{dy}{dx'} = \frac{4f}{l^2} (l - 2x')$$

e, in funzione di ξ', da

$$\frac{dy}{d\xi'} = 4f(1 - 2\xi')$$

La funzione $f(x)$ della (11) è quindi

$$f(x) = H \int_0^l N(x, x') \frac{dy}{dx'} dx' = H \int_0^1 N(\xi, \xi') \frac{dy}{d\xi'} d\xi' =$$

(14)

$$= \frac{2}{3} \frac{f l H}{K} \int_0^1 \nu(\xi, \xi')(1 - 2\xi') d\xi' = \frac{2}{3} \frac{f l H}{K} \left(2\xi^3 - 3\xi^2 + \frac{1}{2}\right)$$

Si cominci con il ricercare le soluzioni dell'omogenea associata alla (11), e cioè della

$$\varphi(x) = (H_g - H) \int_0^l N(x, x') \varphi(x') dx' \tag{15}$$

La (15) è a nucleo simmetrico; i suoi autovalori, la cui esistenza è, per quanto sopra, assicurata, coincidono con i carichi assiali che rendono instabile l'equilibrio di una trave appoggiata; e cioè il loro intero spettro discreto è fornito, per $\rho = 1,2, \ldots \infty$, dalla

$$\sigma_\rho = \rho^2 \pi^2 \frac{K}{l^2} \tag{16}$$

e le corrispondenti autofunzioni, normalizzate, da

$$\varphi_\rho = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{\rho \pi x}{l} \tag{17}$$

La soluzione della (11) si può, con Hilbert-Schmidt, porre in funzione delle soluzioni (17) della (15) nella forma

$$\varphi(x) = \sum_{\rho=1,2}^{\infty} A_\rho \varphi_\rho$$

con

$$A_\rho = \frac{f_\rho}{1 - \dfrac{H_g - H}{\sigma_\rho}}$$

dove, per ρ dispari,

$$f_\rho = \int_0^l f(x)\,\varphi_\rho(x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f(x) \cos\frac{\rho\pi x}{l}\,dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{l}}\; l \int_0^1 f(\xi) \cos\rho\pi\xi\,d\xi = \sqrt{\frac{2}{l}}\; 16\,\frac{f\,l^2 H}{K\rho^4\pi^4}$$

e, per ρ pari, attesa la natura della $f(x)$,

$$f_\rho = 0$$

E cioè

$$A_\rho = \sqrt{\frac{2}{l}}\,\frac{16\,f\,l^2 H}{K\rho^4\pi^4\left(1 - \dfrac{(H_g - H)\,l^2}{\rho^2\pi^2 K}\right)}$$

e

$$\varphi(x) = \sum_{1,3}^{\infty} \frac{32\,f\,l\,H}{K\rho^4\pi^4\left(1 - \dfrac{(H_g - H)\,l^2}{\rho^2\pi^2 K}\right)} \cos\frac{\rho\pi x}{l} =$$

(18)

$$= \sum_{1,3}^{\infty} \frac{32\,f\,H}{\rho^3\pi^2 l\left(\dfrac{\pi^2\rho^2 K}{l^2} + H - H_g\right)} \cos\frac{\rho\pi x}{l}$$

Per la (5), infine, è

$$\eta(x) = \sum_{1,3}^{\infty} \frac{32\,f\,H}{\rho^3\pi^3\left(\dfrac{\pi^2\rho^2 K}{l^2} + H - H_g\right)} \operatorname{sen}\frac{\rho\pi x}{l} = \sum_{1,3}^{\infty} \eta_\rho \operatorname{sen}\frac{\rho\pi x}{l}\,. \tag{19}$$

4) Il calcolo dello spostamento relativo Δ delle imposte. — Sia $D(x')$ la funzione d'influenza dello spostamento relativo Δ delle due cerniere di imposta A e B (fig. 3) per una forza verticale unitaria agente all'ascissa x', e ricavata secondo la teoria del I ordine; sarà pure

$$\frac{dD}{dx'}$$

la funzione di influenza dello spostamento Δ per una coppia unitaria positiva agente alla stessa ascissa. La $D(x')$ sia positiva se le imposte si

allontanano. Si può così porre, in modo analogo a quanto già fatto per la $\eta(x)$, ed assumendo Δ positivo se le imposte si allontanano,

$$(20) \qquad \Delta = H\int_0^l \frac{d\,D(x')}{dx'}\,\frac{dy}{dx'}\,dx' - (H-H_g)\int_0^l \frac{d\,D(x')}{dx'}\,\frac{d\eta}{dx'}\,dx'$$

Anche qui il segno — davanti al secondo integrale si giustifica come quello della form. (7).

La funzione $D(x')$ si ricava applicando il principio dei lavori virtuali al sistema (a) di deformazioni $\delta(x)$ provocato sull'arco (vincolato con carrelli alle imposte) dalla forza verticale unitaria agente all'ascissa x', e definito dalle (12), ed al sistema (b) di forze in equilibrio costituito dal carico uniforme g e da due forze uguali e contrarie $H_g = g\,l^2/8\,f$ in corrispondenza dei carrelli. Lo sforzo normale si trascura, dipendentemente dal fatto che nella condizione di carico (a) l'effetto flettente e di gran lunga superiore a quello delle componenti assiali; poichè quindi nel sistema (b) i momenti flettenti sono nulli, come si è fatto notare, si ottiene

$$H_g \cdot D(x') - g\int_0^l \delta(x, x')\,dx = 0$$

e cioè ancora

$$D(x') = \frac{8\,f}{l^2}\int_0^l G(x, x')\,dx =$$

$$(21) \quad = \frac{4}{3}\,\frac{l^2 f}{K}\left[\int_0^{\xi'}(1-\xi')\,[(2\xi'-\xi'^2)\xi-\xi^3]\,d\xi + \int_{\xi'}^1 (1-\xi)\,[(2\xi-\xi^3)\xi'-\xi'^3]\,d\xi\right] =$$

$$= \frac{4}{3}\,\frac{f\,l^2}{K}\left(\frac{\xi'^4}{4} - \frac{\xi'^3}{2} + \frac{\xi'}{4}\right) = \frac{f\,l^2}{3\,K}\,(\xi' - 2\xi'^3 + \xi'^4)$$

L'ultima espressione della $D(x')$ coincide con quella riportata dal Beyer (Die Statik im Stahlbetonbau. Springer. Berlin. 1948 pag. 515). Il primo termine Δ_1 del secondo membro della (20) può quindi porsi

$$\Delta_1 = H\int_0^l \frac{d\,D(x')}{dx'}\,\frac{dy}{dx'}\,dx' = \frac{H}{l}\int_0^l \frac{d\,D(\xi')}{d\xi'}\,\frac{dy}{d\xi'}\,d\xi' =$$

$$(22) \qquad = \frac{16\,f^2 H\,l}{3\,K}\int_0^1 \left(\xi'^3 - \frac{3}{2}\,\xi'^2 + \frac{1}{4}\right)(1-2\xi')\,d\xi' =$$

$$= \frac{16}{3}\,\frac{f^2 H\,l}{K}\,\frac{1}{10} = \frac{8}{15}\,\frac{H f^2 l}{K}$$

Esso è lo spostamento relativo tra le imposte provocato nell'arco scarico da due forze orizzontali H uguali e contrarie, calcolato trascurando le sollecitazioni supplementari derivanti dalle deformazioni (Beyer. op. cit. pag. 515). Il secondo termine Δ_2 della (20) può a sua volta scriversi

$$\Delta_2 = (H_g - H) \int_0^l \frac{d\,D(x')}{dx'} \frac{d\eta}{dx'} dx' =$$

$$= (H_g - H) \frac{4 f l \pi}{3 K} \int_0^1 \left(\xi'^3 - \frac{3}{2} \xi'^2 + \frac{1}{4} \right) \sum_{1,3}^{\infty} n \eta_n \cos n \pi \xi' d\xi' \tag{23}$$

$$\frac{4}{3} (H_g - H) \frac{f l \pi}{K} \sum_{1,3}^{\infty} n \eta_n \int_0^1 \left(\xi'^3 - \frac{3}{2} \xi'^2 + \frac{1}{4} \right) \cos n \pi \xi' d\xi' -$$

$$= \frac{4}{3} (H_g - H) \frac{f l \pi}{K} \sum_{1,3}^{\infty} n \eta_n \frac{12}{n^4 \pi^4} \quad 16 (H_g - H) \frac{f l}{K \pi^3} \sum_{1,3}^{\infty} \frac{\eta_n}{n^3}$$

In definitiva è

$$\Delta = \frac{8}{15} \frac{H f^2 l}{K} + 16 (H_g - H) \frac{f l}{K \pi^3} \sum_{1,3}^{\infty} \frac{\eta_n}{n^3} \tag{24}$$

e, trascurando i termini η_n superiori al primo, si ottiene

$$\Delta = \frac{8}{15} \frac{H f^2 l}{K} + \frac{512 H (H_g - H) f^2 l}{K \pi^6 \left(\frac{\pi^2}{l^2} K + H - H_g \right)} \tag{25}$$

Per tener conto anche dell'effetto di sforzo normale occorre a Δ aggiungere il termine Δ_N pari, se la A_x varia con la legge $A_x = A_{\frac{l}{2}} / \cos \vartheta$, a

$$\Delta_N = \int_0^l \frac{N_x dx}{E A_x} = \frac{H}{E A_{\frac{l}{2}}} \int_0^l \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 dx \cong \frac{H l}{E A_{\frac{l}{2}}} \left(1 - \frac{16 f_l^2}{3 l^2} \right)$$

che, per archi ribassati, può, con buona approssimazione, scriversi

$$\Delta_N = \frac{H l}{E A_{\frac{l}{2}}}$$

5) Calcolo della spinta addizionale H_c dovuta alle deformazioni di sforzo normale. — Per ricercare la spinta addizionale H_c dovuta alle deformazioni per sforzo normale, si pensi di sostituire le cerniere delle im-

poste con carrelli, e poi di caricare l'arco con il peso g uniforme e le due forze $H_g = gl^2/8f$ in corrispondenza dei carrelli. Questi ultimi si avvicinano della quantità

$$\Delta_c = \frac{H_g}{E} \int_s \frac{ds}{A_x}$$

e poichè $ds = dx/\cos \vartheta_x$, è

$$\Delta_c = \frac{H_g}{E} \int_0 \frac{dx}{A_x \cos \vartheta_x}$$

Le due forze H_c che, applicate alle imposte, annullano Δ_c, esprimono la caduta di spinta; il loro calcolo deve essere eseguito secondo la teoria del II ordine, e tenendo conto della presenza del peso proprio g. Dalla (25) può ottenersi l'equazione in H_c

$$0{,}0114\, H_c^2 + \left[-15 \frac{\Delta_c K}{f^2 l} + 7.988\, H_g + 8 \left(\frac{K\pi^2}{l^2} - H_g \right) \right] H_c - \tag{26}$$
$$- 15 \frac{\Delta_c K}{f^2 l} \left(\frac{\pi^2}{l^2} K - H_g \right) = 0$$

Il coefficiente di H_c è sicuramente positivo, il discriminante anche, quindi le radici sono reali, distinte e di segno opposto. Si osserva, dalla (26), che, in condizioni di instabilità, si annulla il termine noto, e l'equazione ammette la radice $H_c = 0$: questo è fisicamente spiegabile, poichè in tali condizioni è sufficiente una forza piccolissima a produrre qualsiasi deformazione. In relazione a ciò, delle due radici che entrano nella espressione di H_c è da scegliersi quella positiva.

Si consideri, per es. un arco parabolico a due cerniere delle seguenti caratteristiche

$l = 50\ m$
$f = 5\ m$
$K = 300.000\ t\,m^2$
$H_g = 300\ tonn.$
$E = 2{,}5 \times 10^6\ t/m^2$
$A_{\frac{l}{2}} = 2{,}7\ m^2$

L'area vari con la legge $A_x = A_{\frac{l}{2}}/\cos \vartheta_x$, e cioè in modo che l'altezza della sezione resti costante. È così

$$\Delta_c = \frac{H_g\, l}{E\, A_{\frac{l}{2}}} = 0{,}00222\ m$$

Secondo la teoria del I ordine è

$$H_c = \frac{15}{8} \frac{\Delta_c K}{f^2 l} = 1 \ tonn.$$

Dalla (25) invece risulta

$$0{,}0114 \ H_c^2 + 9462{,}827 \ H_c - 7067{,}166 = 0$$

da cui

$$H_c = 0{,}745 \ tonn$$

Con questo valore di H_c si ottiene

$$\Delta_1 = 0{,}001665 \ m \quad ; \quad \Delta_2 = 0{,}000555 \ m$$
$$\Delta_c = \Delta_1 + \Delta_2 = 0{,}00222 \ m$$

Si osserva, da quanto sopra, che, nel caso preso in esame, la caduta di spinta, calcolata con la teoria del II ordine, è del 25,5 % più bassa di quella calcolata con la teoria del I ordine.

Poichè H_c e in genere molto più piccolo di H_g (0,5 ÷ 1 %) può porsi, senza eccessivo errore,

$$H_g - H_c \cong H_g$$

Dalle (25) si ha allora

$$(27) \qquad H_c = \frac{\Delta_c}{\frac{8}{15} \frac{f^2 l}{K} + \frac{512 \ H_g f^2 l}{K \pi^6 \left(\frac{\pi^2}{l^2} K - H_g \right)}}$$

che, nel caso in esame, porge

$$H_c = \frac{0{,}00222}{0{,}00222 + 0{,}00075} = 0{,}754 \ tonn$$

con un errore dell' 1,07 %. Il termine $\frac{\Delta_N}{H_c} = \frac{l}{E A_{\frac{1}{2}}}$ è pari a $0{,}0000056 \ ml^{-1}$ del tutto trascurabile.

Napoli, Istituto di Scienza delle costruzioni, Settembre 1950.

---

[1] Giulio Krall, *Statica dei mezzi elastici viscosi e sue applicazioni* Rend. Acc. Lincei, febb. 1947.

[2] Giulio Krall, *Meccanica tecnica delle vibrazioni*, Zanichelli, Bologna, 1940.

Instabilità nell'equilibrio delle strutture scatolari

Nota del dott. **Elio Giangreco**, *presentata dal socio corrisp.* **A. Galli**

Adunanza del dì 4 novembre 1950)

Sunto. — Messa in rilievo l'importanza che nella pratica costruttiva vanno sempre più acquistando le strutture scatolari si determina nello spirito della teoria della membrana lo stato tensionale dei singoli fogli. A partire poi dalla configurazione di equilibrio assunta dalla struttura sotto l'azione del p_c si imprime a ciascun foglio uno spostamento normale al loro piano e compatibile con i vincoli. Avvalendosi di considerazioni energetiche in conformità del teorema di Dirichlet si esprime la variazione seconda dell'energia potenziale totale del sistema, il cui annullamento segna le soglie dell'instabilità. Si perviene così ad un'equazione di $n + 2^{mc}$ grado in p_c la cui più piccola radice fornisce il valore richiesto. Si riporta un'applicazione ad un caso concreto.

1. *Introduzione*

Si indicano in genere col nome di strutture scatolari o in foglio quelle strutture spaziali ottenute dal collegamento lungo gli spigoli di due o più lastre piane; esse hanno assunto da tempo nella moderna tecnica costruttiva un'importanza sempre maggiore sia per la sottigliezza dello spessore dei singoli fogli che consente economia di materiale ed arditezza architettonica sia per la possibilità di coprire notevoli campate senza dover ricorrere a pilastri intermedi.

È appunto perciò che risulta pienamente giustificata la ricerca di quelle sollecitazioni critiche in presenza delle quali questi sistemi manifestano quella caratteristica inettitudine a reagire che conduce sotto sforzi comunque piccoli a deformazioni infinitamente grandi.

Il problema non è certo dei più semplici. Già lo studio statico si presenterebbe laborioso volendo tener conto delle sollecitazioni secondarie di flessione se le esigenze della tecnica corrente non consentissero con buona approssimazione di riferirsi ai soli sforzi principali perseguibili nello spirito della teoria della membrana. Ogni elemento di struttura scatolare viene ad essere così calcolato come una trave appoggiata agli estremi con uno stato tensionale piano in cui le σ sono dirette nel senso longitudinale del foglio stesso. L'eguaglianza di esse lungo gli spigoli di saldatura porta alla scrittura di quelle equazioni denominate dei tre tagli per l'analogia formale che presentano con l'equazione dei tre momenti.

Nell'ambito di questo schema viene svolto lo studio in esame che vuole essere un primo tentativo in un campo di ricerche finora non esaurientemente esplorato.

Naturalmente dato che per strutture del genere le sollecitazioni preponderanti derivano dal peso proprio p ci proponiamo di determinare il più piccolo valore di p che porta il sistema alle soglie dell'instabilità. La ricerca del carico critico viene eseguita avvalendosi, in conformità del teorema di DIRICHLET, delle seguenti considerazioni energetiche. A partire dalla configurazione di equilibrio assunta dalla struttura sotto il carico critico p_c pensiamo di imprimere al piano medio dei singoli fogli un ulteriore spostamento in direzione normale compatibile con i vincoli.

Chiamiamo con:

$$\varepsilon_x \; \varepsilon_y \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \gamma_{yz}$$

le componenti di deformazione relative alla configurazione iniziale, le quali dopo lo spostamento impresso saranno diventate:

$$\overline{\varepsilon_x} = \varepsilon_x + \varepsilon_x^{(1)} + \varepsilon_x^{(2)} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \overline{\gamma_{yz}} = \gamma_{yz} + \gamma_{yz}^{(1)} + \gamma_{yz}^{(2)}$$

dove le quantità con indice (1) e (2) rappresentano rispettivamente infinitesimi del primo e del secondo ordine nelle componenti dello spostamento. Nella configurazione iniziale ch'è quella di equilibrio sarà valido il principio della minima energia potenziale totale:

$$\delta_1 E = \int_V \Phi(\varepsilon\, \varepsilon^{(1)})\, dV - \int_V (Xu' + Yv' + Zw')\, dV = 0$$

dove il primo integrale è la variazione dell'energia potenziale elastica ed il secondo rappresenta il lavoro delle forze esterne. All'equilibrio stabile, corrispondendo un minimo di E, spettera un valore positivo della variazione seconda $\delta_1 E$; sarà allora $\delta_1 E = 0$ l'equazione variazionale che segna i margini dell'instabilità cioè:

$$\int_V \Phi(\varepsilon^{(1)}\, \varepsilon^{(1)})\, dV + p_c \int_V (\sigma'_x \varepsilon_x^{(2)} + \ldots \tau'_{yz} \gamma_{yz}^{(2)})\, dV - p_c L_1' = 0$$

avendo indicato con $\sigma'_x \ldots \tau'_{yz}$ i valori delle componenti di tensione corrispondenti a $p_c = 1$ e con L'_1 il lavoro del secondo ordine compiuto dal carico esterno unitario per lo spostamento impresso.

Assunto poi per lo spostamento arbitrario w' normale al piano del foglio

uno sviluppo in serie del tipo $\Sigma_i \overline{w}_i f_i(xy)$ [1]) con le funzioni f_i soddisfacenti le condizioni al contorno ed i $\overline{w}_i$ coefficienti incogniti si determina in base alle condizioni di stazionarietà un sistema di n equazioni algebriche lineari omogenee nelle $\overline{w}_i$; l'annullamento del determinante dei coefficienti che ci dà la condizione di compatibilità del sistema fornisce un'equazione di grado n in p_e la cui più piccola radice è il valore richiesto.

Si è riportato un esempio concreto dal quale si rileva che per strutture del genere si è generalmente lontani dal pericolo della instabilità con un sufficiente margine di sicurezza.

2. *Breve richiamo del calcolo degli sforzi principali.*

Nel calcolo degli sforzi interni provocati dai carichi in una struttura scatolare le ipotesi semplificative che si introducono sono le seguenti:

1. che ciascun foglio non opponga alcuna resistenza per deformazioni fuori del proprio piano;

2. che l'azione mutua che si trasmettono due fogli contigui lungo il loro spigolo di saldatura si possa ridurre soltanto ad una forza parallela allo spigolo stesso, il che equivale a ritenere il collegamento tra un foglio e l'altro effettuato per mezzo di una cerniera cilindrica.

Con queste ipotesi relative al comportamento del sistema sotto i carichi, al suo modo di deformarsi ed all'efficienza dei vincoli interni si riporta la

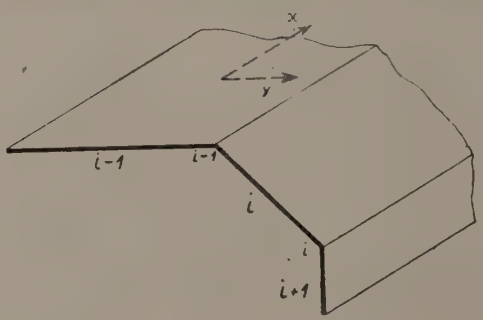


Fig. 1

struttura ad uno schema più semplice nel quale riesce notevolmente agevole determinare in ciascuna sezione le caratteristiche della sollecitazione che vengono denominate sforzi principali.

Cominciamo allora in questo ordine di idee a numerare i vari spigoli progressivament eda 0 a n (v. fig. 1) a partire da uno di quelli liberi, avremo in corrispondenza n fogli o lastre di cui chiameremo i^{mo} quello collegante lo spigolo $i\text{-}1^{mo}$ con lo spigolo i^{mo} ed in conseguenza indicheremo con l'indice i tutte le grandezze relative a questo foglio (δ_i = spessore; h_i = altezza;

[1]) x e y sono una coppia di assi giacenti nel piano di ciascun foglio.

α_i = angolo formato con l'orizzontale (positivo se orario); β_i = angolo acuto tra il foglio i-1mo e quello i^{mo} [1]).

Riferiamo ciascun foglio ad una terna di assi xy di cui per il foglio i^{mo} l'asse x sarà posto al centro del foglio secondo la lunghezza della volta, l'asse y normale a x giacente nel piano del foglio e positivo nel verso dello spigolo i^{mo}; x si sceglie positivo se l'angolo xy ha verso orario e z normale al piano xy ed orientato in modo che l'angolo yz abbia anche esso verso orario.

Per quanto riguarda i carichi esterni li riterremo localizzati lungo gli spigoli e distribuiti lungo questi: indicando con P_i il vettore forza applicato per unità di lunghezza dello spigolo, le sue componenti nel piano dei due fogli i e $i+1$ saranno:

$$(1) \qquad \begin{cases} S_{i,i} = -P_i \dfrac{\cos \alpha_{i+1}}{\operatorname{sen} \beta_i} \\ S_{i,i+1} = P_i \dfrac{\cos \alpha_i}{\operatorname{sen} \beta_i} \end{cases}$$

dove il primo indice di S si riferisce al foglio ed il secondo allo spigolo.

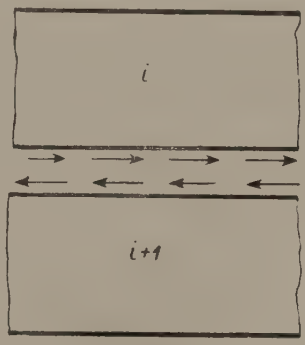


Fig. 3

Indichiamo inoltre con T_i la forza esercitantesi lungo l'unità di lunghezza dello spigolo i^{mo} tra il foglio i^{mo} e quello $i+1$ (v. fig. 3).

[1]) Gli angoli α_i e β_i non sono indipendenti, ma legati dalle relazioni (v. fig. 2)

$$\begin{cases} \alpha_{i+1} = \alpha_i - \beta_{i+1} \\ \alpha_{i-1} = \alpha_i + \beta \end{cases}$$

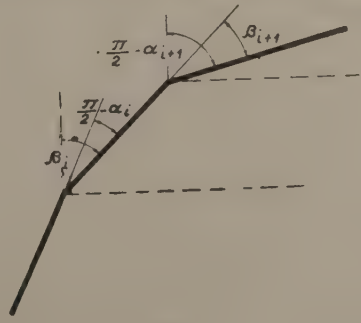


Fig. 2

Consideriamo ora un foglio isolato dal resto della struttura p. es. l'i^{mo} esso sarà soggetto all'azione di una forza $S_i = S_{i,i-1} - S_{i,i}$ per unità di lunghezza diretta secondo l'asse y e ad una distribuzione di tensioni tangenziali T_{i-1} e T_i dirette secondo x (v. fig. 4). Nel foglio in esame per effetto del carico ripartito si determina allora in una sezione di ascissa x un momento flettente $M_i^{(1)}(x)$ che tenendo conto delle convenzioni fatte per i segni è legato a S_i dalla relazione:

$$\frac{d^2 M_i^{(1)}}{dx^2} = - S_i \tag{2}$$

Inoltre sui due bordi dello stesso foglio si determina per effetto dei T_{i-1} e T_i uno sforzo normale $N_i(x)$ e di conseguenza un ulteriore momento flettente $M_i^{(2)}(x)$ legati ai T dalle relazioni di equilibrio (v. fig. 5).

$$\begin{cases} \dfrac{dN_i}{dx} = T_{i-1} - T_i \\ \dfrac{dM_i^{(2)}}{dx} = - \dfrac{h_i}{2} (T_{i-1} + T_i) \end{cases} \tag{3}$$

[1])

Avremo così per le sollecitazioni $\sigma_{i,i-1}$ e $\sigma_{i,i}$ generate nel foglio i^{mo} sugli

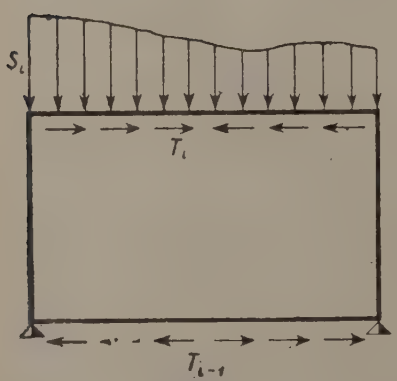


Fig. 4

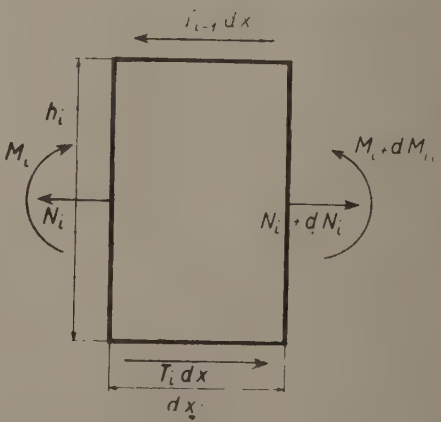


Fig. 5

spigoli $i-1$ e i le seguenti espressioni:

$$\begin{cases} \sigma_{i,i-1} = \dfrac{1}{\delta_{i-1}\, h_{i-1}^2} (6 M_{i-1}^{(1)} + h_{i-1}\, N_{i-1} + 6 M_{i-1}^{(2)}) \\ \sigma_{i,i} = \dfrac{1}{\delta_i\, h_i^2} (- 6 M_i^{(1)} + h_i\, N_i - 6 M_i^{(2)}) \end{cases} \tag{4}$$

[1]) v. W. Flügge, *Statik und Dynamik der Schalen*, pag. 176

Tenendo infine presente che a causa della continuità della struttura $\sigma_{i,i} = \sigma_{i+1,i}$ si ricavano previa derivazione rispetto a x equazioni del tipo:

$$(5) \qquad T_{i-1}\frac{1}{\delta_i h_i} + 2T_i\left(\frac{1}{\delta_i h_i} + \frac{1}{\delta_{i+1} h_{i+1}}\right) + T_{i+1}\frac{1}{\delta_{i+1} h_{i+1}} = 3\left(\frac{Q_{i-1}}{\delta_i h_i^2} + \frac{Q_i}{\delta_{i+1} h_{i+1}^2}\right)$$

dette equazioni dei tre tagli per l'analogia con le corrispondenti equazioni dei tre momenti che reggono il problema della trave continua.

3. *Determinazione delle componenti di tensione.*

Passiamo ora ad esaminare lo stato tensionale nel generico foglio i^{mo} caratterizzando punto per punto le sole componenti di tensione (diverse da zero) σ_x e τ_{yz}. Consideriamo a questo scopo il foglio in esame come una

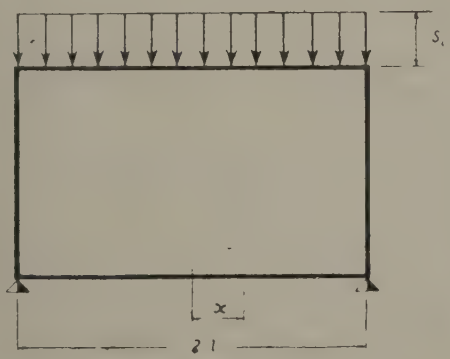


Fig. 6

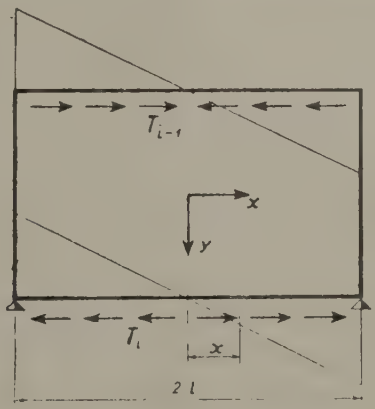


Fig. 7

trave appoggiata ad un carico S_i uniformemente ripartito per unità di lunghezza (v. fig. 6) e ad una distribuzione di tensioni tangenziali T_i variabili linearmente tanto sul bordo superiore quanto su quello inferiore (v. fig. 7).

In una sezione generica di ascissa x avremo allora con riferimento alla fig. 6 uno sforzo di taglio Q_x ed un momento flettente $M_x^{(1)}$ dati da [1]

$$(6) \qquad \begin{cases} Q_x = -Sx \\ M_x^{(1)} = S\dfrac{l^2 - x^2}{2} \end{cases}$$

[1]) Conveniamo di trascurare l'indice i per tutte le grandezze di evidente riferimento al foglio i^{mo} in esame.

e le corrispondenti tensioni saranno:

$$(6') \qquad \begin{cases} \tau_{xy} = \dfrac{Q_x \mathfrak{M}_\omega}{I\delta} = \dfrac{-6Sx}{\delta h^3}\left(\dfrac{h^2}{4} - y^2\right) \\ \sigma_x = \dfrac{M_x^{(1)} y}{I} = \dfrac{6Sy}{\delta h^3}(l^2 - x^2) \end{cases}$$

A queste si devono sommare le tensioni che si generano per la presenza dei tagli supplementari (v. fig. 7) per effetto dei quali alla sollecitazione di flessione si aggiunge uno sforzo normale che sposta l'asse neutro dalla posizione baricentrica.

Con riguardo alle (4) si ha:

$$(7) \qquad \begin{cases} N_x = \displaystyle\int_0^x (T_{i-1} - T_i)\, dx \\ M_x^{(2)} = -\dfrac{h}{2}\displaystyle\int_0^x (T_{i-1} + T_i)\, dx \end{cases} \quad [1]$$

ed in una sezione generica:

$$(8) \qquad M_x = M_x^{(1)} + M_x^{(2)} = S\frac{l^2 - x^2}{2} - \frac{h}{2}\int_0^x (T_{i-1} + T_i)\, dx.$$

La corrispondente tensione sarà:

$$(8') \qquad \sigma_x = \frac{12 M_x y}{\delta h^3} + \frac{N}{\delta h} = \frac{12y}{\delta h^3}\left[S\frac{l^2 - x^2}{2} - \frac{h}{2}\int_0^x (T_{i-1} + T_i)\, dx\right] + \\ + \frac{1}{\delta h}\int_0^x (T_{i-1} - T_i)\, dx.$$

Per quanto riguarda lo sforzo di taglio basta modificare nella espressione generale della τ_{xy} il valore del momento statico che bisogna prendere in

---

[1]) Si sono omesse le due costanti d'integrazione che si ricavano dalle condizioni: $N_x(\pm l) = M_x^{(2)}(\pm l) = 0$; se i carichi S_i sono costanti è $T_i = \alpha_i x$ e N_x e $M_x^{(2)}$ assumono l'espressione:

$$\begin{cases} N_x = (\alpha_{i-1} - \alpha_i)\dfrac{l^2 - x^2}{2} \\ M_x^{(2)} = -\dfrac{h_i}{2}(\alpha_{i-1} + \alpha_i)\dfrac{l^2 - x^2}{2} \end{cases}$$

questo caso rispetto al nuovo asse neutro non più baricentrico, il valore che si ricava è: [1])

$$(9) \qquad \tau_{xy} = \frac{Q_x \mathfrak{M}}{I\delta} + \frac{T_{i-1} - T_i}{\delta} = \frac{6Sx}{\delta h^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) + \frac{T_{i-1} - T_i}{\delta}.$$

Caratterizzato così per un generico foglio lo stato di tensione passiamo allo stato di deformazione.

4. Determinazione delle componenti di deformazione.

Con riferimento alla terna già adottata osserviamo che per un generico foglio quando il carico S corrispondente avrà raggiunto un certo valore si avrà lo svergolamento della trave per effetto di una inflessione laterale per cui i vari punti P di essa subiscono uno spostamento in direzione z che sarà proporzionale alla distanza di P dalle sezioni vincolate nei timpani e per effetto di una rotazione intorno all'asse x per cui i vari punti della trave subiscono un ulteriore spostamento in direzione z proporzionale alla distanza dall'asse x.

Assumiamo allora con evidente rispetto delle condizioni di vincolo per la componente dello spostamento secondo z la seguente espressione:

$$(10) \qquad w_i' = (w_i + \vartheta_i y)\cos\frac{\pi x}{2l}$$

[1]) Basta modificare il solito ragionamento che porta all'espressione della τ_{xy}

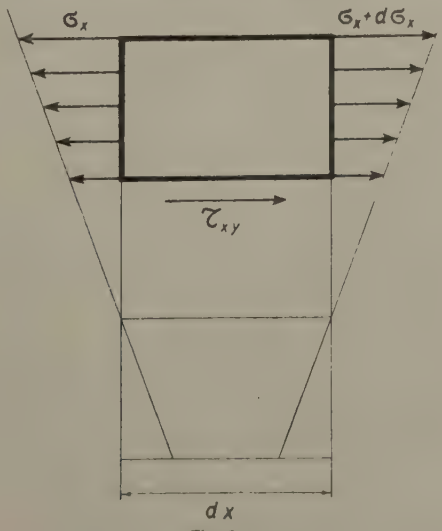


Fig. 8

nella trattazione approssimata del problema del taglio. Si scrive l'equazione di equi-

dove w_i e ϑ_i sono legati agli abbassamenti dell'estremo inferiore $i-1$ e superiore (i) del foglio in corrispondenza della mezzeria dalle seguenti relazioni:

$$(11) \qquad w_i = \frac{w_{i,i} + w_{i,i-1}}{2} \qquad\qquad \vartheta_i = \frac{w_{i,i} - w_{i,i-1}}{2}$$

e l'espressione di w'_i sarà in funzione di questi ultimi:

$$(10') \qquad w'_i = \frac{w_{i,i} + w_{i,i-1}}{2} + \frac{w_{i,i} - w_{i,i-1}}{h_i}\, y$$

Per tener conto poi della congruenza tra foglio e foglio se chiamiamo con v_i la componente dello spostamento secondo y in mezzeria avremo (v. fig. 9) [1])

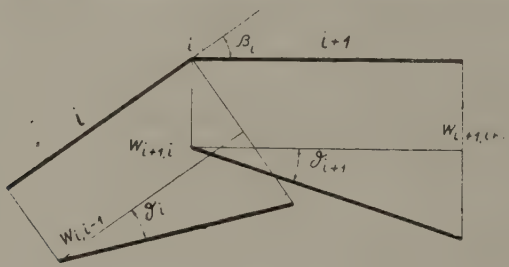


Fig. 9

$$(12) \qquad w_{i,i-1} = \frac{v_i \cos\beta_{i-1} - v_{i-1}}{\operatorname{sen}\beta_{i-1}} \qquad (i = 0 \ldots\ldots n-2)$$

$$(12') \qquad w_{i,i} = \frac{v_{i+1} - v_i \cos\beta_i}{\operatorname{sen}\beta_i} \qquad (i = 1 \ldots\ldots n-1)$$

Scriviamo ora le stesse relazioni per lo spostamento dell'estremo superiore del foglio $i-1^{mo}$ e di quello inferiore del foglio $i+1^{mo}$

$$(13) \qquad w_{i-1,i} = \frac{v_i - v_{i-1}\cos\beta_{i-1}}{\operatorname{sen}\beta_{i-1}} \qquad (i = 1 \ldots\ldots n-1)$$

$$(13') \qquad w_{i+1,i} = \frac{v_{i+1}\cos\beta_i - v_i}{\operatorname{sen}\beta_i} \qquad (i = 0 \ldots\ldots n-1)$$

Pensiamo ora di ricavare v_i dalla (13) e dalla (14) accoppiate e di eguagliarlo al valore che se ne ricava dalla (13') e dalla (14'): si ottiene la se-

---

librio alla translazione lungo x per la parte di solido compresa fra le due sezioni rette A_0 distanti di dx, la superficie laterale e la superficie rettangolare parallela al piano xy (v. fig. 8): $\int_{A_0} d\sigma_x\, dA = \tau\delta dx$ da cui tenendo presente che $\sigma_x = \frac{M_x y}{I} + \frac{N}{A}$ e quindi $d\sigma_x = \frac{y}{I} Q_x dx + \frac{T_{i-1} - T_i}{A} dx$ si ha la (9).

[1]) v. W. Flügge. *Loc cit.*, pag. 179.

guente relazione che lega $w_{i-1,i}, w_{i,i-1}, w_{i,i}$ e $w_{i+1,i}$:

$$(15) \qquad \frac{w_{i-1,i} - w_{i,i-1}\cos\beta_{i-1}}{\operatorname{sen}\beta_{i-1}} = \frac{w_{i,i}\cos\beta_i - w_{i+1,i}}{\operatorname{sen}\beta_i}$$

e passando ai w_i x:

$$(15') \qquad \frac{\left(w_{i-1} + \frac{\vartheta_{i-1}h_{i-1}}{2}\right) - \left(w_i - \frac{\vartheta_i h_i}{2}\right)\cos\beta_{i-1}}{\operatorname{sen}\beta_{i-1}} = \frac{\left(w_i + \frac{\vartheta_i h_i}{2}\right)\cos\beta_i - \left(w_{i+1} - \frac{\vartheta_{i+1}h_{i+1}}{2}\right)}{\operatorname{sen}\beta_i}$$

Questa relazione ci consente di legare i w_i ed i ϑ_i dei vari fogli in modo che l'ulteriore spostamento w_i' impresso a ciascun foglio sia non solo compatibile con le condizioni di vincolo di esso, ma per di più congruente con la deformazione di tutta la struttura.

Passiamo allora ad esprimere in funzione dell'assegnata componente dello spostamento le componenti della deformazione tenendo conto già detto nell'introduzione degli infinitesimi del secondo ordine. Possiamo pertanto avvalerci delle espressioni date dal prof. Galli nella sua Nota «Complementi analitici utili per la trattazione effettiva dei problemi di stabilità dell'equilibrio elastico», dove l'Autore mette definitivamente a punto la trattazione dei problemi di instabilità nello spirito del teorema di Dirichlet preparando al tempo stesso l'algoritmo adatto alla soluzione dei singoli casi. Avremo secondo le notazioni usate al principio:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^{(1)} + \varepsilon_x^{(2)} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_y^{(1)} + \varepsilon_y^{(2)} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_z^{(1)} + \varepsilon_z^{(2)} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right]$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{yz}^{(1)} + \gamma_{yz}^{(2)} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{xz}^{(1)} + \gamma_{xz}^{(2)} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^{(1)} + \gamma_{xy}^{(2)} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}$$

e nel nostro caso sempre con riferimento al generico foglio i^{mo}:

$$\varepsilon_x^{(1)} = \varepsilon_y^{(1)} = \varepsilon_z^{(2)} = \gamma_{xy}^{(1)} = \gamma_{xz}^{(2)} = \gamma_{yz}^{(2)} = 0$$

$$\varepsilon_x^{(2)} = \frac{1}{8}\frac{\pi^2}{l^2}(w_i + \vartheta_i y)^2 \operatorname{sen}^2\frac{\pi x}{2l}$$

$$\varepsilon_y^{(2)} = \frac{1}{2}\vartheta_i^2 \cos^2\frac{\pi x}{l}$$

$$\gamma_{xy}^{(2)} = -\frac{\pi}{2l}\vartheta_i(w_i + \vartheta_i y)\,\text{sen}\,\frac{\pi x}{2l}\cos\frac{\pi x}{2l}$$

$$\gamma_{xz}^{(1)} = -\frac{\pi}{2l}(w_i + \vartheta_i y)\,\text{sen}\,\frac{\pi x}{2l}$$

$$\gamma_{yz}^{(1)} = \vartheta_i \cos\frac{\pi x}{2l}.$$

Di quelle diverse da zero le uniche che compaiono nell'espressione del lavoro del secondo ordine sono $\varepsilon_x^{(2)}$ e $\gamma_{xy}^{(2)}$.

5. *Espressione dell'energia potenziale totale.*

Indichiamo con W l'energia elastica funzione quadratica delle componenti del 1° ordine $\varepsilon^{(1)}$ e $\gamma^{(1)}$ della deformazione che nel nostro caso per un foglio generico vale:

$$W = \int_V \Phi\, dV = \int_V \frac{G}{2}\,(\gamma_{xz}^{(1)} + \gamma_{yz}^{(1)})\, dV$$

Quella relativa a tutta la struttura per i valori di $\gamma_{xz}^{(1)}$ e $\gamma_{yz}^{(1)}$ corrispondenti alla w impressa, ad integrazioni effettuate, è fornita da:

$$W = \frac{G\pi^2}{8l}\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left\{w_i^2 h_i + \vartheta_i^2\left(\frac{h_i^3}{12} + \frac{4l^2 h_i}{\pi^2}\right)\right\}$$

Il lavoro del II ordine prodotto dai carichi esterni per lo spostamento w assegnato è costituito di due parti: una dovuta al carico uniformemente ripartito S_i che per un foglio generico vale: (v. fig. 10)

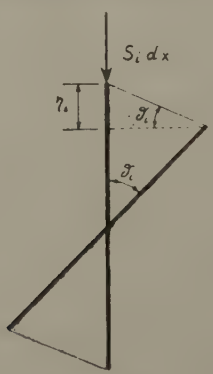


Fig. 10

$$\int_{-l}^{l} S_i\,\eta_i\,dx = \frac{S_i\,l\,h_i}{2}\,\vartheta_i^2$$

essendo

$$\eta_i = \frac{h_i}{2}\,\vartheta_i^2 \cos^2\frac{\pi x}{2l};$$

l'altra che è nulla perchè è dovuta ad una distribuzione emisimmetrica di carichi T_i per una deformazione simmetrica. Si ha così, relativamente a tutta la struttura:

$$L_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{S_i\, l\, h_i}{2}\,\vartheta_i^2.$$

Indichiamo infine con L_2^* il lavoro degli sforzi interni σ e τ per le componenti di deformazione del secondo ordine: esso vale nel nostro caso:

$$L_2^* = \int_V (\sigma_x\, \varepsilon_x^{(2)} + \tau_{xy}\, \gamma_{xy}^{(2)})\, dV.$$

Supposti già determinati i carichi δ_i agenti su ciascun foglio e gli sforzi di taglio incogniti T_i possiamo attribuire a dette componenti di tensione espressioni del tipo:

$$\sigma = a_i y + b_i x^2 y + c_i x^2 + d_i$$
$$\tau = m_i x + n_i x y^2$$

e si ottiene così per tutta la struttura ad integrazioni effettuate:

$$L_2^* = \frac{\pi^2}{8l^2} \sum_{i=1}^{n} \delta_i \left\{ \left[c_i h_i l^3 \frac{6+\pi^2}{3\pi^2} + d_i h_i l \right] w_i^2 + \right.$$
$$+ \left[c_i \frac{h_i^3}{12} l^3 \frac{6+\pi^2}{3\pi^2} + d_i \frac{h_i^3}{12} l \right] \vartheta_i^2$$
$$\left. + \left[a_i \frac{h_i^3}{6} l + b_i \frac{h_i^3}{6} l^3 \frac{6+\pi^2}{3\pi^2} - 8 \frac{m_i h_i l^3}{\pi^2} \quad 2 \frac{n_i h_i^3 l^3}{3\pi^2} \right] w_i \vartheta_i \right\}.$$

Se indichiamo con apice le stesse grandezze relative a $p = 1$ si ha in definitiva per l'energia potenziale totale. È la seguente espressione:

$$E = \sum_{i=1}^{n} \frac{G\pi^2}{8l} \delta^2 \left\{ w_i^2 h_i + \vartheta_i^2 \left(\frac{h_i^3}{12} + \frac{4 h_i l^2}{\pi^2} \right) \right\} +$$
$$+ p \left\{ \sum \frac{\pi^2}{8l^3} \delta_i \left\{ \left[c_i h_i l^3 \frac{6+\pi^2}{3\pi^2} + d_i h_i l \right] w_i^2 + \right.\right.$$
$$+ \left[\frac{c_i h_i^3 l^3}{12} \frac{6+\pi^2}{3\pi^2} + \frac{d_i h_i^3 l}{12} \right] \vartheta_i^2 +$$
$$\left.\left. + \left[\frac{a_i h_i^3 l}{6} + \frac{b_i h_i^3 l^3}{6} \frac{6+\pi^2}{3\pi^2} - \frac{8 m_i h_i l^3}{\pi^2} - \frac{2 n_i h_i^3 l^3}{3\pi^2} \right] w_i \vartheta_i \right\} - \sum_{i=1}^{n} \frac{S_i' l\, h_i}{2} \vartheta_i \right\}.$$

Una volta scritta l'espressione di E bisogna imporre le condizioni di stazionarietà:

$$\frac{\partial E}{\partial w_i} = 0 \qquad \frac{\partial E}{\partial \vartheta_i} = 0$$

che essendo i w_i e i ϑ_i legati dalla relazione (15') si riducono a $2n - (n-2) = n + 2$ [1]) equazioni lineari omogenee nelle incognite w_i e ϑ_i. Il corrispondente determinante dei coefficienti del $n + 2^{mo}$ ordine:

$$\left\| A_{hk} - p\, B_{hk} \right\| \qquad \text{con} \quad \begin{cases} A_{hk} = A_{kh} \\ B_{hk} = B_{kh} \end{cases}$$

annullato fornisce un'equazione di $n + 2^{mo}$ grado in p; la più piccola radice ci dà il valore richiesto di p_c.

6. *Esempio*

Consideriamo la struttura scatolare della fig. 11 a: luce 25 m. spessore cm. 10, soggetta ad un carico ripartito di p t/m per unità di lunhezza

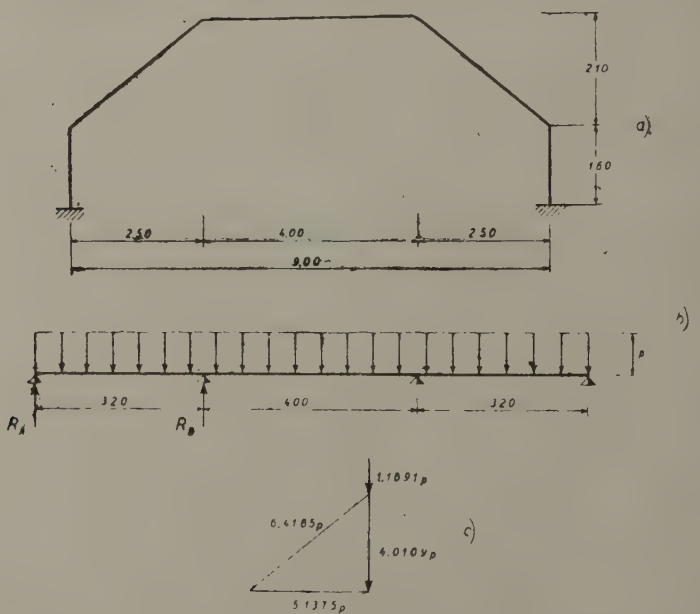


Fig. 11

della volta. Ridotti i carichi sui nodi attraverso le reazioni della trave continua indicata in fig. 11 b: e determinate le componenti di detti carichi nel piano dei tre fogli (v. fig. 11c) si calcolano i corrispondenti carichi

[1]) È evidente che in condizioni di perfetta simmetria le incognite w_i e ϑ_i si riducono ulteriormente.

per unità di lunghezza:

$$S_1 = 1{,}1891\,p \qquad ; \qquad S_2 = 6{,}4185\,p \qquad ; \qquad S_3 = 0$$

I tagli T_1 e T_2 attraverso gli spigoli di saldatura ricavati applicando due volte l'equazione dei tre tagli valgono:

$$T_1 = \alpha_1 x = 1{,}4757 p x \qquad T_2 = \alpha_2 x = 1{,}6220 p x$$

Indichiamo con S'_i e T'_i i valori di S_i e T_i corrispondenti a $p = 1$ e passiamo a determinare lo stato tensionale nei soli fogli 1, 2 e 3 (gli altri sono perfettamente simmetrici).

Foglio 1

$$\sigma'_x = \frac{x^2 - l^2}{2\delta h_1}\left\{\frac{12y}{h_1^2}\left(S_1 - \frac{h_1}{2}\alpha_1\right) - \alpha_1\right\} =$$

$$= -19{,}4531\,y + 0{,}1245\,x^2 y - 4{,}6117\,x^2 + 720{,}5781$$

$$\tau_{xy} = -\frac{6\,S_1}{\delta h_1^3}\left(\frac{h_1^2}{4} - y^2\right)x - \alpha_1\frac{x}{\delta}$$

$$= -25{,}9047\,x + 17{,}4184\,x y^2.$$

Foglio 2

$$\sigma'_x = \frac{x^2 - l^2}{2\delta h_2}\left\{\frac{12y}{h_2^2}\left(S_2 - h_2\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) + \alpha_1 - \alpha_2\right\}$$

$$= -418{,}3125\,y + 2{,}6772\,x^2 y - 0{,}2385\,x^2 + 35{,}7031$$

$$\tau'_{xy} = -\frac{6\,S_2}{\delta h_2^3}\left(\frac{h_2^2}{4} - y^2\right)x + (\alpha_1 - \alpha_2)\frac{x}{\delta}$$

$$= -4{,}4694\,x + 4{,}1744\,x y^2.$$

Foglio 3

$$\sigma'_x = (x^2 - l^2)\frac{\alpha_3}{\delta h^3} = 4{,}0550\,x^2 - 633{,}5937$$

$$\tau'_{xy} = 2\,\alpha_2\frac{x}{\delta} = 32{,}440\,x$$

Per quest'ultimo foglio che è sollecitato da una distribuzione di carichi eguali e contrari varrebbe la pena tener conto anche della $\sigma_y = 5{,}1375 p$ che ci sarà certamente per il comportamento di lastra che il foglio manifesta, ma fortunatamente la corrispondente deformazione è nulla perchè $\vartheta_3 = 0$ per ragioni di simmetria. Ancora per la simmetria si ha che $w_{3,2} = w_{3,2}$ e quindi w_3 si lascia esprimere mediante la (15') dove $\operatorname{sen}\beta_1 = \cos\beta_2$ —

$= 0{,}78071 = \operatorname{sen}\beta_2 = \cos\beta_1 = 0{,}62489$:

$$w_3 = -0{,}80041\ w_1 - 0{,}60031\ \vartheta_1 + 1{,}28088\ w_2 + 0{,}4488\ \vartheta_2$$

Si ottiene così a calcoli fatti la seguente espressione della energia potenziale totale:

$$\begin{aligned} E = {} & (5679{,}0665 - 3{,}2597p)\ w_1^2 + (630\,914{,}1800 - 0{,}8883p)\ \vartheta_1^2 + \\ & + (12785{,}7707 - 10{,}9552p)w_2^2 + (1\,262\,321{,}8400 - 26{,}0557p)\ \vartheta_2^2 + \\ & + (4033{,}3107 + 1{,}2830p)w_1\vartheta_1 - (8076{,}5898 - 13{,}8174p)w_1w_2 - \\ & - (1781{,}6602 - 3{,}0596p)w_1\vartheta_2 - (6461{,}2323 - 11{,}0539p)\ w_2\vartheta_1 - \\ & - (1{,}4441 - 0{,}0025p)\ \vartheta_1\vartheta_2 + (2833{,}9569 - 3{,}1583p)\ w_2\vartheta_2 \end{aligned}$$

Imponiamo ora le condizioni di stazionarietà:

$$\frac{\partial E}{\partial w_1} = \frac{\partial E}{\partial \vartheta_1} = \frac{\partial E}{\partial w_2} = \frac{\partial E}{\partial \vartheta_2} = 0$$

da cui si perviene ad un sistema di quattro equazioni lineari omogenee nelle quattro incognite w_1, ϑ_1, w_2, ϑ_2.

L'annullamento del determinante dei coefficienti fornisce la seguente equazione di IV grado in p:

$$\begin{aligned} & 4.6093{,}6180p^4 - 8388{,}7853 \cdot 10^3\, p^3 + 187{,}9258 \cdot 10^6\, p^2 - \\ & - 3334{,}3360 \cdot 10^9\, p + 14{,}1683 \cdot 10^{12} = 0 \end{aligned}$$

La più piccola radice è:

$p_c = 4{,}249\ t/m$ e per unità di lunghezza della volta $4{,}249\ t/m^2$.

Napoli, Istituto di Scienza delle Costruzioni, Agosto 1950

Vibrazioni libere e forzate di un corpo rigido in un mezzo elastico con un' applicazione all' asismica

Nota del dott. **Elio Giangreco**, *presentata dal socio corrisp.* **A. Galli**

(Adunanza del dì 4 novembre 1950)

Sunto. — Tenuto conto dell' elasticità laterale e normale del terreno di fondazione si studiano per un blocco rigido immerso in esso le oscillazioni libere nell' intorno di una configurazione di equilibrio stabile. Ridotto poi il prblema a tre soli gradi di libertà si passa allo studio delle vibrazioni libere e forzate in presenza di una massa puntiforme collegata elasticamente alla fondazione; con riferimento alle sole componenti orizzontali dello spostamento della massa del blocco e della massa aggiunta si determinano le massime forze d' inerzia in base alle quali andrebbe verificata la stabilità della struttura nell' ipotesi di un prefissato effetto sismico pericoloso.

1) — Si consideri un corpo rigido costretto in alcuni punti P_i da vincoli elastici e pressocchè privi di inerzia la cui attitudine a reagire possiamo pensare di caratterizzare mediante gli spostamenti ε_{ij} dei suddetti punti prodotti da forze unitarie in determinate direzioni ovvero mediante le forze K_{ij} atte a produrre spostamenti unitari.

Con riferimento ad un blocco di fondazione M il vincolo sarà rappresentato dall' appoggio sulla superficie A di un particolare mezzo elastico: il terreno. Questa elasticità verrà poi definito attraverso le reazioni dR_n e dR_t che il suolo oppone ad uno spostamento locale $n = n(P)$ e $t = t(P)$ di un elementino dA rispettivamente nel piano normale e nel piano tangente.

Si ha: $$dR_n = Cn\,dA \quad ; \quad dR_t = Dt\,dA$$

essendo C e D due funzioni del posto che caratterizzano l' elasticità normale e tangenziale del suolo. Senza intrattenerci sulla dipendenza che esse presentano da altre variabili quali per es. la profondità del terreno e le condizioni di sollecitazioni nell' intorno considerato diremo solo che fortunatamenle la loro influenza non è decisiva nel calcolo degli sforzi i quali non vengono sensibilmente alterati assumendo anche dei valori non molto esatti; aggiungiamo che per C e D si assumono in genere valori pressocchè eguali [1]).

---

[1]) G. Krall, *Vibrazioni di un corpo rigido in sospensione elastica*, Annali di Matematica, 1930; Id. *I problemi statici delle Costruzioni marittime*, Ibidem, 1934.

2) — Assumiamo ora con origine nel baricentro di M una terna di assi x, y, z rispetto ai quali n e t abbiano rispettivamente coseni direttori α_i e β_i ($i = 1, 2, 3$) e scegliamo come gradi di libertà del sistemi i tre spostamenti u_i del baricentro secondo x, y, z, e le tre rotazioni p_i di M intorno ai predetti assi. Indicando con s_n e s_t gli spostamenti di P secondo n e t per una ben nota relazione di cinematica si ha:

$$s_n = \left| s + \omega \wedge (P - O) \right| \times n = \sum_i u_i \alpha_i + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \sum_i u_i \alpha_i + \Phi$$

$$s_t = \left| s + \omega \wedge (P - O) \right| \times t = \sum_i u_i \beta_i + \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \sum_i u_i \beta_i + \Psi$$

Siamo così in grado di scrivere l'espressione dell'energia potenziale e dell'energia cinetica che valgono:

$$V = \frac{1}{2} \int_A s_n^2 (P)\, C\, dA + \frac{1}{2} \int_A s_t^2 (P)\, D\, d\, A$$

$$T = \frac{1}{2} M \sum_i \dot{u}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_i A_i \dot{p}_i^2$$

dove M denota la massa del blocco ed A_i il momento d'inerzia rispetto al generico asse della terna scelta.

Le equazioni di Lagrange in assenza di forze attive possono allora scriversi:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} - \frac{\partial L}{\partial u_i} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_i} - \frac{\partial L}{\partial p_i} = 0$$

con $L = T - V$ $\qquad (i = 1, 2, 3)$

e più esplicitamente:

$$M \ddot{u}_i + \int_A \left(\Sigma_i u_i \alpha_i + \Sigma_i \Phi_i p_i \right) \alpha_i\, C\, dA + \int_A \left(\sum_i u_i \beta_i + \sum_i \Psi_i \beta_i \right) \beta_i\, D\, d\, A = 0$$

$(i = 1, 2, 3)$

$$A_i \ddot{p}_i + \int_A \left(\sum_i u_i \alpha_i + \sum_i \Phi_i p_i \right) \Phi_i\, C\, d\, A + \int_A \left(\sum_i u_i p_i + \sum_i \Psi_i \beta_i \right) \Psi_i\, D\, d\, A = 0$$

dove Φ_i e Ψ_i sono i minori del secondo ordine di Φ e Ψ calcolati mediante la seconda riga. Scegliendo poi per u_i e p_i soluzioni della forma:

$$u_i = \Sigma_i \overline{u}_i (a_i' \operatorname{sen} \lambda_i' t + b_i' \cos \lambda_i' t)$$
$$p_i = \Sigma_i \overline{p}_i (a_i'' \operatorname{sen} \lambda_i'' t + b_i'' \cos \lambda_i'' t)$$

si perviene ad un sistema di sei equazioni algebriche lineari ed omogenee: l'annullamento del determinante dei coefficienti fornisce l'equazione secolare delle frequenze e gli autovalori.

Con riferimento ad un parallelepipedo la cui faccia di contatto con il suolo abbia per normale l'asse z, nell'ipotesi che x e y siano principali d'inerzia si ricavano le seguenti espressioni degli autovalori e quindi a meno di $\frac{1}{2\pi}$ delle frequenze di vibrazione:

$$\lambda_1^2 = \frac{\int_A D\,dA}{M} \quad ; \quad \lambda_2^2 = \frac{\int_A C\,dA}{M} \quad ; \quad \lambda_3^2 = \frac{\int_A C y^2\,dA}{A_1}$$

$$\lambda_4^2 = \frac{\int_A D z^2 + C x^2}{A_2}\,dA \quad ; \quad \lambda_5^2 = \frac{\int_A D y^2\,dA}{A_3}$$

Si osservi che per $D = 0$ si ritrovano i valori forniti dal Krall [1]).

3) — Riduciamoci ora allo studio del problema piano riferendoci per il blocco di fondazione S ai soli tre parametri

$$u_1 = u \quad ; \quad u_2 = v \quad ; \quad p_3 = r$$

e supponiamo che ad esso sia collegato mediante un certo vincolo un punto materiale P $(\xi\ \eta)$ di massa m. Dovremo allora sommare all'energia potenziale V_1 di S quella che compete al vincolo considerato V_2 ed all'energia cinetica T_1 il termine addizionale T_2 che spetta alla massa m. Indichiamo con s_n e s_t le componenti dello spostamento s del punto e siano k_{ij} gli elementi caratteristici di elasticità del nuovo vincolo (valutato pensando fermo il solido). Se assumiamo gli assi x, y principali di inerzia di versori i e j avremo:

$$\alpha_1 = \beta_2 = 0 \quad ; \quad \alpha_2 = \beta_1 = 1$$

dimodoche

$$s_n = s + \omega \wedge (P - O)] \times j = v + r\,x$$
$$s_t = -]s + \omega \wedge (P - O)] \times i = u - r\,y$$

---

[1]) G. Krall. *Oscillazioni di un corpo rigido in sospensione elastica*, Annali di Matematica, 1930, pag. 231.

e supposto C e D costanti:

$$V_1 = \frac{1}{2}\left[DA\,u^2 + CA\,v^2 + r^2\,(CJ_y + DJ_x)\right]$$

$$T_1 = \frac{1}{2}\,M\,(\dot{u}^2 + \dot{v}^2) + \frac{1}{2}\,I_p\,\dot{r}^2$$

denotando I_x I_y I_p i rispettivi momenti di inerzia assiale e polare. L'energia potenziale del vincolo vale invece:

$$V_2 = \frac{1}{2}\,(K_{11}\,u_0^2 + K_{22}\,v_0^2 + 2\,K_{12}\,u_0\,v_0)$$

dove essendo u_0 e v_0 le componenti dello spostamento relativo di P rispetto a S avremo:

$$u_0 = \bar{u} - [s + \omega \wedge (P - O)] \times l = \bar{u} - u + r\,\eta$$
$$v_0 = \bar{v} - [s + \omega \wedge (P - O)] \times m = \bar{v} - v - r\,\xi$$

denotando l e m una coppia di versori spiccati dal punto P secondo ξ e η

L'energia cinetica che compete al nuovo vincolo vale invece:

$$T_2 = \frac{1}{2}\,m\,(\dot{\bar{u}}^2 + \dot{\bar{v}}^2)$$

Trascurando la componente v e supposto $\xi = 0$ si ha:

$$V_2 = \frac{1}{2}\,K_{11}\,(\bar{u}^2 + u^2 + r^2\eta^2 - 2u\bar{u} + 2\bar{u}\,r\eta - 2u\,r\eta)$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\,m\,\dot{\bar{u}}^2$$

e la funzione di Lagrange vale:

$$L = \frac{M}{2}\,(\dot{u}^2 + \dot{v}^2) + \frac{I_p}{2}\,\dot{r}^2 + \frac{m}{2}\,\dot{\bar{u}}^2 - \frac{A}{2}\,(Du^2 + Cv^2) -$$

$$- \frac{r^2}{2}\,(CJ_y + DJ_x) - \frac{K_{11}}{2}\,(\bar{u}^2 + u^2 + r^2\eta^2 - 2u\bar{u} + 2\bar{u}\,r\eta - 2u\,r\eta)$$

e le equazioni di Lagrange forniscono:

$$M\ddot{u} + (DA + K_{11})\,u - K_{11}\,\bar{u} - K_{11}\,r\eta = 0$$
$$M\ddot{v} + CA\,v = 0$$
$$J_p\ddot{r} + (CJ_y + DJ_x + K_{11}\eta^2)\,r + K_{11}\,\bar{u}\eta - K_{11}\,u\eta = 0$$
$$m\ddot{\bar{u}} + K_{11}\,\bar{u} - K_{11}\,u + K_{11}\,r\eta = 0$$

Ricercando per u, v, r e $\bar{u}$ soluzioni a variabili separate (una funzione statica per una funzione periodica del tempo) si ha:

$$
\begin{aligned}
&- M\lambda^2 u + (DA + K_{11})\, u - K_{11}\, r\eta - K_{11}\, \bar{u} = 0 \\
&- M\lambda^2 v + CA\, v = 0 \\
&- J_p \lambda^2 r + (CJ_y + DJ_x + K_{11}\eta^2) r + K_{11}\, \bar{u}\eta - K_{11}\, u\eta = 0 \\
&- m\lambda^2 \bar{u} + K_{11}\, \bar{u} - K_{11}\, u + K_{11}\, r\eta = 0
\end{aligned}
$$

Dalla seconda si ricava subito:

$$\lambda_3^2 = \frac{CA}{M}$$

Dall'annullamento del determinante dei coefficienti delle rimanenti tre equazioni si ottiene un'equazione di III grado in λ^2 che fornisce le altre tre radici.

4) — Per avere le equazioni di Lagrange in forma separata tale cioè che ciascuna contenga la corrispondente componente lagrangiana conviene mettere l'energia cinetica e l'energia potenziale sotto forma canonica prive cioè di termini rettangoli [1]).

Si perviene così per V e T ad espressioni del tipo:

$$V = \frac{1}{2}\,(\sigma_1^2 q_1^2 + \sigma_2^2 q_2^2 + \sigma_3^2 q_3^2 + \sigma_4^2 q_4^2)$$

$$T = \frac{1}{2}\,(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + \dot{q}_4^2)$$

dove i nuovi coefficienti della V essendo legati ai precedenti da ben note relazioni invariantive, si determinano come radici di un'equazione di quarto grado [2]).

Le equazioni di Lagrange per il moto libero diventano così:

$$\ddot{q}_i + \sigma_i^2 q_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4,)$$

e le σ_i si identificano con le pulsazioni proprie del sistema.

---

[1]) Basterà applicare prima una proporzionalità e successivamente una rotazione la quale rappresentando $T = \text{cost.}$ l'equazione di un'ipersfera con il centro nell'origine, non altera l'espressione dell'energia cinetica.

[2]) Per determinare i coefficienti della trasformazione lineare che ci consente di passare da $u, v \ldots$ a $q_1\, q_2 \ldots$ bisogna ricavare i coseni direttori dei quattro assi dell'iperquadrica (rappresentata da $V = \text{cost}$) rispetto ai vecchi assi.

Per il moto forzato si ha invece:

$$\ddot{q}_i + \sigma_i^2 q_i = Q_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Se F_h è la sollecitazione attiva l'espressione della Q_i sarà:

$$Q_i = \sum_{h=1}^{k} F_h \times \frac{\partial P_h}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

e quindi per es. con riferimento alla Q_1 avremo:

$$Q_1 = F_1 \frac{\partial u}{\partial q_1} + F_2 \frac{\partial v}{\partial q_1} + F_3 \frac{\partial r}{\partial q_1} + F_4 \frac{\partial \bar{u}}{\partial q_1} \qquad (*)$$

Il problema delle oscillazioni libere e forzate è così completamente risolto. È interessante applicare la teoria svolta al caso di un'asta incastrata al piede (schematizzazione di una torre) sollecitata al piede da un effetto sismico.

5) — In questo ordine di idee supponiamo preponderanti le sole componenti orizzontali dello spostamento del blocco e della massa m: caso tipico delle scosse ondulatorie.

Le espressioni di V e T sono:

$$V = \frac{1}{2}(a_{11} u^2 + a_{22} \bar{u}^2 + 2 a_{12} u \bar{u}) \qquad \text{con} \quad a_{11} = DA + K_{11}, \quad a_{22} = 2 a_{12} = K_{11}$$

$$T = \frac{1}{2}(M \dot{u}^2 + m \dot{\bar{u}}^2)$$

che in coordinate normali diventano:

$$V = \frac{1}{2}(\sigma_1^2 q_1^2 + \sigma_2^2 q_2^2)\ ^{1}) \quad ; \quad T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$$

avendo applicato le formule di trasformazione:

$$u = \frac{1}{\sqrt{M}}(q_1 \cos\omega + q_2 \operatorname{sen}\omega)$$

$$\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{m}}(q_1 \operatorname{sen}\omega - q_2 \cos\omega) \qquad \text{con } tg\, 2\omega \quad \frac{K_{11}\sqrt{Mm}}{MK_{11} - m(DA + K_{11})}$$

---

¹) Si ha:

$$\sigma_1^2 = \frac{a_{11}}{M}\cos^2\omega + \frac{a_{22}}{m}\operatorname{sen}^2\omega + \frac{a_{12}}{\sqrt{Mm}}\operatorname{sen} 2\omega$$

$$\sigma_2^2 = \frac{a_{11}}{M}\operatorname{sen}^2\omega + \frac{a_{22}}{m}\cos^2\omega - \frac{a_{12}}{\sqrt{Mm}}\operatorname{sen} 2\omega$$

La funzione di Lagrange vale allora:

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 - \sigma_1^2 q_1^2 + \dot{q}_2^2 - \sigma_2^2 q_2^2\right)$$

e le equazioni corrispondenti porgono immediatamente:

$$\ddot{q}_1 + \sigma_1^2 q_1 = Q_1$$
$$\ddot{q}_2 + \sigma_2^2 q_2 = Q_2$$

Pensiamo ora che il blocco di fondazione venga investito da una onda sismica del tipo $s_0 = r \operatorname{sen} \alpha t$ [1]) che possiede inizialmente una velocità massima e pertanto pericolosissima di valore $\dot{s}_0 = r\alpha$. Le forze di inerzia che nascono in conseguenza di questo effetto sismico sono date da:

$$F_1 = -M\ddot{s}_0 = M r \alpha^2 \operatorname{sen} \alpha t$$
$$F_2 = -m\ddot{s}_0 = m r \alpha^2 \operatorname{sen} \alpha t$$

e le componenti lagrangiane applicando la (*) valgono:

$$Q_1 = \tau\alpha^2 (\sqrt{M} \cos\omega + \sqrt{m} \operatorname{sen}\omega) \operatorname{sen} \alpha t = r\alpha^2 D_1 \operatorname{sen} \alpha t$$
$$Q_2 = \tau\alpha^2 (\sqrt{M} \operatorname{sen}\omega - \sqrt{m} \cos\omega) \operatorname{sen} \alpha t = r\alpha^2 D_2 \operatorname{sen} \alpha t$$

e le equazioni di Lagrange relative al moto forzato diventano:

$$\ddot{q}_1 + \sigma_1^2 q_1 = r\alpha^2 D_1 \operatorname{sen} \alpha t$$
$$\ddot{q}_2 + \sigma_1^2 q_2 = r\alpha^2 D_2 \operatorname{sen} \alpha t \qquad (**)$$

In condizioni di risonanza supposto $\sigma_1 < \sigma_2$ bisogna porre $\alpha = \sigma_1$; quindi l'integrale generale delle (**) vale:

$$q_1 = C_1 \operatorname{sen} \sigma_1 t - \frac{r D_1}{2} \sigma_1 t \cos \sigma_1 t$$
$$q_2 = C_2 \operatorname{sen} \sigma_2 t + \frac{r D_2 \sigma_1^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2} \operatorname{sen} \sigma_1 t \qquad (***)$$

Assumendo come condizioni iniziali:

$$q_1(0) = \dot{q}_1(0) = 0 \qquad q_2(0) = \dot{q}_2(0) = 0$$

le (***) diventano:

$$q_1 = \frac{r D_1}{2} (\operatorname{sen} \sigma_1 t - \sigma_1 t \cos \sigma_1 t)$$
$$q_2 = \frac{r D_2 \sigma_1}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2} \left(\operatorname{sen} \sigma_1 t - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \operatorname{sen} \sigma_2 t\right)$$

[1]) v. A. Danusso. *Sulla statica delle costruzioni asismiche.* Rend. Seminario Matematico e Fisico di Milano. Vol. II, pag. 175 e segg.

Ripassando alle coordinate u e $\bar{u}$ e tenendo conto dei soli termini dipendenti dal tempo [1])

$$\ddot{u} = \frac{\sigma_1 r}{\sqrt{M}} \frac{D_1}{2} \cos\omega \,(2\sigma_1 \operatorname{sen}\sigma_1 t + \sigma_1^2 t \cos\sigma_1 t)$$

$$\ddot{\bar{u}} = \frac{\sigma_1 r}{\sqrt{m}} \frac{D_1}{2} \operatorname{sen}\omega \,(2\sigma_1 \operatorname{sen}\sigma_1 t + \sigma_1^2 t \cos\sigma_1 t)$$

Trascurando ancora il primo termine per $\cos\sigma_1 t = 1$ si ha:

$$u_{max} = \frac{\sigma_1^3 t\, r}{\sqrt{M}} \frac{D_1}{2} \cos\omega$$

$$\ddot{\bar{u}}_{max} = \frac{\sigma_1^3 t\, r}{\sqrt{m}} \frac{D_1}{2} \operatorname{sen}\omega$$

e le corrispondenti forze d'inerzia posto:

$a_0 = r\sigma_1^2$ = massima accelerazione sismica

$n = \frac{\sigma_1 t}{2\pi}$ = numero delle oscillazioni allo istante t:

valgono:

$$F_1 = a_0 \pi n \,(M \cos^2\omega + \sqrt{Mm} \operatorname{sen}\omega \cos\omega)$$

$$F_2 = a_0 \pi n \,(\sqrt{Mm} \operatorname{sen}\omega \cos\omega + m \operatorname{sen}^2\omega)$$

Chiamando con $\mathfrak{M}$ il momento flettente al piede dell'asta raggiunto ad es. nelle più sfavorevoli condizioni accidentali non concomitanti si ha trascurando il momento di F_1 e chiamando con h l'altezza della torre:

$$a_0 \pi n h \,(\sqrt{Mm} \operatorname{sen}\omega \cos\omega + m \operatorname{sen}^2\omega) = \mathfrak{M} \qquad (1)$$

da cui per un certo valore di a_0, corrispondente ad uno dei dodici gradi della Scala Mercalli si ricava il numero critico di periodi ammissibili in condizioni di sincronismo:

$$n = \frac{\mathfrak{M}}{a_0 \pi h \,(\sqrt{Mm} \operatorname{sen}\omega \cos\omega + m \operatorname{sen}^2\omega)}$$

---

[1]) In effetti u e $\bar{u}$ sono costituite da tre termini di cui due rappresentano le elongazioni massime indipendenti dal tempo, trascurabili rispetto al terzo termine dipendente linearmente dal tempo.

da cui non tenendo conto del blocco di fondazione si ricava il noto valore:

$$n = \frac{\mathfrak{M}}{a_0 \pi h m} \quad [1] \qquad (2)$$

6) — Si consideri a titolo di esempio un pilone di calcestruzzo incastrato al piede che abbia le seguenti caratteristiche:

$$h = 40\,m \quad : \quad I = 5\,m^4 \quad : \quad E = 2 \cdot 10^6\,t/m^2$$

con una massa in sommità di $25\,t$.

Il blocco di fondazione sia un parallelepipedo di altezza 2 m. e area 70 m², quindi $M = 350\,t$.

Si ha $tg\,2\omega = -0{,}012$; $F_2 = 89.729\,a_0 n$.

Per un momento $\mathfrak{M} = 10.000\,tm$ si ha:

dalla (1) $a_0 n = 2{,}78$

e dalla (2) $a_0 n = 3{,}18$

e per $a_0 = 0{,}5$ (grado VIII della Scala Mercalli) si ha rispettivamente:

$$n = 5{,}56 \qquad n = 6{,}36$$

Il primo valore è certamente più pericoloso perchè è più facile che il terremoto persista con la stessa frequenza su 5,56 ondulazioni che su 6,36.

Napoli. Istituto di Scienza delle Costruzioni. Settembre 1950.

[1]) v. A. Galli. *Durata limite di una perturbazione asincroma nelle costruzioni asismiche.* Rend. Accademia dei Lincei, gennaio 1948.

La riemanniana del piano triduale

Nota di **Angelo Fadini**, *presentata dal socio* **Nicolò Spampinato**

(adunanza del dì 4 novembre 1950)

Sunto. — Si caratterizza nell' S_8 complesso il sistema lineare di ipersuperficie cubiche invarianti rispetto al sistema lineare di proiettività formanti gruppo determinato dall' algebra dei numeri triduali e si studia la varietà W riemanniana del piano triduale.

1. *Il primo teorema fondamentale.*

Da un teoremà generale del prof. Spampinato [1]) si ricava in particolare il seguente: *l' algebra dei numeri triduali determina nell'* S_8 *complesso un sistema lineare di proiettività a tre parametri omogenei, formanti gruppo,* R_1. *Le matrici dei coefficienti delle proiettività di* R_1 *sono del tipo:*

$$(M) = \begin{Vmatrix} M & O & O \\ O & M & O \\ O & O & M \end{Vmatrix}$$

essendo M *la trasposta della matrice dell' elemento corrente nell' algebra dei numeri triduali ed* O *la matrice quadrata nulla di ordine tre.*

Le varietà invarianti minime del gruppo R_1 generate dai punti generici di S_8 costituiscono una congruenza lineare (S_2) di piani che fornisce una rappresentazione in S_8 del piano triduale. Il piano di tale congruenza (S_2), immagine di un punto $P(X, Y, T)$ del piano triduale, si ottiene congiungendo i tre punti di S_8 le cui coordinate sono le righe della matrice O_P', composta in orizzontale con le matrici degli elementi X, Y, T [2])

2. *Caratterizzazione del gruppo* R_1.

Nel gruppo R_1 coincidono i due gruppi reciproco ed equivalente di cui al teorema generale di Spampinato, perchè l' algebra dei numeri triduali è commutativa.

---

[1]) Spampinato N., *Le riemanniane degli* S_r *ipercomplessi.* Rend. R. Acc. Scienze fis. e mat. di Napoli, Serie 4ª, vol. XIII, 1942-43.

[2]) Fadini A., *Proiettività, polarità e coniche dell'* S_2 *triduale nella 1ª rappresentazione.* Annali dell' Istituto Sup. di Scienze e Lettere di Santa Chiara, Napoli, 1950

Se indichiamo con u_1, u_2, u_3 le unità dell'algebra dei numeri triduali e poniamo:

$$X = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3$$

la matrice (destra o sinistra) di X è:

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 \end{Vmatrix}$$

ne segue che le matrici dei coefficienti delle proiettività del gruppo R sono del tipo:

$$(M) = \begin{Vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & a \end{Vmatrix} \qquad [1]$$

con i parametri omogenei a, b, c variabili nel corpo dei numeri complessi.

L'equazione caratteristica di (M) è: $(a-\rho)^9 = 0$ che ammette la radice nonupla $a = \rho$, alla quale risponde nell'S_8, dove si considerano le coordinate proiettive omogenee $x_1\, x_2\, x_3\, y_1\, y_2\, y_3\, t_1\, t_2\, t_3$, l'$S_5$ di punti uniti di equazioni $x_1 = y_1 = t_1 = 0$, cioè l'S_6, che diremo A, congiungente i vertici $A_2\, A_3\, A_5\, A_6\, A_8\, A_9$ della piramide fondamentale. Abbiamo dunque: *le proiettività del gruppo* R_1 *ammettono come unico spazio di punti uniti l'* S_5 A.

La proiettività di matrice (M) porta il punto $X(x_i\, y_i\, z_i)$ di S_8 nel punto $X'(ax_1, bx_1 + ax_2, cx_1 + ax_3, ay_1, by_1 + ay_2, cy_1 + ay_3, at_1, bt_1 + at_2, ct_1 + a_3)$. Al variare della proiettività nel gruppo R_1, cioè al variare dei parametri a, b, c, il punto X' descrive il piano $X_2 X_3 X$, essendo X_2 il punto di A di coordinate: $(0, x_1, 0, 0, y_1, 0, 0, t_1, 0)$ appartenente al piano α_2 di equazioni:

$$x_1 = x_3 = y_1 = y_3 = t_1 = t_3 = 0$$

ed X_3 il punto di A di coordinate: $(0, 0, x_1, 0, 0, y_1, 0, 0, t_1)$ appartenente al piano α_3 di equazioni:

$$x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = t_1 = t_2 = 0.$$

I punti X_2 di α_2 ed X_3 di α_3 si corrispondono in una proiettività φ. Il

piano $\pi \equiv X_2 X_3 X$ è dunque la varietà invariante minima di R_1 passante per il punto X generico di S_3. I punti X_2, X_3 e quindi il piano π sono indeterminati quando e solo quando il punto X appartiene all'S_5 A. Viceversa fissato nell'S_5 A due punti $X_1 (0, a, 0, 0, b\, 0, 0, c, 0)$ ed $X_2 (0, 0\, a, 0, 0, b, 0, 0, c)$, i punti X di S_3, fuori dell'S_5 A, il cui punto omologo X' determina con la retta $X_2 X_3$ un piano passante per X, sono tutti e soli i punti aventi la prima, la quarta e la settima coordinata proporzionale ad a, b e c; tali punti X riempono pertanto l'S_6 β di equazioni:

$$\frac{x_1}{a} = \frac{y_1}{b} = \frac{t_1}{c} \qquad [3]$$

Questo S_6 passa per A e si riconosce agevolmente che tramite le [3] è possibile stabilire una proiettività Ψ tra i punti X_2 di α_2 e gli S_6 β della stella di centro A. Risulta perciò: le varietà invarianti minime del gruppo R_1 sono tutti e soli i piani di S_3 appoggiati al piano α_2 in X_2 ed al piano α_3 nel punto X_3, omologo di X_2 in φ e giacenti nell'S_6 β, omologo nella proiettività ψ del punto X_2 di α_2.

3. *Il sistema lineare di ipersuperficie cubiche di* S_3 *composto mediante la congruenza* (S_2).

Da un teorema dello Spampinato si deduce in particolare che: *i piani della congruenza* (S_2), *immagine dell'* S_2 *triduale, appoggiati ad un* S_5, *costituiscono un'ipersuperficie cubica la cui equazione si ottiene eguagliando a zero il determinante di ordine nove avente per prime righe le righe della matrice* O_p *della terna* (X, Y, T) *di elementi correnti nell'algebra e per rimanenti righe le coordinate di sei punti indipendenti dell'* S_3.

Pertanto l'equazione delle superficie in esame è la seguente:

$$\begin{gathered}
A_{123} x_1^3 + A_{456} y_1^3 + A_{789} t_1^3 + (A_{126} - A_{135} + A_{234}) x_1^2 y_1 + \\
+ (A_{129} + A_{138} + A_{237}) x_1^2 t_1 + (A_{156} - A_{246} + A_{345}) x_1 y_1^2 + \\
+ (A_{459} + A_{567} - A_{468}) y_1^2 t_1 + (A_{489} - A_{579} - A_{678}) y_1 t_1^2 + \\
+ (A_{189} - A_{279} - A_{378}) x_1 t_1^2 + (A_{159} - A_{168} - A_{249} + A_{267} - A_{357} + A_{348}) x_1 y_1 t_1 + \\
+ A_{238} (x_1^2 t_2 - x_1 x_2 t_1) + A_{235} (x_1^2 y_2 - x_1 x_2 y_1) + A_{236} (x_1^2 y_3 - x_1 x_3 y_1) + \\
+ A_{239} (x_1^2 t_3 - x_1 x_3 t_1) + A_{256} (x_2 y_1^2 - x_1 y_1 y_2) + A_{259} (x_2 y_1 t_1 - x_1 y_2 t_1) + \\
+ A_{268} (x_2 y_1 t_1 - x_1 y_1 t_2) + A_{269} (x_1 y_1 t_3 - x_1 y_3 t_1) + A_{289} (x_2 t_1^2 - x_1 t_1 t_2) + \\
+ A_{356} (x_3 y_1^2 - x_1 y_1 y_3) + A_{358} (x_1 y_2 t_1 - x_1 y_1 t_2) + A_{359} (x_3 y_1 t_1 - x_1 y_1 t_3) + \\
+ A_{368} (x_1 y_3 t_1 - x_3 y_1 t_1) + A_{389} (x_3 t_1^2 - x_1 t_1 t_3) + A_{568} (y_1^2 t_2 - y_1 y_2 t_1) + \\
+ A_{569} (y_1^2 t_3 - y_1 y_3 t_1) + A_{589} (y_2 t_1^2 - y_1 t_1 t_2) + A_{689} (y_3 t_1^2 - y_1 t_1 t_3) = 0
\end{gathered}$$

Al variare dei coefficienti A_{ijk}, cioè al variare dell'S_5 a cui si appoggiano i piani della congruenza, la ipersuperficie rappresentata dall'equazione precedente varia in un sistema lineare che possiamo studiare esaminando un sistema più ampio la cui equazione si ottiene uguagliando a

zero una combinazione lineare dei minori di 3° ordine estratti dalla matrice O_P. Consideriamo dunque il sistema lineare ∞^{27}, che indicheremo con (V), di ipersuperficie cubiche di equazione:

$$\lambda_1 x_1^3+\lambda_2 y_1^3+\lambda_3 t_1^3+\lambda_4 x_1^2 y_1+\lambda_5 x_1^2 t_1+\lambda_6 x_1 y_1^2+\lambda_7 x_1 t_1^2+\lambda_8 x_1 y_1 t_1+$$
$$+\lambda_9 y_1^2 t_1+\lambda_{10} y_1 t_1^2+\lambda_{11}(x_1 x_2 y_1-x_1^2 y_2)+\lambda_{12}(x_1 x_3 y_1-x_1^2 y_3)+\lambda_{13}(x_1 x_2 t_1-x_1^2 t_2)+$$
$$+\lambda_{14}(x_1 x_3 t_1-x_1^2 t_3)+\lambda_{15}(y_1^2 x_2-x_1 y_1 y_2)+\lambda_{16}(x_2 y_1 t_1-x_1 y_2 t_1)+$$
$$+\lambda_{17}(x_2 y_1 t_1-x_1 y_1 t_2)+\lambda_{18}(x_1 y_3 t_1-x_1 y_1 t_3)+\lambda_{19}(x_2 t_1^2-x_1 t_1 t_2)+\lambda_{20}(x_3 y_1^2-x_1 y_1 y_3)+$$
$$+\lambda_{21}(x_1 y_2 t_1-x_1 y_1 t_2)+\lambda_{22}(x_3 y_1 t_1-x_1 y_1 t_3)+\lambda_{23}(x_3 y_1 t_1-x_1 y_3 t_1)+$$
$$+\lambda_{24}(x_3 t_1^2-x_1 t_1 t_3)+\lambda_{25}(y_1 y_2 t_1-y_1^2 t_2)+\lambda_{26}(y_1 y_3 t_1-y_1^2 t_3)+\lambda_{27}(y_2 t_1^2-y_1 t_1 t_2)+$$
$$+\lambda_{28}(y_3 t_1^2-y_1 t_1 t_3)=0 \qquad [4]$$

Ogni ipersuperficie del sistema passa per l'S_5 A a cui si appoggiano tutti i piani della congruenza (S_2). Ciò risulta dalla definizione stessa della ipersuperficie V ed anche osservano che per $x_1=y_1=t_1=0$ la [4] è soddisfatta qualunque siano le λ. Ma c'è di più: l'S_5 A è doppio per tutte le ipersuperficie V del sistema. L'ipercono tangente alla V nel punto $P(0, a, b, 0, c, d, 0, e, f)$, generico di A, ha l'equazione:

$$b_{11} x_1^2+2 b_{14} x_1 y_1+b_{44} y_1^2+2 b_{17} x_1 t_1+2 b_{47} y_1 t_1+b_{77} t_1^2=0 \qquad [5]$$

con la b_{ij} funzioni lineari di a, b, c, d, e, f. Questo ipercono ha per vertice A e per generatrici gli S_6 β che da A proiettano i punti della conica γ_1 di equazioni [5] giacente nel piano α_1 di equazioni:

$$x_2=x_3=y_2=y_3=t_2=t_3=0$$

In particolare l'ipercono tangente in un punto $P_2(0, a, 0, 0, c, 0, 0, e, 0)$ di α_2 ha l'equazione:

$$(\lambda_{11} c+\lambda_{13} e) x_1^2-[\lambda_{14} a-\lambda_{15} c-(\lambda_{17}+\lambda_{21}) e] x_1 y_1-(\lambda_{15} a-\lambda_{25} e) y_1^2+$$
$$-\lambda_{13} a+(\lambda_{21}-\lambda_{16}) c-\lambda_{19} e] x_1 t_1+[\lambda_{16}+\lambda_{17}] a+\lambda_{25} c-\lambda_{27} e] y_1 t_1+$$
$$-(\lambda_{19} a+\lambda_{27} c) t_1^2=0$$

che è identicamente soddisfatta rispetto alle λ dai volori $x_1=a, y_1=c$ $t_1=e$ e dunque: *l'ipercono tangente alla generica ipersuperficie del sistema* (V) *in un punto* P_2 *di* α_2 *contiene oltre l'* S_5 A, *l'* S_6 β *omologo di* P_2 *in* Ψ. Analogamente si riscontra che l'ipercono tangente alla generica V in un punto P_3 di α_3 contiene, oltre A, l'S_6 β omologo di P_3 nella corrispondenza prodotto di φ^{-1} per Ψ.

Si dimostra che le proprietà riscontrate caratterizzano il sistema (V) in quanto un'ipersuperficie cubica dell'S_8 che debba contenere l'S_5 A come doppio, che in ogni punto $P_2(o\,\alpha\,o\,o\,\gamma\,o\,o\,\varepsilon\,o)$ di α_2 debba avere l'ipercono tangente passante per $P_1(\alpha\,o\,o\,\gamma\,o\,o\,\varepsilon\,o\,o)$ e che in ogni punto $P_3(o\,o\,\beta\,o\,o\,\delta\,o\,o\,\eta)$ di α_3 debba avere l'ipercono tangente passante per $P_1(\beta\,o\,o\,\delta\,o\,o\,\eta\,o\,o)$ ha l'equazione del tipo [4].

4. *Equazioni parametriche della riemanniana del piano triduale.*

Mettendo in corrispondenza proiettiva le ipersuperficie del sistema ∞^{27} (V) con gl'iperpiani di un S_{27}, ad ogni piano π della congruenza (S_3) si viene a far corrispondere un punto P' di S_{27} e precisamente se $P(x_i y_i t_i)$ è un punto di S_3, fuori di A, al piano π della congruenza (S_3) passante per P corrisponde il punto $P'(x'_1 \dots x'_{28})$ di S'_{27} con le coordinate:

$$
\begin{aligned}
x'_1 &= x_1^3 & x'_{15} &= y_1 (x_2 y_1 - x_1 y_2) \\
x'_2 &= y_1^3 & x'_{16} &= t_1 (x_2 y_1 - x_1 y_2) \\
x'_3 &= t_1^3 & x'_{17} &= y_1 (x_3 t_1 - x_1 t_3) \\
x'_4 &= x_1^2 y_1 & x'_{18} &= x_1 (y_3 t_1 - y_1 t_3) \\
x'_5 &= x_1^2 t_1 & x'_{19} &= t_1 (x_2 t_1 - x_1 t_2) \\
x'_6 &= x_1 y_1^2 & x'_{20} &= y_1 (x_3 y_1 - x_1 y_3) \\
x'_7 &= x_1 t_1^2 & x'_{21} &= x_1 (y_2 t_1 - y_1 t_2) \\
x'_8 &= x_1 y_1 t_1 & x'_{22} &= y_1 (x_3 t_1 - x_1 t_3) \\
x'_9 &= y_1^2 t_1 & x'_{23} &= t_1 (x_2 y_1 - x_1 y_3) \\
x'_{10} &= y_1 t_1^2 & x'_{24} &= t_1 (x_3 t_1 - x_1 t_3) \\
x'_{11} &= x_1 (x_2 y_1 - x_1 y_2) & x'_{25} &= y_1 (y_2 t_1 - y_1 t_2) \\
x'_{12} &= x_1 (x_3 y_1 - x_1 y_3) & x'_{26} &= y_1 (y_3 t_1 - y_1 t_3) \\
x'_{13} &= x_1 (x_2 t_1 - x_1 t_2) & x'_{27} &= t_1 (y_2 t_1 - y_1 t_2) \\
x'_{14} &= x_1 (x_3 t_1 - x_1 t_3) & x'_{28} &= t_1 (y_3 t_1 - y_1 t_3)
\end{aligned}
\qquad [7]
$$

Le [7] sono le equazioni parametriche, con i nove parametri sovrabbondanti ed omogenei $x_1 x_2 x_3 y_1 y_2 y_3 t_1 t_2 t_3$, di una varietà W dell'S'_{27}. Ad ogni piano π della congruenza corrisponde un determinato punto P' di W che si ottiene dalle [7] sostituendo alle $x_1 x_2 x_3 y_1 y_2 y_3 t_1 t_2 t_3$ le coordinate di un qualunque punto di π preso però fuori della retta p lungo la quale π si appoggia ad A, condizione quest'ultima, realizzata se le $x_1 y_1 t_1$ non sono tutte nulle, ed essenziale perchè per $x_1 = y_1 = t_1 = 0$ le $x'_1 \dots x'_{28}$ risulteranno *tutte* nulle, e quindi il punto P' di W rimane indeterminato.

Esclusi dalla W i punti che provengono dai punti singolari della congruenza (S_3), la varietà W' che si ottiene è la riemanniana del piano triduale, perchè in essa si rappresentano, senza eccezioni, i piani della congruenza (S_3) e quindi i punti del piano triduale. Dunque:

Le equazioni parametriche della riemanniana W' *del piano triduale, di dimensione complessa 6, con i nove parametri omogenei sovrabbandanti:* $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, t_1, t_2, t_3$ *sono date dalle* [7], *con la condizione che i tre parametri* $x_1\ y_1\ t_1$ *non siano tutti nulli.*

La corrispondenza binunivoca, senza eccezioni, che nasce fra la congruenza di piani (S_3) *di* S_3 *e la riemanniana* W', *chiamando corrispondenti un piano* π *di* (S_3) *ed un punto* P' *di* W', *che siano immagini di uno stesso punto del piano triduale, è tale che alle sezioni iperpiane di* W' *rispondono le ipersuperficie cubiche del sistema* (V), *composto mediante la congruenza* (S_3).

5) *Terza rappresentazione complessa del piano triduale.*

Seguendo il metodo generale indicato dal prof. SPAMPINATO nel terzo teorema fondamentale della memoria citata, si può avere una terza rappresentazione del piano triduale, però con eccezioni, in un S_6 complesso, intersecando la congruenza di piani (S_2) di S_8 con un S_6 non passante per A. Avremo così in tale S_6 la rappresentazione della congruenza assumendo come immagine di un piano π della congruenza il punto in cui π seca l'S_6.

In tal modo avremo nell'S_6 la rappresentazione del piano triduale e quella della sua riemanniana W'. Le sezioni iperpiane della W' risponderanno alle ipersuperficie di S_6 sezioni delle ipersuficie V del sistema (V).

Poichè A è l'S_5 congiungente i punti $A_2\ A_3\ A_5\ A_6\ A_8\ A_9$ della piramide fondamentale, come S_6 non passante per A possiamo scegliere quello di equazioni

$$t_2 = t_3 = 0$$

che diremo μ e che interseca A nell'S_3 R di equazioni:

$$x_1 = y_1 = t_1 = t_2 = t_3 = 0 \qquad [8]$$

congiungente i 4 punti fondamentali A_2, A_3, A_5, A_6. Questo S_3 R taglia i piani α_2 ed α_3 rispettivamente lungo le due rette $a_2 \equiv A_2 A_5$ ed $a_3 \equiv A_3 A_6$.

Ponendo allora nelle [7] $t_2 = t_3 = 0$ si otteranno le equazioni parametriche della varietà W' di S_6 con i sette parametri omogenei $x_1\ x_2\ x_3\ y_1\ y_2\ y_3\ t_1$; esse sono:

$$\left\{\begin{array}{lll}
x'_1 = x_1^3 & x'_2 = y_1^3 & x'_3 = t_1^3 \\
x'_4 = x_1^2 y_1 & x'_5 = x_1^2 y_1 & x'_6 = x_1 y_1^2 \\
x'_7 = x_1 t_1^2 & x'_8 = x_1 y_1 t_1 & x'_9 = y_1^2 t_1 \\
x'_{10} = y_1 t_1^2 & x'_{11} = x_1 (x_2 y_1 - x_1 y_2) & x'_{12} = x_1 (x_3 y_1 - x_1 y_3) \\
x'_{13} = x_1 x_2 t_1 & x'_{14} = x_1 x_3 t_1 & x'_{15} = y_1 (x_2 y_1 - x_1 y_2) \\
x'_{16} = t_1 (x_2 y_1 - x_1 y_2) & x'_{17} = x_2 y_1 t_1 & x'_{18} = x_1 y_3 t_1 \\
x'_{19} = x_2 t_1^2 & x'_{20} = y_1 (x_3 y_1 - x_1 y_3) & x'_{21} = x_1 y_2 t_1 \\
x'_{22} = x_3 y_1 t_1 & x'_{23} = t_1 (x_3 y_1 - x_1 y_3) & x'_{24} = x_3 t_1^2 \\
x'_{25} = y_1 y_2 t_1 & x'_{26} = y_1 y_3 t_1 & x'_{27} = y_2 t_1^2 \\
x'_{28} = y_3 t_1^2 &&
\end{array}\right. \qquad [7']$$

Queste formole forniscono i punti della riemanniana W' rispondenti ai piani della congruenza che segano l'S_6 *fuori* dell'S_3 R comune ad A ed all'S_6 stesso, perchè i punti di tale S_3 hanno $x_1 = y_1 = t_1 = 0$ e quindi in corrispondenza ad essi le x'_i risultano tutte nulle.

Osserviamo che mentre nel caso della rappresentazione della varietà W' in S_8 mediante le [7], escludendo da W' i punti rispondenti all'S_5 A (cioè imponendo la condizione x_1, x_2, x_3, non tutti nulli) si ottengono *tutti* i punti rispondenti ai piani della congruenza (S_2), in questo caso invece, rappresentando la W' nell'S_6, mediante le [7'] non si possono escludere tutti i punti di W rispondenti all'S_6 R, per ottenere la riemanniana W', perchè si verrebbero a perdere i punti di W' rispondenti ai piani della congruenza appoggiati ad R. Più innanzi stabiliremo quali sono i punti dell'S_3 R che rispondono ai punti di W che bisogna escludere per avere la riemanniana W'.

Un'ipersuperficie V del sistema (V) è secata dall'S_6 in una ipersuperficie cubica Q passante per l'S_3 R, dato che V passa per A, anzi avente tale S_3 doppio.

Inoltre l'ipercono tangente alla generica ipersuperficie del sistema in un punto P_2 $(o\,\alpha\,o\,o\,\gamma\,o\,o)$ della retta a_2 di α_2 contiene, oltre l'S_3 R, l'S_4 che da R proietta il punto P_1 $(\alpha\,o\,o\,\gamma\,o\,o\,o)$ di α_1; S_4 che è omologo di P_2 nella proiettività Ψ' subordinata dalla Ψ nell'S_6 di equazioni: $t_2 = t_3 = 0$.

Analogamente l'ipercono tangente alla generica ipersuperficie del sistema in un punto P_3 $(o\,o\,\beta\,o\,o\,\delta\,o)$ della retta a_3 di α_3 contiene, oltre l'S_3 R, l'S_4 che da R proietta il punto P_4 $(\beta\,o\,o\,\delta\,o\,o\,o)$; S_4 che è l'omologo di P_3 nella corrispondenza $(\varphi^{-1}\,\psi)'$ subordinata dalla $\varphi^{-1}\,\psi$ nell'S_6 in esame.

Inoltre le rette della piramide fondamentale: $A_1\,A_2$, $A_1\,A_3$, $A_4\,A_5$ ed $A_4\,A_6$ sono tangenti alla generica V_5^3 rispettivamente nei punti doppi A_2, A_3, A_5 ed A_6.

Si può riscontrare che tali proprietà sono caratteristiche e che cioè una ipersuperficie cubica di S_6 che goda di tali proprietà ha l'equazione [4] con $t_2 = t_3 = 0$.

6) *Stelle generatrici della congruenza* (S_2) *e piani generatori della* W.

I piani π della congruenza (S_2) uscenti da un punto P_2 di α_2, e quindi dalla retta $P_2\,P_3$ dell'S_5 A, sono tutti e soli i piani della stella ∞^4, di vertice $P_2\,P_3$, ed appartenente all'S_6 β omologo di P_2 in Ψ, esclusi quelli giacenti nell'S_5 A.

Tale stella di piani corrisponde ad un S_4 di W. Infatti i piani della stella appartenenti a due ipersuperficie di (V) sono i piani uscenti da $P_2\,P_3$, appoggiati ai due S_5 determinanti le due ipersuperficie, cioè ai due S_3 che tali S_3 segnano nell'S_6 β ambiente della stella. Di tali piani non ne esiste che uno: quello che congiunge $P_2\,P_3$ col punto comune ai due S_3 considerati. Ciò vuol dire che l'S_6 di S_8, intersezione dei due iperpiani rispondenti alle due ipersuperficie V, seca il luogo dei punti di W, rispondenti ai piani della stella, in un punto; cioè la W_4 intersezione della W_6 col detto S_6 è lineare ed è quindi un S_4. Tale S_4 dicesi S_4 *generatore* della W.

Siano: $\frac{x_1}{\alpha} = \frac{y_1}{\beta} = \frac{t_1}{\gamma}$ le equazioni dell'S_6 ambiente della stella, i punti P_2 e P_3 che individuano la retta p, vertice della stella di piani, hanno rispettivamente le coordinate: $(o\,\alpha\,o\,o\,\beta\,o\,o\,\gamma\,o)$ e $(o\,o\,\alpha\,o\,o\,\beta\,o\,o\,\gamma)$; un punto P corrente nell'S_6 ha le coordinate $\rho\alpha, x_2, x_3, \rho\beta, y_2, y_3, \rho\gamma, t_2, t_3)$. Dentro questo S_6 possiamo considerare come coordinate omogenee di P $(\rho, x_2, x_3, y_2, y_3, t_2, t_3)$. L'equazione $\rho = 0$ rappresenta, in tale S_6, l'S_3 A. Per le [7] al punto P di S_6 ora considerato risponde, nella varietà W, il punto P' di coordinate:

$$\left\{\begin{array}{llll}
x'_1 = \rho\alpha^3 & , & x'_2 = \rho\beta^3 & , \quad x'_3 = \rho\gamma^3 \quad , \quad x'_4 = \rho\alpha^2\beta \\
x'_5 = \rho\alpha^2\gamma & , & x'_6 = \rho\alpha\beta^2 & , \quad x'_7 = \rho\alpha\gamma^2 \quad , \quad x'_8 = \rho\alpha\beta\gamma \\
x'_9 = \rho\beta^2\gamma & , & x'_{10} = \rho\beta\gamma^2 & , \quad x'_{11} = \alpha(\beta x_2 - \alpha y_2) \\
x'_{12} = \alpha(\beta x_3 - \alpha y_3) & , & & x'_{13} = \alpha(\gamma x_2 - \alpha t_2) \\
x'_{14} = \alpha(\gamma x_3 - \alpha t_3) & , & & x'_{15} = \beta(\beta x_2 - \alpha y_2) \\
x'_{16} = \gamma(\beta x_2 - \alpha y_2) & , & & x'_{17} = \beta(\gamma x_2 - \alpha t_2) \\
x'_{18} = \alpha(\gamma y_3 - \beta t_3) & , & & x'_{19} = \gamma(\gamma x_2 - \alpha t_2) \\
x'_{20} = \beta(\beta x_3 - \alpha y_3) & , & & x'_{21} = \alpha(\gamma y_2 - \beta t_2) \\
x'_{22} = \beta(\gamma x_3 - \alpha t_3) & , & & x'_{23} = \gamma(\beta x_3 - \alpha y_3) \\
x'_{24} = \gamma(\gamma x_3 - \alpha t_3) & , & & x'_{25} = \beta(\gamma y_2 - \beta t_2) \\
x'_{26} = \beta(\gamma y_3 - \beta t_3) & , & & x'_{27} = \gamma(\gamma y_2 - \beta t_2) \\
x'_{28} = \gamma(\gamma y_3 - \beta t_3) & , &
\end{array}\right. \qquad [9]$$

Le [9] sono pertanto le equazioni parametriche dell'S_3 generatore di W, rispondente alla stella generatrice considerata, con i parametri omogenei $(\rho, x_2, x_3, y_2, y_3, t_2, t_3)$.

Per $\rho = 0$ le [9] danno:

$$x'_1 = x'_2 = x'_3 = x'_4 = x'_5 = x'_6 = x'_7 = x'_8 = x'_9 = x'_{10} = 0 \qquad [10]$$

e dalle 17 ultime equazioni [9] si ricava:

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{x'_{12}}{\alpha} = \frac{x'_{20}}{\beta} = \frac{x'_{23}}{\gamma} = \beta x_3 - \alpha y_3 \\
\frac{x'_{11}}{\alpha} = \frac{x'_{15}}{\beta} = \frac{x'_{16}}{\gamma} = \beta x_2 - \alpha y_2 \\
\frac{x'_{13}}{\alpha} = \frac{x'_{17}}{\beta} = \frac{x'_{19}}{\gamma} = \gamma x_2 - \alpha t_2 \\
\frac{x'_{14}}{\alpha} = \frac{x'_{22}}{\beta} = \frac{x'_{24}}{\gamma} = \gamma x_3 - \alpha t_3 \\
\frac{x'_{18}}{\alpha} = \frac{x'_{21}}{\beta} = \frac{x'_{28}}{\gamma} = \gamma y_3 - \beta t_3 \\
\frac{x'_{21}}{\alpha} = \frac{x'_{25}}{\beta} = \frac{x'_{27}}{\gamma} = \gamma y_2 - \beta t
\end{array}\right. \qquad [11]$$

Equazioni parametriche di un S_3 di S_4, con i parametri a due a due omogenei $x_2 x_3 y_2 y_3 l_2 l_3$.

Dunque ai piani della stella contenuti nell'S_5 A, corrisponde un S_3 dell'S_4 generatore, appartenente all'S_5 δ, di equazioni [10], [11]; al variare dell'S_4 generatore questo S_3 di appoggio descrive l'S_5 δ, in cui varia.

Nella rappresentazione di W nell'S_6: μ, gli S_4 generatori rispondono agli S_4 passanti per l'S_3 fondadamentale R (intersezioni degli S_6 della stella di vertice A con l'S_6 μ). Sicchè è all'S_3 R che corrisponde nell'S_4 generatore l'S_3 posto in δ.

Possiamo quindi affermare: *La varietà W di dimensioni 6 è costituita da ∞^2 S_4 generatori secanti in un S_3 un S_5 fisso δ. La varietà W' riemanniana del piano triduale, si ottiene da W sopprimendo lo $S_5\delta$.* Segue che.

Due S_4 generatori di W si secano in una retta di δ (retta intersezione dei due S_3 nei quali i due S_4 generatori tagliano l'$S_5\delta$).

Due S_4 generatori di W' non hanno alcun punto in comune.

7. *L'ordine della W_6.*

L'ordine della W_6, che è rappresentata nell'S_6 μ dal sistema lineare (Q) di ipersuperficie, si può determinare calcolando il grado del sistema (Q).

A tal fine basta determinare il numero di punti nei quali si tagliano, fuori dei punti base, sei ipersuperficie Q del sistema.

Tre $Q^3{}_5$ s'intersecano in una $W_3{}^{27}$ spezzata nell'S_3 R, contato otto volte, ed in una residua $V_3{}^{19}$. Per determinare la varietà di appoggio di questa $V_3{}^{19}$ all'S_3 R, seghiamo le tre $Q^3{}_5$ con un S_5 passante per R, si ottengono tre $V_4{}^3$ ciascuna delle quali contiene R come doppio. Due di tali $V_4{}^3$ s'intersecano in una $V_3{}^9$ spezzata nell'S_3 contato quattro volte ed in una residua $V_3{}^5$. Questa varietà, a sua volta si appoggia ad R. Infatti un S_4 dell'S_5 considerato, passante per R, taglia le due $V_4{}^3$ in due $V^3{}_3$, ciascuna spezzata in R, contato due volte ed in residuo S_3, che ha in R un piano Ciò porta che la $V_3{}^5$ è secata dall'S_4 considerato in una $V_2{}^5$ spezzata in una piano ed in una residua $V_2{}^4$ giacente in R. Dunque la $V_3{}^5$ in esame ha in R qnesta $V_2{}^4$ e quindi le tre $V_4{}^3$ di S_5 si secano, fuori di R, in una $V_2{}^7$; ma allora l'intersezione della $V_3{}^{19}$ con l'S_5 in esame, si spezza in una $V_2{}^7$ fuori di R ed in una $V_2{}^{12}$ in R.

L'interezione di questa $V_3{}^{19}$ con una quarta $Q_5{}^3$ è una $V_2{}^{37}$ che si spezza nella $V_2{}^{12}$, contata due volte, ed in una residua $V_2{}^{33}$. Anche questa varietà si appoggia ad R. Ed invero un S_5 per R taglia le quattro $Q_5{}^3$ in quattro $V_4{}^3$ e tre di queste, come si è visto si tagliano, fuori di R in una $V_2{}^7$; quindi l'intersezione delle 4 Q con l'S_5 è fuori di R, una $V_1{}^{21}$ dalla quale bisogna staccare la curva che la $V_2{}^7$ ha in R, contata due volte. Per determinare tale curva consideriamo un S_4 di S_5 passante per R, esso taglia le tre $V_4{}^3$ di S_5 in tre $V_3{}^3$ ciascuna spezzata in R doppio ed in un residuo S_3 che ha in R un piano. I tre S_3 semplici delle tre $V_3{}^3$ hanno

in comune fuori di R nua retta. Ciò porta che l'intersezione dell'S_4 con la V_2^7 si spezza in una retta fuori di R, ed in una residua curva C^6 appartenente ad R. Dunque la V_2^7 ha in R una C^6 e quindi l'S_5 seca le quattro ipersuperficie Q, fuori di R, in una V_1^9, ma tale S_5 taglia la V_2^{33} in una V_4^{33}, questa allora si spezza nella V_4^9 che è fuori di R, ed in una residua V_1^{24} appartenente ad R. Dunque la V_2^{33} ha in R una V_1^{24}.

Infine l'intersezione della V_2^{33} con una quinta Q_5^3 è una V_1^{90} che si spezza nella V_4^{24} di R contata due volte ed in una residua V_1^{51}, che ha un gruppo di punti in R.

Per determinarlo consideriamo al solito un S_5 che sechi le cinque Q_5^3 in cinque V_4^3, quattro delle quali, come si è visto, si tagliano fuori di R in una V_1^9. Questa con la quinta V_4^3 determina 27 punti, dai quali bisogna escludere quelli che la V_1^9 ha in R contati due volte.

Orbene si è visto che un S_4 per R di S_5 seca le V_4^3 in V_3^3 spezzate, e che tre di queste hanno in comune fuori di R una retta che si appoggia in un punto ad R; dunque le quattro V_3^3 di S_4 hanno fuori di R un sol punto comune. Ciò porta che dei 9 punti d'intersezione dell'S_4 e della V_4^9 otto sono in R. Dunque le cinque V_4^3 si S_5 hanno in comune, fuori di R, 11 punti.

Poichè l'S_5 in esame seca la V_1^{51} in 51 punti, vuol dire che di questi solo 11 sono fuori di R (e 40 in R).

Possiamo dunque affermare che il grado del sistema è 11. Tale è quindi anche l'ordine della W_6.

Su alcune proprietà caratteristiche delle reti

Nota del dr. **Andrea Russo Spena**, *presentata dal socio corrisp.* **G. Ippolito**

(Adunanza del dì 4 novembre 1950)

Sunto. — Si enunciano e si dimostrano alcune proprietà fondamentali delle reti di distribuzione di fluidi incomprimibili.

In due studi precedenti [1] [2], ho enunciato alcuni teoremi fondamentali che presiedono al moto dei fluidi di qualsiasi natura, purchè incomprimibili, nelle reti di distribuzione. Mi propongo ora nel darne la dimostrazione, del resto fisicamente evidente e per altra via già dimostrata per le reti elettriche [3] [4], di chiarire alcune posizioni da me precedentemente fatte e di trarre delle conclusioni che mi sembrano concettualmente di un certo interesse.

In quanto segue attribuirò alle diciture *nodo*, *lato*, *maglia* e *rete*, i significati ricorrenti in Elettrotecnica. In armonia agli studi citati, al posto delle locuzioni ricorrenti in Elettrotecnica: conduttore, intensità di corrente, caduta di potenziale e potenziale; mi avvarrò delle corrispondenti in Idraulica: condotta, portata, perdita di carico e quota piezometrica.

Ammetterò sistematicamente che il fluido muova nella rete senza scambi di energia e che le dissipazioni di energia per unità di peso lungo ogni lato siano esclusivamente dovute alle resistenze di attrito ed espresse da una relazione monomia del tipo:

$$h_i = r_i \, q_i^{\alpha} \tag{1}$$

essendo h_i la *perdita di carico* nella condotta generica di resistenza complessiva r_i percorsa dalla corrente di portata costante q_i ed α l'esponente

---

[1] Russo Spena A. *Metodi approssimati per la risoluzione dei problemi di verifica delle reti di distribuzione*, Ann. Lavori Pubblici, ottobre 1950.

[2] Russo Spena A. *Metodi approssimati per la risoluzione del problema di progetto delle reti di distribuzione*. In corso di pubblicazione.

[3] Lombardi L. *Principi Scientifici di Elettrotecnica*. Ed. Pironti, 1928. Napoli.

[4] Giorgi G. *Lezioni di Fisica matematica*. Sampaolesi, 1927. Roma.

caratteristico della legge di resistenza; in pratica pari a 2 per le resistenze idrauliche [1]). In quanto andrò a dire riterrò che α abbia valore qualsiasi.

Con dicitura sintetica chiamerò *portate esterne* le portate che affluiscono direttamente dall'esterno alla rete o ne defluiscono verso l'esterno attraverso i nodi.

Indicherò con i simboli: $\sum_I$; $\sum_K$; $\sum_I$, rispettivamente la somma di grandezze che si riferiscono a tutti i lati della rete, solo a quei lati che concorrono nel nodo generico I o appartengono alla maglia generica K.

Definirò infine *distribuzione congruente di portate* quella per la quale in ogni nodo è soddisfatta la condizione:

$$\sum_I q_i + Q_I = 0 , \tag{2}$$

che la somma delle portate in arrivo rispetto al nodo I, da considerarsi precedute dal segno + e di quelle in uscita, da considerarsi precedute dal segno −, sia nulla.

Analogamente definirò *congruente* quella distribuizione di carichi per la quale lungo ogni circuito chiuso è:

$$\sum_K h_i = 0 \tag{3}$$

nella intesa che, stabilito, un senso di circolazione positivo, ad es. orario le h_i sono da ritenersi positive o negative, secondo che il senso con cui la corrente di portata q_i percorre il lato appartente alla maglia K, è concorde o discorde con quello prestabilito.

Proprietà I

In una rete di conformazione geometrica qualsiasi, il numero di maglie m, aumentato del numero dei nodi n, è pari al numero dei lati l, aumentato di 1:

$$l + 1 = m + n \tag{4}$$

La dimostrazione della (4) è immediata quando la rete si identifica con una maglia $A\,B\,C\,D\,E\,F$ (Fig. 1) o con una poligonale aperta con o senza ramificazioni (Fig. 2), si estende rapidamente al caso di una rete generica. In effetti, se ad una maglia si aggiungono delle ramificazioni $A\,G\,H\,I$,

[1]) Per le resistenze elettriche sarà:

$$h_i = r_i\, q_i$$

denotando h_i le caduta di tensione e q_i l'intensità di corrente

$B\,K\,L\,M$, ecc. (Fig. 1), si perverrà ad una figura geometrica nella quale, risultando egualmente aumentato il numero dei lati e dei nodi della maglia preesistente $A\,B\,C\,D\,E$, la (4) è ancora valida.

Se si congiungono con lati, a due a due, i nodi es. $A\,H$; $B\,L$; $H\,L$, non consecutivi di una ramificazione o di più ramificazioni, (Fig. 1), si perverrà ad una figura geometrica costituita da più maglie e piu ramificazioni per le quali, risultando il numero di maglie AGH; BLK; $AHLBA$, che si sono venute a formare, pari al numero dei lati aggiunti è ancora valida la (4). Se (Fig. 1) si portano a coincidere i nodi estremi I, M, o i nodi intermedi G, I, di due ramificazioni, venendosi a perdere da una parte un nodo e ad acquistarsi dall'altra una maglia si perverrà ad uno schema di rete più complesso di quello precedente, per il quale la (4) è ancora soddisfatta.

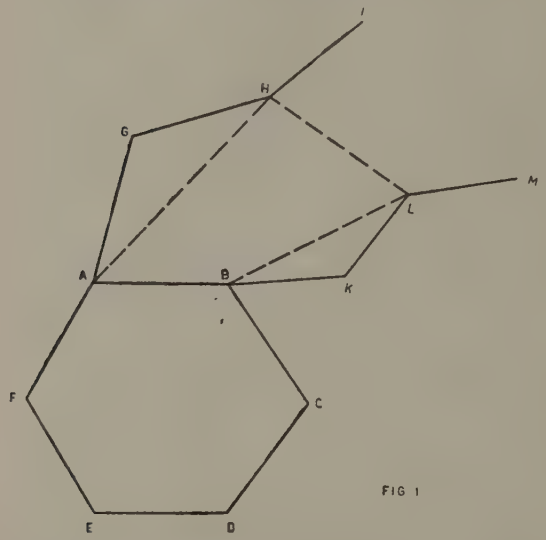


FIG 1

Si può quindi concludere che qualunque siano le trasformazioni modifiche o aggiunte che si possono apportare ad una rete, la (4) è sempre verificata.

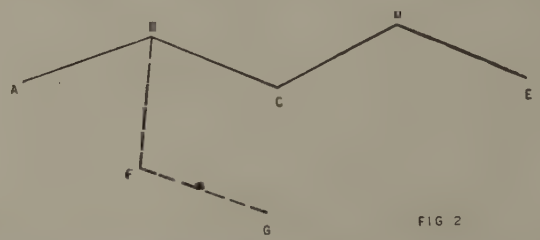


FIG 2

Proprietà II

« In una rete, formata da maglie chiuse in assenza di afflussi dall'esterno o deflussi verso l'esterno, qualunque sistema Sq_i congruente di portate q_i, può essere sempre rappresentato da un sistema di m correnti chiuse: $p_1 \ldots p_k \ldots p_m \ldots$, circolanti ciascuna nella maglia corrispondente »

Infatti, stabilito un senso di circolazione positivo, unico per tutta la rete, si potrà sempre ritenere la portata q_i, che percorre un lato generico, pari alla somma algebrica di due portate d'intensità costante e senso di circolazione incogniti, circolanti lungo le maglie K ed S (Fig. 3) cui il lato considerato appartiene.

Sarà quindi:

$$(5)\qquad \begin{aligned} q_i &= p_k + p_s \\ q_i &= p_k \\ q_i &= p_s \end{aligned}$$

secondo che la portata q_i fluisce lungo il lato, comune alla maglia K ed S, appartiene rispettivamente alla sola maglia K o alla sola maglia S.

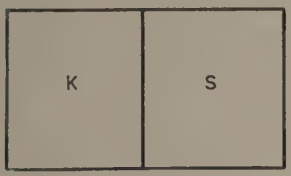


FIG. 3

Le q_i, p_k, p_s, che figurano nella (5) sono da ritenersi grandezze algebriche, positive o negative, secondo che il loro senso di circolazione è concorde o discorde col senso di circolazione prestabilito.

Le m incognite portate risultano così definite attraverso il sistema delle m equazioni lineari indipendenti che si deducono dalla necessaria coesistenza delle l equazioni (5) con le $(n-1)$ relazioni di condizione (2) nelle quali le Q_I sono tutte nulle.

I segni, da cui le $p_1 \dots p_r \dots p_m$ in definitiva risulteranno affette, staranno a precisarne i sensi di circolazione.

Corollario

« In una rete comunque configurata collegata con l'esterno attraverso portate esterne note, si possono stabilire ∞^m possibili distribuzioni Sq'_i congruenti di portate q'_i ».

Infatti, per la proprietà precedente si può passare da una distribuzione Sq'_i congruente di portate per la quale è in ogni nodo:

$$(2)\qquad Q_I + \sum_I q'_i = 0$$

ad altra distribuzione Sq'_i del pari congruente:

$$(2')\qquad Q_I + \sum_I q_i = 0$$

facendo circolare in ciascuna maglia una corrente chiusa di intensità $p_1 \dots p_k \dots p_m$ rispettivamente.

Le portate q_i risulteranno così legate alla q'_i e alle $p_1 \dots p_k \dots p_m$ da relazioni del tipo (5):

$$(5')\qquad \begin{aligned} q_i &= q'_i + p_k + p_s \\ q_i &= q'_i + p_k \\ q_i &= q'_i + p_s . \end{aligned}$$

nella intesa che le q_i, q'_i, p_k, p_s sono da ritenersi precedute dal segno + o —, secondo che il senso di circolazione di ciascuna lungo i lati della maglia cui si riferisce, è concorde o discorde col senso di circolazione positivo ad es. orario, prestabilito per tutta la rete.

* * *

Al variare dei valori e dei sensi delle $p_1 \dots p_m$, variano corrispondentemente i valori delle $q_1 \dots q_i \dots q_l$.

In particolare se si parte sempre da una prestabilita distribuzione Sq'_i congruente di portate arbitrariamente scelta e si fanno variare con continuità le portate $p_1 \dots p_k \dots p_m \dots$, si potranno esprimere tutti i possibili sistemi congruenti Sq_i a mezzo di una funzione di l costanti arbitrarie q'_i, legate fra loro dalla (5') e di m portate $p_1 \dots p_k \dots p_m$, variabili ad arbitrio:

$$(6) \qquad Sq_i = f(q'_1 \dots q'_i \dots q'_l \; ; \; p_1 \dots p_k \dots p_m).$$

Conseguentemente le dissipazioni di potenza E_p che si associano al moto di ciascuna delle possibili distribuzioni di portate nella rete:

$$(7) \qquad E_p = \sum_l r_i \, | \, q_i^{\alpha+1} \, | \, ,$$

risulteranno espresse a mezzo di una funzione ρ continua sempre positiva delle l portate arbitrarie $q'_1 \dots q'_i \dots q'_l$, legate tra loro da relazioni del tipo (5) e delle m variabili portate indipendenti $p_1 \dots p_k \dots p_m$, tante quante sono le maglie della rete, circolanti in ciascuna maglia:

$$(8) \qquad E_p = \rho \, (q'_1 \; ; \dots \; q'_i \; ; \dots q'_l \; ; \; p_1 \dots p_k \dots p_m).$$

Potremo così ricercare nel dominio dello spazio ad m dimensioni $(p_1 \dots p_k \dots p_m)$ nel quale la (8), per valori finiti delle portate circolanti e per $\alpha \geq 1$, è finita continua con derivate prime e seconde del pari finite e continue, il punto di coordinate $\bar{p}_1 \dots \bar{p}_k \dots \bar{p}_m$ nel quale la E_p diviene minima.

La ricerca di questo minimo sarà notevolmente agevolata quando avremo dimostrato che nel dominio considerato la (8) ammette un solo punto estremante. Basterà allo scopo mostrare che la forma quadratica, che in analisi si suole porre [1] [2] nella forma simbolica:

$$(9) \qquad A = \left(\left(\frac{\partial E_p}{\partial p_1} \lambda_1 + \dots + \frac{\partial E_p}{\partial p_k} \lambda_k + \dots + \frac{\partial E_p}{\partial p_m} \lambda_m \right) \right)^2 .$$

---

[1]) Picone M. *Calcolo infinitesimale*. Ed. Gennaro Maio, Napoli, 1925.

[2]) Cisotti N. *Analisi Matematica*. Ed. Tamburini, Milano 1946

è sempre definita positiva e che inoltre il sistema di equazioni necessarie per la esistenza di punti estremanti della (8):

$$\frac{\partial E_p}{\partial p_1} = 0 \ldots \frac{\partial E_p}{\partial p_k} = 0 \ldots \frac{\partial E_p}{\partial p_m} = 0, \tag{10}$$

ammetta m radici reali $p_1 \ldots p_k \ldots p_m$, una per ogni maglia. Infatti dalla (7) si deduce successivamente:

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial p_k^2} = \frac{\partial}{\partial p_k}\left\{\frac{\partial}{\partial p_k}\sum_l r_l\, q_l^{\alpha+1}\right\} = (\alpha+1)\frac{\partial}{\partial p_k}\left\{\sum_l r_l\, q_l^{\alpha}\frac{\partial q_l}{\partial p_k}\right\}$$

e tenendo presente che per la (5') sono identicamente nulle le derivate rispetto a p_k delle portate che non appartengono alla maglia K e che inoltre per questa è:

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_k} = 1 \tag{a}$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_k} = -1, \tag{b}$$

secondo che la corrente di portata q_i è di senso concorde o discorde con quello della p_k, sarà:

$$\frac{\partial}{\partial p_k}\left\{\sum_l (r_l q_l^{\alpha+1})\right\} = (\alpha+1)\sum_k\left[\pm r_l q_l^{\alpha}\right] \tag{11}$$

per cui:

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial p_k^2} = (\alpha+1)\frac{\partial}{\partial p_k}\left\{\sum_k\left[\pm r_l q_l^{\alpha}\right]\right\},$$

in definitiva:

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial p_k^2} = \alpha(\alpha+1)\sum_k r_l\, q_l^{\alpha-1} \tag{12}$$

Dalla (7) discende inoltre successivamente:

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial p_s \partial p_k} = \frac{\partial}{\partial p_s}\left\{\frac{\partial}{\partial p_k}\sum_l r_l\, q_l^{\alpha+1}\right\} = (\alpha+1)\left\{\frac{\partial}{\partial p_s}\sum_k\left[\pm r_l q_l^{\alpha}\right]\right\} \tag{13}$$

e quindi tenendo presente che per la (5') sono identicamente nulle tutte

le derivate delle q_i che si riferiscono ai lati della maglia K non comuni alla maglia S e che per questi ultimi, dette q_{ks} r_{ks} rispettivamente la portata e resistenza specifica (vale a dire per unità di portata), e

$$\frac{\partial q_{ks}}{\partial p_s} = 1 \tag{a'}$$

$$\frac{\partial q_{ks}}{\partial p_s} = -1, \tag{b'}$$

secondo che la q_i è di senso concorde (+ 1) o discorde (— 1) con quella della p_s sarà:

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial p_s \partial p_k} = \pm \alpha (\alpha + 1) r_{ks} q_{ks}^{\alpha-1} \tag{14}$$

In modo analogo si deduce che è:

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial p_k \partial p_s} = \pm \alpha (\alpha + 1) r_{ks} q_{ks}^{\alpha-1}.$$

Dalla (9), sviluppando, semplificando, tenendo presenti le (13) e (14) e raccogliendo, con semplici passaggi che si omettono, si deduce:

$$A = \lambda_1^2 \sum_1' r_i q_i^{\alpha-1} + \ldots + \lambda_m^2 \sum_m' r_i q_i^{\alpha-1} + \ldots (\lambda_1 \pm \lambda_2)^2 r_{12} q_{12}^{\alpha-1} + \ldots$$

Avendo indicato con $\sum_1' ; \ldots \sum_m'$, rispettivamente la somma dei prodotti $r_i q_i^{\alpha-1}$ che si riferiscono rispettivamente ai lati delle maglie $1, 2 \ldots m$, non comuni ad altre maglie e con $r_{12} \ldots r_{ks}$, $q_{12} \ldots q_{ks}$ rispettivamente le resistenze specifiche e le portate che si riferiscono ai lati comuni alle maglie $1, 2 \ldots K$ ed S.

Segue quindi che qualunque siano i valori reali assunti dagli m parametri arbitrari $\lambda_1 \ldots \lambda_k \ldots \lambda_m$, la forma quadratica A è sempre positiva e quindi la (7) ammette al più, nel dominio considerato, solo un punto di minimo. Alla stessa conclusione si perviene per via notevolmente più agevole quando si ammettono preventivamente note le coordinate: $\overline{p}_1, \overline{p}_k \ldots \overline{p}_m$ tutte finite per valori finiti delle $q'_1 \ldots q'_i \ldots q'_{i'}$, di un punto estremante della (7).

Per semplicità mi riferirò dapprima ad una maglia; estenderò successivamente il ragionamento a due maglie e quindi a tutta la rete. Va da se che il ragionamento si semplifica notevolmente per $\alpha = 1$, in quanto le coordinate dell'unico punto estremante risultano univocamente determinate attraverso il sistema delle m equazioni lineari cui si riducono le (10) o le equivalenti (11).

Infatti, per $\alpha > 1$ se $\bar{p}$ è la portata circolante per la quale lungo la maglia isolata è:

$$\Sigma [\pm r_i (q_i' + \bar{p})^\alpha] = o \tag{11'}$$

per quasiasi altra portata circolante di valore algebrico:

$$p' = \bar{p} + p'',$$

venendosi a ridurre i termini positivi e ad aumentare i termini negativi o viceversa, sarà sempre:

$$\Sigma \pm r_i \left[(q'_i + \bar{p} + p'') \right]^\alpha \neq o. \tag{12}$$

La $\bar{p}$ è la radice unica della (11').

In modo analogo si dimostra che se per due portate $\bar{p}_1$ e $\bar{p}_2$ circolanti lungo due maglie contigue 1 e 2, sono verificate simultaneamente le condizioni:

$$\begin{aligned} \underset{1}{\Sigma'} \pm r_i (q_i + \bar{p}_1)^\alpha + r_{12} (q'_{12} + \bar{p}_1 + \bar{p}_2)^\alpha &= o \\ \underset{2}{\Sigma'} \pm r_i (q_i + \bar{p}_2)^\alpha + r_{12} (q'_{12} + \bar{p}_1 + \bar{p}_2)^\alpha &= o, \end{aligned}$$

i simboli $\underset{1}{\Sigma'}$; $\underset{2}{\Sigma'}$ hanno il significato precedentemente indicato, per qualsiasi altre due portate circolanti nella maglia 1 e 2 rispettivamente di valore algebrico:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \bar{p}_1 + \varphi_1 \\ \pi_2 &= \bar{p}_2 + \varphi_2, \end{aligned}$$

si verificherà almeno una delle due evenienze:

$$\begin{aligned} &\underset{1}{\Sigma'} [\pm r_i (q_i + \bar{p}_1 + \varphi_1)^\alpha \pm r_{12} (q'_{12} + \bar{p}_1 + \bar{p}_2 \varphi_1 + \varphi_2)^\alpha \neq o, \\ &\underset{2}{\Sigma'} [\pm r_i (q'_i + p_2 + \varphi_2)^\alpha] \pm r_{12} (q'_{12} + \bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \varphi_1 + \varphi_2)^\alpha \neq o \end{aligned}$$

Estendendo il ragionamento a tutte le maglie della rete, si deduce che le radici: $p_1 \dots p_k \dots \bar{p}_m$ sono uniche; conseguentemente il punto propriamente estremante della (7) è anche di *minimo assoluto.*

Interpretando fisicamente i risultati raggiunti possiamo asserire:

1) « Le condizioni di minima dissipazione di potenza per attrito si identificano col *principio di continuità dei carichi* ».

Dal confronto della (11) eguagliata a zero con la (1) si deduce in effetti

$$\frac{\partial E_p}{\partial p_k} = \sum_k (\pm h_i) = o$$

2) « Per assegnate portate esterne concentrate nei nodi, qualsiasi distribuzione congruente di portate, che dà luogo a dissipazioni di potenza per attrito diversa da quella *minima*, origina una distribuzione di carichi non congruente ».

È valida quindi la seguente:

Proprietà III

« In una rete collegata con l'esterno attraverso portate esterne note, tra tutte le possibili distribuzioni congruenti di portate che si possono immaginare stabilite nella rete, quella che adduce alla minima dissipazione di potenza per attrito è *unica* e soddisfa simultaneamente il principio di continuità dei carichi ».

Dalla proprietà III ora enunciata, discende il seguente:

Corollario III

« In una rete di conformazione geometrica qualsiasi, collegata con l'esterno attraverso portate esterne note, alla distribuzione $S\bar{q}_i$ congruente di portate $\bar{q}_i$ che soddisfa il principio di continuità dei carichi, corrispondono portate circolanti $\bar{p}_1 \dots \bar{p}_k \dots \bar{p}_m$ tutte nulle.

Infatti le condizioni:

$$\sum_k \pm r_i \bar{q}_i^{\alpha} = 0$$

sono verificate per le (2') e per la proprietà II, solo quando sono simultaneamente nulle tutte le m portate circolanti: $p_1 \dots p_k \dots p_m$.

Alla proprietà III si può associare la

Proprietà IV

« In una rete collegata con l'esterno attraverso portate esterne note concentrate nei nodi, la distribuzione congruente di carichi che porta simultaneamente ad una distribuzione congruente di portate non tutte nulle è unica ».

Siano infatti $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_I \dots \bar{v}_n$, le quote piezometriche nei nodi $1 \dots I \dots n$, per le quali è soddisfatta la condizione:

$$Q_I + \sum_I \bar{q}_i = 0 \,,$$

essendo le $\bar{q}_i$ legate alle $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_I \dots \bar{v}_n$, da relazioni del tipo:

$$\bar{v}_k - \bar{v}_I = r_i \bar{q}_i^{\alpha}$$

o

$$\bar{v}_I - \bar{v}_k = r_i \bar{q}_i^{\alpha} \,,$$

secondo che la corrente di portata $\bar{q}_i$ muova dal nodo K al nodo I o viceversa.

La potenza dissipata per attrito nella rete, per la assegnata distribuzione congruente di quote piezometriche e di portate sarà:

$$\bar{E}_p = \sum_i | r_i \bar{q}_i^{\alpha+1} | . \tag{16}$$

Consideriamo ora una generica distribuzione congruente $S\nu_I$ di quote piezometriche ottenute aggiungendo algebricamente a ciascuna $\bar{\nu}_I$ una arbitraria ν'_I. Sarà quindi:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \bar{\nu}_1 + \nu'_1 \\ &\cdots\cdots \\ \nu_I &= \bar{\nu}_I + \nu'_I \\ &\cdots\cdots \\ \nu_n &= \bar{\nu}_n + \nu'_n \end{aligned} \tag{17}$$

Resta così definita una nuova distribuzione Sq_I non più congruente di portate lungo ogni lato della rete, legate alle nuove quote piezometriche da relazioni del tipo:

$$(\nu_I + \nu'_I) - (\nu_k + \nu'_k) = r_i q_i^{\alpha} \tag{e}$$

oppure

$$(\bar{\nu}_k + \nu'_k) - (\nu_I + \nu'_I) = r_i q_i^{\alpha} \tag{f}$$

— secondo che la corrente corrispondente muova dal nodo I al nodo K o viceversa — alla quale compete una dissipazione di potenza per attrito:

$$E_p = \sum_i r_i | q_i^{\alpha+1} | , \tag{18}$$

che per le (e) ed (f) è da ritenersi funzione delle n costanti $\bar{\nu}_1 \cdots \bar{\nu}_I \cdots \nu_n$ e delle n variabili $\nu'_1 \cdots \nu'_I \cdots \nu'_n$.

Se si parte sempre dalle $\bar{\nu}_1 \cdots \bar{\nu} \cdots \bar{\nu}_n$ e si fanno variare le $\nu'_1 \cdots \nu'_n$ con continuità, la E_p risulterà definita a mezzo della funzione continua:

$$E_p = \varphi(\bar{\nu}_1 \cdots \bar{\nu}_I \cdots \bar{\nu}_n ; \nu'_1 \cdots \nu'_I \cdots \nu'_n), \tag{19}$$

in cui figurano m costanti $\bar{\nu}_1 \cdots \bar{\nu}_n$ ed n variabili $\nu'_1 \cdots \nu'_n$.

I valori minimizzanti della (19) saranno dati dalle radici delle n equazioni simultanee:

$$\frac{\partial E_p}{\partial \nu'_1} = o \cdots \frac{\partial E_p}{\partial \nu_I} = o \cdots \frac{\partial E_p}{\partial \nu'_n} = o , \tag{20}$$

contenute in un insieme perfetto e limitato in cui la forma quadratica:

$$(21) \qquad B = \left(\left(\mu_1 \frac{\partial E_p}{\partial y'_1} + \ldots + \mu_I \frac{\partial E_p}{\partial y'_I} + \ldots + \mu_n \frac{\partial E_p}{\partial y'_n}\right)\right)^2$$

è definita positiva.

Procedendo in modo analogo a quanto si è fatto sopra, si dimostra che, per qualsiasi valore reale delle $\mu_1 \ldots \mu_n$, la (21) è sempre *definita positiva* e che alla generica condizione (20) può darsi, per la (18), la (e) ed (f), la forma esplicita:

$$(22) \qquad \frac{\partial E_p}{\partial y'_I} = \frac{\alpha + 1}{\alpha} \left\{ \sum_I' \frac{[(\bar{y}_I + y'_I) - (\bar{y}_k + y'_k)]^{(1-\alpha)/\alpha}}{r_i^{1/\alpha}} - \right.$$

$$\left. - \sum_I'' \frac{[(y_k + y'_k) - (y_I + y_I)]^{(1-\alpha)/\alpha}}{r_i^{1/\alpha}} \right\} = 0 \quad ,$$

avendo indicato con $\sum_I'$ e $\sum_I''$ la somma dei rapporti relativi ai lati della rete che per il nodo I sono rispettivamente adduttori o derivatori.

Segue quindi che la (18) ammette un solo punto mimizzante, dato dalle radici:

$$y'_1 = - y_1 \ldots y'_I = - \bar{y}_I \ldots y'_n = - \bar{y}_n$$

del sistema (22), alle quali corrispondono nella rete portate q_I e Q_I tutte nulle e quote piezometriche con estremi tutti sullo stesso piano orizzontale.

La dissipazione di potenza E_p, che per carichi congruenti si associa alla distribuzione congruente di portate $S\bar{q}_i$ è adunque unica e ben determinata. Alle proprietà III e IV si può sostituire la seguente:

Proprietà fondamentale delle reti.

« In uua rete di conformazione geometrica qualsiasi collegata con l'esterno attraverso portate esterne note, in assenza di motori, macchine o perdite di carico localizzate, la condizione di movimento che soddisfa simultaneamente il principio di continuità dei carichi e quello della continuità delle portate è *unica.* La dissipazione di potenza per attrito E_p che ad essa si associa è minima rispetto a quelle che si accompagnano a tutte le altre condizioni di movimento per le quali sia soddisfatto solo il **principio della congruenza delle portate** ».

Osservazioni.

Le conclusioni cui sono pervenuto nell'ipotesi che la legge di resistenza al moto sia esprimibile da una relazione di forma monomia del tipo (1), si estendono agevolmente al caso in cui tale condizione non è verificata.

Mi sono astenuto di proposito dalla ricerca, perchè alla faticosa indagine matematica non corrisponde un sensibile interesse pratico.

Desidero qui far rilevare quanto ho richiamato in una mia nota precedente sul problema di progetto delle reti, che ove si interpretino i rapporti $\frac{d_i}{J_i}$ come flussi virtuali che percorrono il lato generico di diametro d_i cui corrisponde una perdita di carico unitario J_i al passaggio delle portate q_i, le condizioni di massima economia $\Sigma \pm \frac{d_i}{J_i}$ relative ad ogni nodo della rete importano una distribuzione congruente di flussi virtuali.

La necessaria coesistenza di questa condizione a quella della congruenza delle portate e di continuità dei carichi, può esprimersi pertanto nella seguente forma generale:

« In una rete collegata con l'esterno attraverso portate esterne note e percorsa da una distribuzione di portate congruenti, che soddisfa il principio di continuità dei carichi, la distribuzione dei diametri più economicamente conveniente è quella cui corrisponde, coeteris paribus, una distribuzione congruente di *flussi* [1]). »

Conclusioni.

Le proprietà enunciate, oltre che rappresentare una estensione di principî già in parte noti in Elettrotecnica, così come ho detto nelle premesse debbono ritenersi la necessaria introduzione ai metodi approssimati proposti per il calcolo di verifica o di progetto di una rete.

La dimostrazione precedente che il sistema formato dalle equazioni di continuità dei carichi e di congruenza delle portate ammette una sola radice reale, porta a stabilire che, come era da attendersi, per data rete e per data distribuzione di portate esterne non può esistere più di una condizione di movimento capace di soddisfare simultaneamente le equazioni di continuità delle portate e dei carichi.

Napoli — Istituto di Idraulica e Costruzioni Idrauliche.

[1]) Nella nota richiamata ho definito flusso virtuale il rapporto $\frac{d_i^4}{J}$, o come di consueto in Idraulica: $\frac{d_i}{J_i} = \frac{d_i^6}{\beta q_i^2}$.

Sull' integrazione delle equazioni dell' elasticità piana in coordinate curvilinee [1])

Nota della dott. **Maria Bernabini**, *presentata dal socio* **M. Picone**

(Adunanza del dì 2 dicembre 1950)

Sunto. — Si dimostra un teorema mediante il quale si ottengono tutte le soluzioni delle equazioni dell' elastostatica piana, considerate in un sistema di coordinate curvilinee ortogonali ottenuto per trasformazione conforme del piano cartesiano.

Introduciamo nel piano cartesiano xy un sistema di coordinate curvilinee ortogonali $\xi\eta$ e si abbia per l' elemento d' arco ds

$$ds^2 = Q_1^2(\xi, \eta)\, d\xi^2 + Q_2^2(\xi, \eta)\, d\eta^2.$$

È noto che i problemi dell' elastostatica piana conducono alla considerazione di problemi al contorno per il seguente sistema di equazioni differenziali lineari nelle due funzioni incognite u_ξ e u_η

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{k}{Q_1}\dfrac{\partial}{\partial\xi}\left[\dfrac{1}{Q_1 Q_2}\left(\dfrac{\partial Q_2 u_\xi}{\partial\xi} + \dfrac{\partial Q_1 u_\eta}{\partial\eta}\right)\right] - \dfrac{1}{Q_2}\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left[\dfrac{1}{Q_1 Q_2}\left(\dfrac{\partial Q_2 u_\eta}{\partial\xi} - \dfrac{\partial Q_1 u_\xi}{\partial\eta}\right)\right] = 0 \\ \dfrac{k}{Q_2}\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left[\dfrac{1}{Q_1 Q_2}\left(\dfrac{\partial Q_2 u_\xi}{\partial\xi} + \dfrac{\partial Q_1 u_\eta}{\partial\eta}\right)\right] + \dfrac{1}{Q_1}\dfrac{\partial}{\partial\xi}\left[\dfrac{1}{Q_1 Q_2}\left(\dfrac{\partial Q_2 u_\eta}{\partial\xi} - \dfrac{\partial Q_1 u_\xi}{\partial\eta}\right)\right] = 0. \end{cases}$$

Le funzioni u_ξ e u_η vanno interpretate come componenti di un vettore piano u secondo le linee coordinate ξ e η; k è una costante.

Scopo della presente Nota è far conoscere un teorema, sul modo di ottenere tutte le possibili soluzioni del sistema (1), teorema che si presta utilmente nella risoluzione degli anzidetti problemi al contorno.

Farò le seguenti posizioni

$$\tau(\xi, \eta) = \frac{1}{Q_1 Q_2}\left(\frac{\partial Q_2 u_\xi}{\partial\xi} + \frac{\partial Q_1 u_\eta}{\partial\eta}\right);$$
$$\omega(\xi, \eta) = \frac{1}{Q_1 Q_2}\left(\frac{\partial Q_2 u_\eta}{\partial\xi} - \frac{\partial Q_1 u_\xi}{\partial\eta}\right).$$

[1]) Lavoro eseguito nell' Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

Supporrò inoltre che, posto $\zeta = \xi + i\eta$ e $z = x + iy$, la variabile ζ sia funzione olomorfa della variabile z:

$$\zeta = f(z). \tag{2}$$

Il teorema in questione è il seguente:

Detta $z = g(\zeta)$ la funzione inversa della (2) tutti i vettori $u \equiv (u_\xi, u_\eta)$ soluzioni del sistema (1) si ottengono ponendo

$$\begin{aligned} |g'(\zeta)|\, u_\xi(\xi, \eta) &= \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} - k \frac{\partial \beta}{\partial \eta} \\ |g'(\zeta)|\, u_\eta(\xi, \eta) &= \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} + k \frac{\partial \beta}{\partial \xi} \end{aligned} \tag{3}$$

essendo α e β due funzioni bi-iperarmoniche i cui laplaciani sono funzioni armoniche coniugate.

Poichè si ha

$$ds^2 = |g'(\zeta)|^2 (d\xi^2 + d\eta^2)$$

le equazioni (1) si scrivono nel nostro caso al modo seguente

$$k \frac{\partial \tau}{\partial \xi} - \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = 0 \quad , \quad k \frac{\partial \tau}{\partial \eta} + \frac{\partial \omega}{\partial \xi} = 0 \tag{1'}$$

essendo

$$\tau = \frac{1}{|g'(\zeta)|^2} \left(\frac{\partial |g'(\zeta)|\, u_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial |g'(\zeta)|\, u_\eta}{\partial \eta} \right).$$

$$\omega = \frac{1}{|g'(\zeta)|^2} \left(\frac{\partial |g'(\zeta)|\, u_\eta}{\partial \xi} - \frac{\partial |g'(\zeta)|\, u_\xi}{\partial \eta} \right).$$

Per le (3) si ha

$$\tau = \frac{1}{|g'(\zeta)|^2} \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \eta^2} \right) = \Delta_2 \alpha,$$

$$\omega = \frac{k}{|g'(\zeta)|^2} \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial \eta^2} \right) = \Delta_2 \beta$$

e pertanto — in virtù delle ipotesi su α e β — segue che u_ξ e u_η verificano la (1').

Inversamente supponiamo che (u_ξ, u_η) verifichi le (1'). Sia α una qualsiasi soluzione dell'equazione

$$\Delta_2 \alpha = \tau. \tag{4}$$

Si considerino le equazioni nell'incognita β

$$\frac{\partial \beta}{\partial \eta} = \frac{1}{k}\frac{\partial \alpha}{\partial \xi} - \frac{1}{k}|g'(\zeta)|\, u_\xi \quad , \quad \frac{\partial \beta}{\partial \xi} = -\frac{1}{k}\frac{\partial \alpha}{\partial \eta} + \frac{1}{k}|g'(\zeta)|\, u_\eta . \tag{5}$$

La (4) ci assicura l'esistenza di una funzione β verificante le (5). Poichè si ha

$$\Delta_2 \beta = \frac{1}{k}\,\omega$$

rimane completamente dimostrato il teorema.

Nella dimostrazione si è implicitamente supposto che il campo A nel quale si ricercano le soluzioni di (1') sia semplicemente connesso, ma il risultato si può estendere anche a campi più volte connessi.

Per fissare le idee supporrò che sia

$$A = B_0 - (B_1 + B_2 + \ldots + B_n)$$

essendo $B_0, B_1, \ldots, B_n$ insiemi continui del piano tali che B_0 contenga nel suo interno tutti gli altri i quali a loro volta sono a due a due senza punti in comune. Diciamo O_h $(h = 1, 2, \ldots, n)$ un punto arbitrariamente fissato in B_h.

Per estendere il teorema basta far vedere che si può scegliere α in modo che le (5) siano risolubili. Diciamo allora α_0 una soluzione particolare di (4) e poniamo

$$\alpha = \alpha_0 + \sum_{h=1}^{n} a_h \log \overline{PO_h}$$

essendo $\overline{PO_h}$ la distanza fra O_h e il punto P variabile in A. Le a_h sono costanti che determineremo opportunamente.

Le (5) si scrivono

$$\frac{\partial \beta}{\partial \eta} = \frac{1}{k}\frac{\partial \alpha_0}{\partial \xi} + \frac{1}{k}\sum_{h=1}^{n} a_h \frac{\partial \log \overline{PO_h}}{\partial \xi} - \frac{1}{k}|g'(\zeta)|\, u_\xi$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \xi} = -\frac{1}{k}\frac{\partial \alpha_0}{\partial \eta} - \frac{1}{k}\sum_{h=1}^{n} a_h \frac{\partial \log \overline{PO_h}}{\partial \eta} + \frac{1}{k}|g'(\zeta)|\, u_\eta . \tag{5'}$$

Introdotto il vettore v di componenti

$$v_\xi = \frac{1}{|g'(\zeta)|}\frac{1}{k}\frac{\partial \alpha_0}{\partial \xi} - \frac{1}{k}u_\xi$$
$$v_\eta = -\frac{1}{|g'(\zeta)|}\frac{1}{k}\frac{\partial \alpha_0}{\partial \eta} + \frac{1}{k}u_\eta$$

le (5') equivalgono alla seguente equazione vettoriale

$$\text{(5'')} \qquad \operatorname{grad}\beta = v + \frac{1}{k}\sum_{h=1}^{n} a_h \operatorname{grad}\vartheta_h$$

avendo indicato con ϑ_h l'angolo orientato che il raggio vettore $\overrightarrow{O_h P}$ forma con un fissato semiasse uscente da O_h.

Si ponga

$$a_h = -\frac{k}{2\pi i}\int_{+C_h} v \times dP$$

essendo C_h una curva chiusa contenuta in A la quale racchiude B_h ed esclude ogni B_i, con $i \neq h$. Tale scelta delle a_h ci assicura dell'esistenza di una funzione uniforme β in A verificante la (5'') e quindi le (5').

Anche in tal caso si ha $\Delta_2\beta = \frac{1}{k}\omega$ epperò il teorema seguita a sussistere

Consideriamo il caso particolare delle coordinate curvilinee cosidette bipolari. Allora — detta a una costante reale positiva — la $\zeta = f(z)$ è la seguente

$$\zeta = \log\frac{z-a}{z+a}$$

intendendosi assumere la determinazione principale del logaritmo. Un facile calcolo mostra che

$$|g'(\zeta)| = \frac{a}{\cosh\xi - \cos\eta}$$

Le linee ξ = costante sono cerchi aventi il centro sull'asse x, laddove le linee η = costante sono le traiettorie ortogonali di questi, epperò sono archi di circonferenze passanti per i punti $-a$ ed a del suddetto asse.

Come applicazione considereremo un problema al contorno per il sistema (1') già studiato da altri Autori [1]) ottenendone rapidamente la soluzione.

---

[1]) Cfr. Coker and Filon, *A treatise on photoelasticity*, Cambridge 1931, p. 306.

Tale problema si presenta allorchè si studiano le deformazioni di un cilindro circolare eccentrico illimitato, sottoposto a pressione costante nell' interno.

Indichiamo con $\sigma_{\xi\xi}$, $\sigma_{\eta\eta}$ e $\sigma_{\xi\eta}$ le componenti di tensione le quali — com'è noto — si esprimono per mezzo delle derivate delle funzioni u_ξ e u_η [1]).

Sia A il dominio limitato dalle due circonferenze $\xi = \alpha_1$, $\xi = \alpha_2$ essendo α_1 e α_2 numeri positivi con $(\alpha_1 > \alpha_2)$. Si ricerca in A una soluzione delle (1') per la quale sia, detta P una costante,

$$(6)\qquad \begin{aligned} &\sigma_{\xi\xi} = -P \quad , \quad \sigma_{\xi\eta} = \sigma_{\eta\eta} = 0 && \text{per } \xi = \alpha_1 , \\ &\sigma_{\xi\xi} = \sigma_{\xi\eta} = \sigma_{\eta\eta} = 0 && \text{per } \xi = \alpha_2 . \end{aligned}$$

Vediamo intanto come può essere sviluppata in serie di soluzioni elementari ogni funzione soluzione in A dell' equazione $\Delta_2 \Delta_2 \alpha = 0$.

Tale equazione equivale alla seguente nell' incognita $\dfrac{\alpha}{|g'(\zeta)|} = \alpha'$

$$(7)\qquad \frac{\partial^4 \alpha'}{\partial \xi^4} + 2\frac{\partial^4 \alpha'}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 \alpha'}{\partial \eta^4} - 2\frac{\partial^2 \alpha'}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 \alpha'}{\partial \eta^2} + \alpha' = 0.$$

Si ha:

$$\alpha' = \sum_{k=0}^{\infty} [A_k'(\xi) \cos k\eta + A_k''(\xi) \operatorname{sen} k\eta]$$

riuscendo

$$A_k'(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \alpha'(\xi, \eta) \cos k\eta \, d\eta ,$$

$$A_k''(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \alpha'(\xi, \eta) \operatorname{sen} k\eta \, d\eta .$$

Moltiplicando i due membri della (7) per $\cos k\eta$ e integrando fra $-\pi$ e π si trae:

$$\frac{d^4 A_k'}{d\xi^4} - 2(k^2 + 1)\frac{d^2 A_k'}{d\xi^2} + (k^2 - 1)^2 A_k' = 0.$$

Moltiplicando per $\operatorname{sen} k\eta$ e integrando fra $-\pi$ e π si ottiene la stessa equazione per A_k''.

---

[1]) Cfr. Coker-Filon, *Op. cit.*, pag. 125.

Si hanno così le *proprietà integrali* di una funzione bi-iperarmonica in una corona circolare eccentrica:

Per $k > 0$

$$A'_k(\xi) = a'_{1k}\cosh(k+1)\xi + a'_{2k}\operatorname{senh}(k+1)\xi + a'_{3k}\cosh(k-1)\xi + a'_{4k}\operatorname{senh}(k-1)\xi,$$
$$A''_k(\xi) = a''_{1k}\cosh(k+1)\xi + a''_{2k}\operatorname{senh}(k+1)\xi + a''_{3k}\cosh(k-1)\xi + a''_{4k}\operatorname{senh}(k-1)\xi,$$

e per $k = 0$

$$A'_0(\xi) = (a'_{10} + a'_{20}\xi)\operatorname{senh}\xi + (a'_{30} + a'_{40}\xi)\cosh\xi,$$
$$A''_0(\xi) = (a''_{10} + a''_{20}\xi)\operatorname{senh}\xi + (a''_{30} + a''_{40}\xi)\cosh\xi,$$

ove le a'_{hk} , a''_{hk} $(h = 1, 2, 3, 4 \; ; \; k \geq 0)$ sono costanti arbitrarie.

Esprimendo $\sigma_{\xi\xi}$, $\sigma_{\xi\eta}$ e $\sigma_{\eta\eta}$ per mezzo di α e β, valendosi delle (3) è assai facile determinare α e β in modo che siano verificate le (6) e in modo che sia

$$\frac{\partial\Delta_2\alpha}{\partial\xi} = \frac{\partial\Delta_2\beta}{\partial\eta} \qquad \frac{\partial\Delta_2\alpha}{\partial\eta} = -\frac{\partial\Delta_2\beta}{\partial\xi}.$$

Si ha infatti

$$\frac{\alpha}{|g'(\zeta)|} = \alpha' = \lambda_1\xi\cosh\xi + \lambda_2\cosh 2\xi\cos\eta + \lambda_3\operatorname{senh}2\xi\cos\eta + \lambda_4\cos\eta$$
$$\frac{\beta}{|g'(\zeta)|} = \beta' = 2\lambda_1\eta\cosh\xi + 2\lambda_2\operatorname{senh}2\xi\operatorname{sen}\eta + 2\lambda_3\cosh 2\xi\cos\eta$$

con:

$$\lambda_1 = 2a\rho\cosh(\alpha_1 + \alpha_2) \quad , \quad \lambda_2 = -a\rho\operatorname{senh}(\alpha_1 + \alpha_2),$$
$$\lambda_3 = a\rho\cosh(\alpha_1 + \alpha_2) \quad , \quad \lambda_4 = a\rho\cosh(\alpha_1 + \alpha_2),$$
$$\rho = \frac{1}{2}P\operatorname{cosech}(\alpha_1 - \alpha_2)\left\{\operatorname{senh}^2\alpha_1 + \operatorname{senh}^2\alpha_2\right\}.$$

Sostituendo le espressioni sopra scritte per α e β nelle (3) si ottengono quelle di u_ξ e u_η soluzioni del problema.

Sui gruppi p-supersolubili

Nota del socio corrispondente **Guido Zappa**

(Adunanza del dì 2 dicembre 1950)

Sunto. — L' autore esamina in quale misura si estendono, e come si modifichino per i gruppi p-supersolubili, introdotti recentemente da A. S. Čunihin, le proprietà date da O. Ore a caratterizzazione dei gruppi supersolubili.

In una serie di lavori, S. A. Čunihin [1]) ha svolto lo studio delle p-proprietà dei gruppi, cioè di quelle proprietà « che sono legate ad un numero primo determinato p e non sussistono per gli altri numeri primi ». Così, ad es., egli chiama *p-risolubile* un gruppo finito in cui ogni fattore di composizione è uguale a p o primo con p, e *p-supersolubile* un gruppo finito in cui ogni fattore principale e uguale a p o primo con p. Se l'ordine di un gruppo non è divisibile per p, esso è evidentemente, p-risolubile e p-supersolubile.

Per ciò che riguarda i gruppi p-supersolubili, Čunihin (nel primo dei dei lavori citati) ha esteso ad essi un noto teorema di Wendt [2]) sui gruppi supersolubili, dimostrando che se G è un gruppo p-supersolubile e K è il suo derivato, d'ordine $p^{\varrho}n$ (n primo con p) , K ha un sottogruppo caratteristico d'ordine n.

In questo lavoro, cerco di estendere ai gruppi p-supersolubili i risultati

---

[1]) S. A. Čunihin, *Sur les p propriétés des groupes*. Doklady (Comptes rendus) Akad. Nauk. U.S.S.R., 55, 477-480 (1947). — Id., *On subgroups of relatively soluble groups*. ibidem, 58, 1295-1296 (1947). — Id., *On π-separable groups*, ibidem, 59. 443-445 (1948). — Id., *On Sylow-regular groups*, ibidem, 60, 773-774 (1948). — Id , *On theorems of Sylow's type*, ibidem, 66, 165-168 (1949). — Id., *On π-properties of finite groups*, Mat. Sbornik, 67, 321-346 (1949). — Id., *On the conditions of theorems of Sylow's type*, Doklady Akad. Nauk. U.S.S.R., 69, 735-737 (1949).

Ho potuto leggere per intero solo il primo di questi lavori, mentre ho appreso il contenuto degli altri soltanto attraverso recensioni nel « Mathematical Revews » Benchè da tali recensioni risulti che gli argomenti da me qui trattati non debbono essere stati considerati da Čunihin nei suddetti lavori, chiedo venia nel caso in cui qualche mio risultato sia già stato ottenuto dal matematico russo.

[2]) Math. Ann., 55, pp. 479 e segg. (1902).

ottenuti da Ore sui gruppi supersolubili [1]). Questi provò che le seguenti quattro categorie di gruppi finiti coincidono:

a) Gruppi supersolubili (cioè con fattori principali tutti primi);

b) Gruppi tali che essi, e tutti i loro sottogruppi, hanno sottogruppi di ogni possibile ordine;

c) Gruppi in cui ogni catena completa ha gli indici tutti primi;

d) Gruppi in cui due catene complete sono conformi.

Nel nostro caso, in luogo di tali categorie van considerate le seguenti:

$\overline{a}$) Gruppi p-supersolubili;

$\overline{b}$) Gruppi tali che essi e tutti i loro sottogruppi hanno sottogruppi di ogni possibile indice potenza di p;

$\overline{c}$) Gruppi in cui ogni catena completa ha gli indici tutti eguali a p o primi con p;

$\overline{d}$) Gruppi in cui due catene complete sono p-conformi (cioè sono tali che può porsi una corrispondenza biunivoca tra quelli, fra gli indici delle due catene, che son primi con p, in modo che indici corrispondenti sono eguali.

Queste nuove categorie però non coincidono. Dimostro infatti, nel presente lavoro, che un gruppo appartenente alla $\overline{a}$) appartiene anche alle $\overline{b}$), $\overline{c}$), $\overline{d}$); mentre un gruppo che soddisfa alla $\overline{b}$) può non soddisfare alla $\overline{a}$), anche sotto l'ipotesi supplementare di essere p-risolubile. Le $\overline{a}$) e $\overline{b}$) sono però equivalenti se p è il più piccolo fattore primo che divide l'ordine del gruppo.

Faccio infine vedere, che un gruppo soddisfacente alla $\overline{c}$) soddisfa certamente anche alla $\overline{a}$), se è p-risolubile. Credo che l'equivalenza delle categorie $\overline{a}$) e $\overline{c}$) valga in generale, che cioè non esistono gruppi non p-risolubili, soddisfacenti alla $\overline{c}$). È una questione che va ancora approfondita.

Ne segue che anche le categorie $\overline{b}$) e $\overline{c}$) non sono equivalenti. Infine se un gruppo p-risolubile soddisfa alla $\overline{d}$), soddisfa anche alla $\overline{c}$), come si vede subito.

Probabilmente, basandoci su condizioni sufficienti per la p-risolubilità di un gruppo, che, in base a quanto contenuto nelle recensioni, ritengo raggiunte da Čunihin nei lavori di questo che non son riuscito ancora a procurarmi, l'estensione dell'equivalenza delle categorie $\overline{a}$), $\overline{c}$) e $\overline{d}$) dal caso dei gruppi p-risolubili (da me considerato) al caso generale, deve ottenersi molto facilmente.

1. *Se G è un gruppo p-supersolubile, ciascun indice di una catena completa di G è eguale a p o primo con p.*

[1]) O. Ore, *Contributions to the theory of groups of finite order*, Duke Math. Journal, 5, pp. 431-460 (1939). — Cfr. anche la mia nota: *Remark on a recent paper of O. Ore*, Duke Math. Journal, 6, pp. 511-512 (1940).

Il teorema diviene banale se l'ordine di G è un numero primo: potremo pertanto dimostrarlo per induzione rispetto al numero dei fattori primi in cui si decompone l'ordine del gruppo. E poichè ogni sottogruppo e ogni gruppo fattoriale di G è ancora p-supersolubile [1]), ed ha un ordine composto con un numero di fattori primi minore che l'ordine di G, si ha che ogni indice di una p-catena completa di un sottogruppo o di un gruppo fattoriale di G è eguale a p o primo con p.

Sia $G, G_1, \ldots, G_h \equiv 1$ una catena completa di G. Allora la catena $G_1, G_2, \ldots, G_h \equiv 1$ è una catena completa di G_1, e pertanto ogni suo indice è eguale a p o primo con p. Basterà quindi provare che l'indice di G_1 in G è eguale a p o primo con p.

Sia N un sottogruppo normale minimo di G. Dovrà essere $G_1 \vee N = G_1$ o $G_1 \vee N = G$, altrimenti esisterebbe un sottogruppo tra G e G_1, contro la ipotesi che la catena $G, G_1, \ldots, G_h \equiv 1$ sia completa.

Se è $G_1 \vee N = G$, l'indice di G_1 in G eguaglia quello di $N \wedge G_1$ in N, ed è quindi un divisore dell'ordine di N E poiche tale ordine, essendo G p-supersolubile, è eguale a p o primo con p, altrettanto avviene per l'indice di G_1 in G, come si voleva

Se invece è $G_1 \vee N = G_1$, N è in G_1. Allora non può esistere un sottogruppo tra G_1/N e G_1/N, sia esso L/N, altrimenti L sarebbe tra G e G_1, contro l'ipotesi che la catena $G, G_1, \ldots, G_h \equiv 1$ sia completa. Di conseguenza G_1/N e G_1/N sono i primi due termini di una catena completa di G/N, onde l'indice di G_1/N in G/N è eguale a p o primo con p. Altrettanto avviene quindi dell'indice di G_1 in G, onde il teorema risulta dimostrato.

2. Di qui segue che:

Se G è un gruppo p-supersolubile, e p^r è una potenza di p che divide l'ordine del gruppo, G ha un sottogruppo almeno di indice p^r.

Infatti G è p-risolubile, e quindi [2]), se p^z è la massima potenza di p che divide il suo ordine, ha un sottogruppo M di indice p^z. Sia $G, G_1, \ldots, M, \ldots$

---

[1]) Infatti, se G è p supersolubile, e $G, G_1, \ldots, G_s \equiv 1$ è una serie principale di G, i cui indici sono pertanto eguali a p o primi con p, e se H è un sottogruppo di G, la catena $H, H \wedge G_1, \ldots, H \wedge G_s \equiv 1$ è una catena principale di H, i cui indici sono divisori di quelli della serie principale di G, e pertanto sono anch'essi eguali a p o primi con p. Raffinando detta catena principale di H, si ottiene una serie principale di H, i cui indici sono pertanto eguali a p o primi con p: onde H è p-supersolubile. La supersolubilità di un fattoriale G/N di G discende dal fatto che una serie principale di G/N è isomorfa ad una parte di una serie principale di G che contenga N.

[2]) Cfr. i lavori citati di Čunihin e una nota a pie' di pagina del mio lavoro: *Sulle p-catene dei gruppi p-risolubili*, Giornale di Matematiche di Battaglini, 79, pp. 121-126 (1950).

una catena completa contenente M. Gli indici di tale catena formati dai sottogruppi che precedono M devono dividere l'indice p^a di M in G, quindi, pel teorema precedente, sono eguali a p. Ne segue che G_1 ha indice p in G, G_2 ha indice p^2 in G, ..., G_i ha indice p^i in G, ..., G_{a-1} ha indice p^{a-1} in G, $G_a \equiv M$ ha indice p^a in G, *c. d. d.*

Diremo, per brevità, che G ha sottogruppi di ogni possibile indice potenza di p quando, presa una qualsiasi potenza p^i di p che divide l'ordine di G, questo ha almeno un sottogruppo di indice p^i.

Poichè ogni sottogruppo e ogni gruppo fattoriale di un gruppo p-supersolubile è p-supersolubile, dal teorema precedente segue che:

Ogni sottogruppo e ogni gruppo fattoriale di un gruppo p-supersolubile ha sottogruppi di ogni possibile indice potenza di p.

Due catene complete di un gruppo si diranno *p-conformi* quando si può stabilire una corrispondenza biunivoca tra gli indici delle due catene che sono eguali a potenze del numero primo p, in modo che indici corrispondenti siano eguali.

Segue subito dal n. 1 che:

Due catene complete di un gruppo p-supersolubile sono p-conformi.

Infatti quelli, tra gli indici delle due catene, che non sono primi con p, sono eguali a p.

3. Vediamo ora se, e in quale misura, i risultati dei nn. precedenti si possono invertire.

Domandiamoci in primo luogo: « Un gruppo tale che esso, ogni suo sottogruppo e ogni suo fattoriale ha sottogruppi di ogni possibile indice potenza di p, è necessariamente p-supersolubile? ».

La risposta è negativa. Basta considerare il gruppo alterno G su 5 oggetti, d'ordine 60. Esso, come è ben noto, ha sottogruppi di indice 5, i gruppi alterni, d'ordine 12, su quattro dei cinque oggetti. Altrettanto avviene per ogni suo sottogruppo il cui ordine h sia divisibile per 5, perchè un tale sottogruppo è risolubile e quindi, essendo 5 primo con $\frac{h}{5}$. (perchè h divide 60) ha sottogruppi di indice 5 in base ad un noto teorema di Hall. Inoltre G non ammette gruppi fattoriali, essendo semplice. Pertanto si può asserire che G, ogni suo sottogruppo e ogni suo fattoriale ha sottogruppi di ogni possibile indice potenza di 5. Ciononostante esso non è 5-supersolubile, perchè è semplice, ed ha quindi un solo fattore principale, eguale a 60, vale a dire nè eguale a 5, nè primo con 5.

Vien fatto ora di chiederci se alla suddetta domanda si possa almeno rispondere affermativamente sotto l'ipotesi restrittiva che il gruppo sia p-risolubile. Mostreremo che non è così. Dobbiamo però osservare prima che:

Se il gruppo G ed ogni suo sottogruppo hanno sottogruppi di ogni possibile indice potenza di p, altrettanto avviene anche per ogni fattoriale di G.

Sia N un sottogruppo normale di G. Per ipotesi, se $p^a m$ è l'ordine

di G (m primo con p), G ha un sottogruppo G_1 di indice p; G_1 ha un sottogruppo G_2 di indice p in G_1, e quindi di indice p^2 in G, etc.; pertanto si può costruire una catena $G, G_1, \ldots, G_\alpha$ tra G e il sottogruppo G_α di indice p^α, i cui indici sono tutti eguali a p.

Si ponga ora $H_i \equiv N \cdot G_i (i = 1, \ldots, \alpha)$. L'indice di G_i in H_i eguaglia quello di $G_i \wedge N$ in N, e analogamente l'indice di G_{i-1} in H_{i-1} eguaglia quello di $G_{i-1} \wedge N$ in N. Se $G_{i-1} \wedge N = G_i \wedge N$, l'indice di G_{i-1} in H_{i-1} eguaglia quello di G_i in H_i, e quindi l'indice di H_i in H_{i-1} eguaglia quello di G_i in G_{i-1}, cioè p. Se invece non è $G_{i-1} \wedge N = G_i \wedge N$, l'indice di $G_i \wedge N$ in $G_{i-1} \wedge N$ è eguale a p, perchè tale è l'indice di G_i in G_{i-1}. Pertanto in tal caso l'indice di G_i in H_i eguaglia p volte quello di G_{i-1} in H_{i-1}, onde l'indice di G_i in G_{i-1}, cioè p, eguaglia p volte quello di H_i in H_{i-1}. Di conseguenza in tal caso è $H_{i-1} = H_i$. Ne segue che gli indici della catena $G, H_1, \ldots, H_\alpha$ sono eguali a p o a 1, e tali sono quindi gli indici della catena $G/N, H_1/N, \ldots, H_\alpha/N$. Ma H_α/N ha ordine primo con p, perchè tale ordine eguaglia quello di $G_\alpha/G_\alpha \wedge N$, e già l'ordine di G_α è primo con p. Pertanto la catena $G/N, H_1/N, \ldots, H_\alpha/N$ ci fornisce sottogruppi di G/N di ogni possibile indice potenza di p, c. d. d.

4. Diamo ora un esempio di gruppo p-risolubile, ma non p-supersolubile, tale che esso ed ogni suo sottogruppo (e quindi ogni suo fattoriale) ha sottogruppi di ogni possibile indice potenza di p.

Sia P un gruppo abeliano di ordine p^p e tipo $(1, \ldots, 1)$ e siano $\mu_1, \ldots, \mu_p, p$ suoi elementi indipendenti, i quali come è noto costituiscono una base. Sia A il gruppo degli automorfismi di P. Esso contiene un sottogruppo ciclico F_i, d'ordine $p-1$, costituito dagli automorfismi che mutano μ_i in una sua potenza e $\mu_1, \ldots, \mu_{i-1}, \mu_{i+1}, \ldots, \mu_p$ in sè ($i = 1, \ldots, p$). I sottogruppi $F_1, F_2, \ldots, F_p$ sono evidentemente a due a due privi di elementi non identici a comune e permutabili elemento per elemento, onde A contiene $F \equiv F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_p$. Inoltre A contiene un automorfismo σ di P, d'ordine p, che permuta ciclicamente gli elementi $\mu_1, \ldots, \mu_p$. Si ha, evidentemente, $\sigma^{-1} F_i \sigma = F_{i+1}$ ($i = 1, \ldots, p-1$) e $\sigma^{-1} F_p \sigma = F_1$, e di conseguenza $\sigma^{-1} F \sigma = F$. Detto S il sottogruppo generato da σ, si ha che A contiene il sottogruppo $H = FS$, d'ordine $p(p-1)^p$.

Detto $\overline{H}$ un gruppo isomorfo ad H, si costruisca il gruppo $G \equiv P\overline{H}$, formato da tutti gli elementi della forma $a\overline{\eta}$, con a in P e $\overline{\eta}$ in $\overline{H}$, tali che, se $a_1 \overline{\eta}_1$ ed $a_2 \overline{\eta}_2$ sono due elementi di G, e η_1, η_2 sono gli omologhi di $\overline{\eta}_1, \overline{\eta}_2$ nell'isomorfismo tra $\overline{H}$ ed H, si ha

$$a_1 \overline{\eta}_1 a_2 \overline{\eta}_2 = a_1 a_2^{\eta_1^{-1}} \overline{\eta}_1 \overline{\eta}_2$$

ove con $a_2^{\eta_1^{-1}}$ si indica l'elemento in cui a_2 è portato dall'automorfismo η_1^{-1}. Si vede subito che P è un sottogruppo normale di G, e che G/P è isomorfo ad $\overline{H}$ e ad H.

Dovrà esistere pertanto in G un sottogruppo normale G_1, di indice p e contenente P, tale che, nell'isomorfismo tra G p ed H, a G_1/p corrisponda F: e sarà $G_1 \equiv P\overline{F}$, ove $\overline{F}$ è l'omologo di F nell'isomorfismo tra H ed $\overline{H}$. Chiamato ora Q_1 il sottogruppo generato da $\mu_2, \ldots, \mu_p$, Q_2 il sottogruppo generato da $\mu_3, \ldots, \mu_p, \ldots$, Q_{p-1} il sottogruppo generato da μ_p, Q_p l'unità, si ha che $G_2 \equiv Q_1\overline{F}$ ha indice p in G_1, $G_3 \equiv Q_2\overline{F}$ ha indice p in $G_2, \ldots$ e così via. Allora la catena $G, G_1, G_2, \ldots, G_{p+1}$ ci fornisce sottogruppi di ogni indice potenza di p che divide l'ordine $p^{p+1}(p-1)^p$ di G. Pertanto G ha sottogruppi di ogni possibile indice potenza di p.

Mostriamo ora che anche un qualsiasi sottogruppo di G ha sottogruppi di ogni possibile indice potenza di p. Sia M un sottogruppo di G: se esso è in G_1, ha sottogruppi di ogni possibile indice potenza di p, perchè G_1 è supersolubile. Infatti, come si vede facilmente, $P, Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$ sono sottogruppi normali di G_1 di ordine $p^p, p^{p-1}, \ldots, 1$, perchè ogni elemento di $\overline{F}$ trasforma ciascuno degli elementi $\mu_1, \ldots, \mu_p$ in una sua potenza. Pertanto anche M, quale sottogruppo di G_1, è in tal caso supersolubile, e in base al n. 2, esso ha sottogruppi di ogni possibile indice potenza di p. Se poi M non è in G_1, si ha che $G_1 \wedge M$ è normale in M e di indice p in esso, perchè G_1 è normale e di indice p in G. Detto $p^\alpha r$ (r primo con p) l'ordine di M, e quindi $p^{\alpha-1}r$ quello di $G_1 \wedge M$, si ha che $G_1 \wedge M$ ha sottogruppi di ogni possibile indice che divide $p^{\alpha-1}$, perchè è in G_1. Tali sottogruppi ci forniscono a loro volta sottogruppi di M di ogni possibile indice che divide p^α.

Possiamo quindi concludere che G, ogni sottogruppo, e quindi anche ogni fattoriale di G hanno sottogruppi di ogni possibile indice potenza di p.

Facciamo ora vedere che G è p-risolubile, ma non p-supersolubile. Una catena normale di G è la seguente: $G, G_1, P, Q_1, \ldots, Q_p \equiv E$; i suoi indici sono $p, (p-1)^p, p, \ldots, p$, e quindi sono eguali a p o primi con p. Altrettanto avviene per una serie di composizione di G, che può ottenersi raffinando detta catena normale; onde G è p-risolubile. Essendo P un sottogruppo normale in G, esso fa parte di una serie principale di G. Se questo fosse p-supersolubile, dovrebbe esistere in P un sottogruppo normale in G d'ordine p. Un tale sottogruppo dovrebbe essere trasformato in sè da ogni elemento di $\overline{H}$, quindi mutato in sè da ogni automorfismo di G giacente in H.

Ma i soli sottogruppi di P d'ordine p mutati in sè dagli automorfismi giacenti in F_i sono quelli generati da μ_i e tutti quelli contenuti nel sottogruppo generato da $\mu_1, \ldots, \mu_{i-1}, \mu_{i+1}, \ldots, \mu_p$. Di qui segue facilmente che i soli sottogruppi di P d'ordine p mutati in sè da tutti gli automorfismi di $F_1, F_2, \ldots, F_p$, quindi di F, sono quelli generati rispettivamente da μ_1, da $\mu_2, \ldots$, da μ_p. Ma tali sottogruppi non sono mutati in sè da σ, perchè questo permuta ciclicamente $\mu_1, \ldots, \mu_p$. Pertanto nessun sottogruppo d'ordine p di G è mutato in sè da ogni automorfismo giacente in H, onde G non è p-supersolubile, c. d. d.

5. Mostreremo ora che alla domanda posta all'inizio del n. 3 si ri-

sponde però positivamente nell'ipotesi che p sia il più piccolo numero primo che divide l'ordine del gruppo.

Diremo *p-complementato* un gruppo G d'ordine $p^{\alpha}m$ (con m primo con p) se possiede un sottogruppo normale d'indice p^{α}. Abbiamo allora che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè un gruppo G d'ordine $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$ con $p_1 < p_2 < \dots < p_s$ numeri primi sia p_1-supersolubile è che esso sia p_1-complementato.

Se G è p_1-complementato, ed N un suo sottogruppo normale di indice $p_1^{\alpha_1}$, G/N è un p_1-gruppo, e quindi contiene una serie principale $G/N, G_1/N, \dots$ $\dots G_\alpha/N \equiv N/N \equiv 1$, ad indici tutti eguali a p_1. Allora si può costruire una serie principale di G che si inizia con $G, G_1, G_2, \dots, G_{\alpha_1}$. Essa ha i primi α_1 indici eguali a p_1, e gli altri primi con p_1, perchè $G_{\alpha_1} \equiv N$ ha ordine primo con p_1. Pertanto G è p_1-supersolubile.

Viceversa, sia G p_1-supersolubile. Facciamo la dimostrazione per induzione rispetto all'esponente cui compare nell'ordine del gruppo il suo più piccolo fattore primo.

In base al n. 2, G ha sottogruppi di ogni possibile indice potenza di p_1, quindi in particolare ha un sottogruppo di indice p_1, sia esso G_1. Essendo p_1 il più piccolo divisore dell'ordine di G, G_1 è normale in G [1]. Se è $\alpha_1 = 1$, G_1 è un sottogruppo normale di indice $p_1^{\alpha_1}$, e quindi G è p_1-complementato. Se poi è $\alpha_1 > 1$, G_1, quale sottogruppo di G, è p_1-supersolubile, e quindi, essendo $p_1^{\alpha_1 - 1}$ $(< p_1^{\alpha_1})$ la massima potenza di p che divide l'ordine di G_1, questo risulta p_1-complementato, e quindi ha un sottogruppo normale N di indice $p_1^{\alpha_1 - 1}$ in G. Il sottogruppo N deve contenere almeno un sottogruppo di Sylow S_i di G_1 d'ordine $p_i^{\alpha_i}$ $(i = 2, \dots s)$, ed essendo normale in G_1, contiene ogni coniugato di S_i in G_1, vale a dire ogni sottogruppo di Sylow di G_1 d'ordine $p_i^{\alpha_i}$. Di qui segue facilmente che N contiene ogni elemento di G_1 il cui ordine è primo con p_1, e pertanto è un sottogruppo caratteristico di G_1. Essendo G_1 normale in G, si ha che anche N è normale in G, il quale risulta pertanto p_1-complementato, essendo N di indice $p_1^{\alpha_1}$ in G.

Ricordiamo che, secondo Ore [1]) un gruppo G d'ordine $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$ con $p_1 < p_2 < \dots < p_s$ primi distinti e detto *dispersibile* se possiede un sottogruppo normale d'indice $p_1^{\alpha_1}$, un sottogruppo normale d'indice $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$, ... un sottogruppo normale d'indice $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_{s-1}^{\alpha_{s-1}}$. Lo stesso Ore ha mostrato che un gruppo supersolubile è dispersibile, ma non sempre è vero il viceversa.

Mediante ripetute applicazioni dell'ultima proposizione raggiunta, si ottiene facilmente il seguente risultato, che precisa quello ora indicato di Ore:

Condizione necessaria e sufficiente perchè un gruppo G d'ordine

[1]) *Loc. cit* in [1]) a pag. 329.

$p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_s^{\gamma_s}$ $(p_1 < p_2 < \dots < p_s)$ *sia dispersibile è che* G *sia* p_1*-supersolubile, esista un sottogruppo* N_1 *d'indice* $p_1^{\alpha_1}$ *in* G *che sia* p_2*-supersolubile, un sottogruppo* N_2 *di* N_1*, di indice* $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$ *in* G*, che sia* p_3*-supersolubile, etc.*

Ora siamo in grado di provare che:

Se G *è un gruppo d'ordine* $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$ $(p_1 < p_2 < \dots p_s$ primi distinti*) avente sottogruppi di ogni possibile indice potenza di* p_1*, esso è* p_1*-supersolubile.*

Procediamo per induzione rispetto all'esponente cui compare, nell'ordine del gruppo, il suo più piccolo fattore primo.

Il gruppo G ha, per ipotesi, un sottogruppo G_1 d'indice p_1, il quale è normale in G, perchè p_1 è il più piccolo divisore primo dell'ordine di G. Per l'ipotesi a base del processo di induzione, G_1 è p_1-supersolubile, quindi, per una proposizione data in questo n., p_1-complementato. Esiste pertanto un sottogruppo N di G_1 d'indice $p_1^{\alpha_1 - 1}$ in esso, il quale, in base ad un ragionamento analogo a quello fatto sopra, risulta caratteristico in G_1, e di conseguenza normale in G, perchè G_1 è normale in G. Pertanto G ha un sottogruppo normale N d'indice $p_1^{\alpha_1}$ in esso, ed è quindi p_1-complementato. In base alla proposizione data in questo stesso n., G è p_1-supersolubile, c. v. d.

6. Continuando la ricerca delle possibilità di inversione dei risultati dei nn. 1 e 2, poniamoci la domanda: «Se in un gruppo G ciascun indice di ogni catena completa è eguale a p o primo con p, G è necessariamente p-supersolubile?»

Mostreremo che a tale domanda si risponde affermativamente sotto la ipotesi restrittiva che G sia p-risolubile. Non so se la cosa sussista anche senza tale ipotesi: ritengo di sì, perchè non ho trovato alcun esempio in contrario.

Notiamo in primo luogo che *se ogni catena completa di un gruppo* G *ha i suoi indici eguali a* p *o primi con* p*, altrettanto avviene per ogni catena completa di un sottogruppo o di un gruppo fattoriale di* G.

Sia infatti H un sottogruppo di G, e sia $H, H_1, \dots, H_r \equiv 1$ una catena completa di H. Si può costruire una catena completa $G, G_1, \dots, G_m \equiv H$ tra G ed H. Allora la catena $G, G_1, \dots, G_m \equiv H, H_1, \dots, H_r \equiv 1$ è una catena completa di G, e quindi ciascun suo indice è eguale a p o primo con p. Di conseguenza altrettanto avviene per la catena completa $H, H_1, \dots, H_r \equiv 1$ che è parte di essa.

Sia poi $G_{/N}$ un fattoriale di G, e sia $G_{/N}, G_1{}_{/N}, \dots, G_s{}_{/N} \equiv N_{/N} \equiv 1$ una sua catena completa. Si ha allora che $G_i{}_{/N}$ è sottogruppo massimo di $G_{i-1}{}_{/N}$ $(i = 1, \dots, s)$, onde G_i è sottogruppo massimo di G_{i-1}. Allora, detta $N, N_1, \dots, N_l \equiv 1$ una catena completa di N, la catena $G, G_1, \dots, G_s \equiv N, N_1, \dots, N_l \equiv 1$, è una catena completa di G, e pertanto ciascun suo indice è eguale a p o primo con p. Tale è in particolare l'indice di G_i in G_{i-1} $(i = 1, \dots, s)$ e quindi anche quello di $G_i{}_{/N}$ in $G_{i-1}{}_{/N}$, onde la catena $G_{/N}, G_1{}_{/N}, \dots G_s{}_{/N}$ ha gli indici eguali a p o primi con p, c. d. d.

Ora proveremo che:

Se G è un gruppo p-risolubile tale che ogni indice di ciascuna sua catena completa è eguale a p o primo con p, G è p-supersolubile.

Poichè il teorema è immediato quando il numero dei fattori primi dell'ordine del gruppo è piccolo (ad es. $= 1$), potremo procedere per induzione rispetto al numero di detti fattori primi (distinti o no). Dalla proposizione precedente risulta allora che si può supporre la p-supersolubilità di ogni sottogruppo e di ogni gruppo fattoriale di G.

Se G ha un sottogruppo normale minimo M di ordine primo con p, si dimostra facilmente che G è supersolubile. Infatti G/M risulta, in base a quanto abbiamo visto, p-supersolubile, onde una qualsiasi serie principale di G/M, sia essa $G_1/M \cdot G_2/M \cdot \ldots \cdot G_i/M \equiv M/M \equiv 1$, ha ciascun indice eguale a p o primo con p. Poichè $G, G_1, \ldots, G \equiv M \cdot 1$ è allora una serie principale di G, ed inoltre l'indice di G_i in G_{i-1}, eguagliando quello di G_i/M in G_{i-1}/M, e eguale a p o primo con p, e l'ordine di M è primo con p, la suddetta serie principale di G ha gli indici eguali a p o primi con p, onde G risulta p-supersolubile.

Ragionando in modo analogo, si prova che se G ha un sottogruppo normale minimo d'ordine p, G è p-supersolubile.

Essendo G p-risolubile, ogni fattoriale di una sua serie principale, e quindi anche ogni suo sottogruppo normale minimo ha per ordine una potenza di p o un numero primo con p [1]). Poiche abbiamo già dimostrato la p-supersolubilità di G quando un suo sottogruppo normale minimo ha ordine p o un numero primo con p, resta da esaminare il caso in cui ogni sottogruppo normale minimo di G ha per ordine una potenza di p ad esponente maggiore di 1.

Sia P un sottogruppo normale minimo di G d'ordine p^s con $s > 1$. Dimostriamo che tale ipotesi è assurda, dopo di che avremo provato la p-supersolubilità di G.

Sia L un sottogruppo normale massimo di G, contenente P. Essendo G p-risolubile, l'indice di L in G è eguale a p o primo con p. Dobbiamo quindi distinguere due casi.

α) L ha indice p in G. Per l'ipotesi a base del processo di induzione, L è p-supersolubile, onde in P deve essere contenuto un sottogruppo A di ordine p, normale minimo di L. D'altra parte A non può essere normale in G, perchè P è normale minimo in G, onde L è il normalizzante di A, ed avendo L indice p in G, A avrà in G p coniugati, $A_1 \equiv A \cdot A_2, \ldots, A_p$, tutti normali minimi in L, e contenuti in P. Di conseguenza $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_p$ è anch' esso contenuto di P, ed è inoltre normale in G, onde, essendo P normale minimo in G, si ha $P = A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_p$.

---

[1]) S. A. Čunihin, *Sur les p-propriétés des groupes* (citato nella nota [1]). Teorema 8.

Essendo P abeliano del tipo $(1, \ldots, 1)$, perchè sottogruppo normale minimo di G, $A_1, \ldots, A_p$ sono a due a due permutabili, quindi l'ordine p^s di P non supera p^p, vale a dire è $s \leq p$. Proveremo ora che è $s=p$, $P = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_p$, e che $A_1, A_2, \ldots, A_p$ sono i soli sottogruppi d'ordine p di P normali in un qualunque sottogruppo $\overline{L}$ di L che contenga P, abbia indice potenza di p in G, e sia permutabile con un elemento λ di G fuori di L.

Notiamo a tal fine anzitutto che se $b_1, b_2, \ldots, b_r$ è un sistema di generatori indipendenti di un gruppo abeliano B d'ordine p^r e tipo $(1, \ldots, 1)$, e se un elemento di B dipendente effettivamente da tutti gli elementi $b_1, \ldots, b_r$ è portato in una sua potenza da un automorfismo σ di B che porta ciascuno degli elementi $b_1, \ldots, b_r$ in una sua potenza, ogni elemento di B è mutato da σ in una sua potenza. Infatti, se σ porta b_i in $b_i^{y_i}$, e se l'elemento $b_1^{x_1} \ldots b_r^{x_r}$ è mutato da σ nella sua k-esima potenza, si ha

$$(b_1^{x_1} b_2^{x_2} \ldots b_r^{x_r})^\sigma = b_1^{x_1 y_1} b_2^{x_2 y_2} \ldots b_r^{x_r y_r} = b_1^{x_1 k} b_2^{x_2 k} \ldots b_r^{x_r k}$$

il che comporta

$$x_1 y_1 \equiv x_1 k \quad , \quad x_2 y_2 \equiv x_2 k, \ldots, x_r y_r \equiv x_r k \qquad (\text{mod. } p)$$

e non essendo $x_i \equiv 0 \pmod{p}$ $(i=1, \ldots, r)$ perchè $b_1^{x_1} \ldots b_r^{x_r}$ dipende effettivamente da $b_1, \ldots, b_r$, ne segue

$$y_1 \equiv k \quad , \quad y_2 \equiv k, \ldots, y_r \equiv k \qquad (\text{mod. } p)$$

cioè, assumendo $y_i < p$, si ha $y_1 = y_2 = \ldots = y_r = k$. Onde ogni elemento $b_1^{z_1} \ldots b_r^{z_r}$ di B è portato da σ nell'elemento $b_1^{kz_1} \ldots b_r^{kz_r} = (b_1^{z_1} \ldots b_r^{z_r})^k$.

Tornando alla nostra dimostrazione, otteniamo che, detti $a_1, \ldots, a_p$ dei generatori, rispettivamente, di $A_1, \ldots, A_p$, se uno di essi, ad es. a_i, si può esprimere nella forma $a_{i_1}^{x_1} \ldots a_{i_t}^{x_t}$ ove $i_1, \ldots, i_t$ sono t distinti indici, diversi da i, minori o eguali a p, con $a_{i_1}, \ldots, a_{i_t}$ indipendenti e $x_1, \ldots, x_t$ diversi da zero ogni elemento di $A_{i_1} \vee \ldots \vee A_{i_t}$ è mutato in una sua medesima potenza da ciascun automorfismo di P che porta in sè $A_1, A_2, \ldots, A_p$. In particolare ciascun elemento di $\overline{L}$ deve trasformare ogni elemento di $A_{i_1} \vee \ldots \vee A_{i_t}$ in una potenza. Analogamente si vede che se un qualunque elemento di P, esprimibile nella forma $a_{i_1}^{x_1} \ldots a_{i_t}^{x_t}$, con $x_1, \ldots, x_t$ diversi da zero, è trasformato da ciascun elemento di $\overline{L}$ in una sua potenza, altrettanto avviene per ogni elemento di $A_{i_1} \vee \ldots \vee A_{i_t}$. Possiamo quindi concludere che deve verificarsi uno dei due casi seguenti:

1) $a_1, \ldots, a_p$ sono indipendenti, e i soli elementi mutati ciascuno in una sua potenza da ogni elemento di $\overline{L}$ sono quelli di A_1, di $A_2, \ldots,$ di A_p.

2) Esistono t distinti sottogruppi $A_{i_1}, \ldots, A_{i_t}$ tra gli A_i, con $t > 1$, tali che ogni elemento di $A_{i_1} \vee \ldots \vee A_{i_t}$ è trasformato in una sua potenza da ciascun elemento di $\overline{L}$.

Mostriamo ora che il caso 2) non può verificarsi. Faremo vedere anzitutto che se si verifica il caso 2), ogni elemento di P è trasformato in una sua potenza da ciascun elemento di $\overline{L}$.

Potranno infatti trovarsi un intero $u \geq t$ e certi sottogruppi $A_{i_{t+1}}, \ldots, A_{i_u}$ tali che $a_{i_1}, \ldots, a_{i_u}$ sono indipendenti, ogni elemento di $A_{i_1} \vee \ldots \vee A_{i_u}$ è trasformato da ciascun elemento di $\overline{L}$ in una sua potenza, e $A_{i_1} \vee \ldots \vee A_{i_u}$ non è contenuto in un sottogruppo più ampio godente della stessa proprietà. Dico che $A^* = A_{i_1} \vee \ldots \vee A_{i_u}$ coincide con P. Se così non fosse, detta $\overline{\lambda}$ una potenza di λ (certo esistente) che trasformi A_{i_1} in A_{i_2} avremmo che $\overline{A} = \overline{\lambda}^{-1} A^* \overline{\lambda}$ sarebbe diverso da A^*, altrimenti λ dovrebbe permutare tra loro i sottogruppi A_i contenuti in A^*, che sono in numero minore di p, mentre λ opera negli A_i una sostituzione d'ordine p. Anche $\overline{A}$, al pari di A^*, godrebbe della proprietà che ogni suo elemento sarebbe trasformato in una sua potenza da ciascun elemento di L. Ma $\overline{A}$ e A^* hanno in comune, per lo meno, A_{i_2}, onde se μ è un qualsiasi elemento di $\overline{L}$, ed esso trasforma a_{i_2} in $a_{i_2}^k$, esso deve trasformare sia ogni elemento di A^*, sia ogni elemento di $\overline{A}$, quindi ogni elemento di $A^* \vee \overline{A}$, nella sua k-esima potenza. E ciò è contro l'ipotesi che A^* non fosse contenuto in un sottogruppo più ampio, ogni elemento del quale fosse trasformato da ciascun elemento di $\overline{L}$ in una sua potenza. Ne segue che $A^* = P$, quindi, se non si verifica la condizione 1), deve verificarsi la

2') Ogni sottogruppo di P d'ordine p è normale in $\overline{L}$.

Mostriamo ora che la 2') (e quindi la 2) non può sussistere. Il sottogruppo P è contenuto in un sottogruppo di Sylow S di G relativo a p, ed è normale in esso, onde deve esistere un sottogruppo C d'ordine p di P normale in S. Se vale la 2'), C è normale anche in $\overline{L}$, quindi anche in $S \vee \overline{L} = G$, contro l'ipotesi che P sia sottogruppo normale minimo di G. Deve quindi necessariamente valere la 1).

Abbiamo quindi che:

$A_1, A_2, \ldots, A_p$ sono i soli sottogruppi d'ordine p di P che sono normali in un sottogruppo $\overline{L}$ di L il quale contiene P, ha indice potenza di p in G ed è trasformato in sè da un elemento λ fuori di L.

Essendo L p risolubile, se diciamo $p^\alpha m$ l'ordine di G, si ha che L contiene sottogruppi d'ordine m, e questi son tra loro coniugati [1]) in L. Sia M un tale sottogruppo. Se τ è un elemento di G non contenuto in L, si ha che $\tau^{-1} M \tau$ è ancora in L, perchè L è normale in G, e d'altra parte $\tau^{-1} M \tau$ è coniugato ad M in L, onde esiste un elemento σ di L tale che $\sigma^{-1}(\tau^{-1} M \tau)\sigma = M$. Allora l'elemento $\lambda = \tau\sigma$ trasforma M in sè, e non è in L.

Sia H il più piccolo sottogruppo che contiene λ ed M. Essendo P del tipo $(1, \ldots, 1)$, $H \wedge P$ ha ordine 1 o p. Il sottogruppo H deve far parte di una catena completa di G, sia essa $G, G_1, \ldots G_s \equiv H, \ldots$ in cui, per ipo-

[1]) Facile conseguenza del teorema n. 27 del cap. IV di Zassenhaus, *Gruppentheorie*, Leipzig, 1937.

tesi, ogni indice è uguale a p o primo con p. Ma poichè H ha in G un indice potenza di p, i primi s indici della catena sono eguali a p. Essendo P normale in G, gli indici della catena $P, P\wedge G_1, \ldots, P\wedge H$ sono eguali a p o a 1. Dovrà quindi esservi in tale catena un sottogruppo, sia esso $P\wedge G_r$, di ordine p. Esso è normale in G_r, perchè P è normale in G, quindi, essendo H in G_r, $P\wedge G_r$ è trasformato in sè da ogni elemento di H, e di conseguenza è normale in $P\vee H$, e in $(P\vee H)\wedge L$. Ma il sottogruppo $(P\vee H)\wedge L$ ha in G indice potenza di p, perchè contiene M, inoltre contiene P, ed è trasformato in se da λ, (che non è in L) perchè λ è in H, e trasforma in sè sia P che L, che sono normali in G. Pertanto $P\wedge G_r$ deve essere, in base a quanto si è visto sopra, uno dei sottogruppi generati da a_1, da $a_2, \ldots$, da a_p, sia ad es. A_i. Allora A_i è normale in L, ed è trasformato in sè da λ, perchè λ è in H, e quindi è normale in G, che è il minimo sottogruppo contenente L e λ. E ciò è assurdo, perchè per ipotesi P è sottogruppo normale minimo di G. Il caso α), quindi, si esclude.

β) L'indice di L in G è primo con p, sia esso k.

Per ipotesi, L è p-supersolubile, e quindi dovrà trovarsi in P un sottogruppo A d'ordine p, normale in L, ma non in G. Il normalizzante di A in G contiene L, quindi il suo indice in G è un divisore h di k. Pertanto A ha in G h coniugati $A_1 \equiv A, A_2, \ldots, A_h$, tutti normali in L e contenuti in P. La loro unione $A_1\vee A_2\vee \ldots \vee A_h$ è normale in G e contenuta in P, quindi coincide con P stesso, perchè questo è normale minimo in G.

Se $p^\alpha m$ è l'ordine di G, l'ordine di L è $p^\alpha \cdot \frac{m}{k}$, onde L deve contenere un sottogruppo di Sylow S d'ordine p^α, il quale a sua volta contiene P. I sottogruppi $A_1, \ldots, A_h$, essendo normali in L, sono normali anche in S, ed avendo ordine p, sono nel centro di S. Pertanto anche $P = A_1\vee A_2\vee \ldots \vee A_h$ è nel centro di S.

Se ora M è un sottogruppo d'ordine m di G (certo esistente; perchè G è p-risolubile), dovrà esistere una catena completa che contenga tanto PM che M, i cui indici devono essere, per ipotesi, eguali a p o primi con p. Ma poichè M ha indice p^α in PM, (perchè essendo P normale in PM, questo ha ordine $p^\alpha m$), i sottogruppi di detta catena compresi tra PM e M devono avere ciascuno indice p nel precedente. Esiste quindi un sottogruppo di PM, contenente M, e di ordine pm: sia esso U. Essendo P normale in G, $A^* = U\wedge P$ è normale in U.

Ma A^*, essendo in P, è nel centro di S, onde è normale anche in S, e quindi è normale anche in $S\vee U$. Essendo poi $S\vee U$ di ordine $\geq p^\alpha mp/p$, cioè eguale a G, si ha che il sottogruppo A^*, d'ordine p, è normale in G, contro l'ipotesi che P sia normale minimo in G. Anche il caso β) quindi si esclude, onde il teorema risulta pienamente dimostrato.

La prima rappresentazione dell'S_4 proiettivo legato ad un'algebra doppia definita nel corpo $C[3]$

Nota del dott. **Angelo Fadini**, *presentata dal socio* **N. Spampinato**

(Adunanza del dì 2 dicembre 1950)

Sunto. — In un'altra mia nota [1]) ho dato la prima rappresentazione degli S_4 proiettivi legati a due algebre doppie, dotate di modulo, definite nel corpo $C[2]$. Seguendo anche qui i metodi generali indicati dal prof. Spampinato [2]) dò la prima rappresentazione dell'S_4 proiettivo legato ad un'algebra doppia dotata di modulo, definita nel corpo finito $C[3]$.

1. *L'* S_3 *lineare finito sul corpo* $C[3]$. — È noto che l'S_3 lineare finito sul corpo $C[3]$ contiene 40 punti, 40 piani, e 130 rette; che su ogni retta giacciono 4 punti e su ogni piano ne giacciono 13; e che infine per ogni punto passano 13 piani e 13 rette e per ogni retta 4 piani.

È facile constatare che le rette che si appoggiano a due rette sghembe sono soltanto 16 e costituiscono quindi una figura che generalizza, in questo spazio finito, la congruenza biassiale di rette.

2. *L'algebra* A *definita nel* $C[3]$. — Tra le matrici $z = \begin{Vmatrix} x & y \\ z & t \end{Vmatrix}$, con x, y, z, t numeri del corpo $C[3]$, consideriamo quelle che hanno nulle le coordinate y e z, cioè le matrici a due unità u_1, u_2 del tipo:

$$\alpha = \begin{Vmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{Vmatrix} = xu_1 + tu_2 .$$

Al variare di x e t nel $C[3]$ la matrice α descrive un insieme finito di matrici, che costituisce un'algebra doppia A. dotata di modulo. La tabella di moltiplicazione delle unità u_1, u_2 è identica a quella dell'algebra dei numeri bireali. I numeri α dell'algebra A sono soltanto i nove seguenti:

$$\alpha_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \alpha_5 = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix},$$

$$\alpha_6 = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \alpha_7 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}, \quad \alpha_8 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \alpha_9 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

---

[1]) Fadini A., *La prima rappresentazione degli* S_4 *proiettivi legati a due algebre doppie definite nel corpo* $C[2]$. Rend. Acc. Sc. fis. e mat., s. 4ª, vol. XVII. Napoli, 1950

[2]) Spampinato N., *Le riemanniane degli* S_r *ipercomplessi*. Rend. Acc. Sc. fis. e mat., Napoli, serie 4ª, vol. XIII. Napoli, 1942-45.

tra i quali sussistono le seguenti relazioni:

$$\alpha_5\alpha_1 = \alpha_5 \qquad \alpha_5\alpha_4 = \alpha_9 \qquad \alpha_5\alpha_7 = \alpha_8$$
$$\alpha_5\alpha_2 = \alpha_4 \qquad \alpha_5\alpha_5 = \alpha_1 \qquad \alpha_5\alpha_8 = \alpha_7$$
$$\alpha_5\alpha_3 = \alpha_6 \qquad \alpha_5\alpha_6 = \alpha_3 \qquad \alpha_5\alpha_9 = \alpha_9 .$$

Con le 9 matrici α si possono formare 64 coppie di caratteristica due tra le quali soltanto 16 sono definite a meno di un fattore non nullo nè divisore dello zero, cioè a meno del fattore α_5. Esse sono:

$$(\alpha_1 . \alpha_1) = (\alpha_2 . \alpha_4) = (\alpha_4 . \alpha_2) = (\alpha_5 . \alpha_5) \qquad (\alpha_1 . \alpha_9) = (\alpha_2 . \alpha_9) = (\alpha_4 . \alpha_9) = (\alpha_5 . \alpha_9)$$
$$(\alpha_1 . \alpha_2) = (\alpha_2 . \alpha_1) = (\alpha_4 . \alpha_5) = (\alpha_5 . \alpha_4) \qquad (\alpha_3 . \alpha_4) = (\alpha_1 . \alpha_5) = (\alpha_6 . \alpha_1) = (\alpha_6 . \alpha_2)$$
$$(\alpha_1 . \alpha_3) = (\alpha_2 . \alpha_3) = (\alpha_4 . \alpha_6) = (\alpha_5 . \alpha_6) \qquad (\alpha_3 . \alpha_7) = (\alpha_3 . \alpha_8) = (\alpha_6 . \alpha_7) = (\alpha_6 . \alpha_8)$$
$$(\alpha_1 . \alpha_4) = (\alpha_2 . \alpha_5) = (\alpha_5 . \alpha_2) = (\alpha_4 . \alpha_1) \qquad (\alpha_3 . \alpha_1) = (\alpha_3 . \alpha_2) = (\alpha_6 . \alpha_4) = (\alpha_6 . \alpha_5)$$
$$(\alpha_1 . \alpha_5) = (\alpha_5 . \alpha_1) = (\alpha_2 . \alpha_4) = (\alpha_4 . \alpha_2) \qquad (\alpha_7 . \alpha_1) = (\alpha_7 . \alpha_4) = (\alpha_8 . \alpha_2) = (\alpha_8 . \alpha_5)$$
$$(\alpha_1 . \alpha_6) = (\alpha_2 . \alpha_6) = (\alpha_4 . \alpha_3) = (\alpha_5 . \alpha_3) \qquad (\alpha_7 . \alpha_2) = (\alpha_7 . \alpha_5) = (\alpha_4 . \alpha_1) = (\alpha_8 . \alpha_4)$$
$$(\alpha_1 . \alpha_7) = (\alpha_2 . \alpha_8) = (\alpha_4 . \alpha_7) = (\alpha_5 . \alpha_8) \qquad (\alpha_7 . \alpha_3) = (\alpha_7 . \alpha_6) = (\alpha_8 . \alpha_3) = (\alpha_8 . \alpha_6)$$
$$(\alpha_1 . \alpha_8) = (\alpha_2 . \alpha_7) = (\alpha_5 . \alpha_7) = (\alpha_4 . \alpha_8) \qquad (\alpha_9 . \alpha_1) = (\alpha_9 . \alpha_2) = (\alpha_9 . \alpha_4) = (\alpha_9 . \alpha_5)$$

3. *Il gruppo equivalente.* — Consideriamo la matrice quadrata del 4° ordine del tipo:

$$(M) = \begin{Vmatrix} M & O \\ O & M \end{Vmatrix}$$

composta con quattro matrici quadrate del 2° ordine, due uguali alla matrice M dell'elemento corrente nell'algebra A e due uguali alla matrice nulla O. Poichè la matrice M coincide con la sua trasposta si ha:

$$(M) = \begin{Vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{Vmatrix}.$$

Dalla teoria generale degli S_r ipercomplessi dello Spampinato si deduce che l'algebra A determina, nello spazio proiettivo legato al corpo $C[3]$, un gruppo di proiettività equivalente all'algebra e la cui matrice è proprio la M. Pertanto le equazioni del gruppo equivalente all'algebra A sono:

$$\rho_1' = x\rho_1 \ , \quad \rho_2' = t\rho_2 \ , \quad \rho_3' = x\rho_3 \ , \quad \rho_4' = t\rho_4 \qquad (*)$$

Questo gruppo ha due soli parametri omogenei x e t i quali possono assu-

mere soltanto i valori 0, 1, 2; esso quindi è di nono ordine (di ottavo se si esclude che sia $x = t = 0$). Esso contiene quindi le nove proiettività seguenti:

$$\pi_1 \equiv \begin{cases} \rho_1' = \rho_1 \\ \rho_2' = \rho_2 \\ \rho_3' \quad \rho_3 \\ \rho_4' = \rho_4 \end{cases} \quad \pi_2 \equiv \begin{cases} \rho_1' = \rho_1 \\ \rho_2' = 2\rho_2 \\ \rho_3' \quad \rho_3 \\ \rho_4' = 2\rho_4 \end{cases} \quad \pi_3 \equiv \begin{cases} \rho_1' = \rho_1 \\ \rho_2' = 0 \\ \rho_3' = \rho_3 \\ \rho_4' = 0 \end{cases} \quad \pi_4 \equiv \begin{cases} \rho_1' = 2\rho_1 \\ \rho_2' = \rho_2 \\ \rho_3' = 2\rho_3 \\ \rho_4' = \rho_4 \end{cases} \quad \pi_5 \equiv \begin{cases} \rho_1' = 2\rho_1 \\ \rho_2' = 2\rho_2 \\ \rho_3' = 2\rho_3 \\ \rho_4' = 2\rho_4 \end{cases}$$

$$\pi_6 \equiv \begin{cases} \rho_1' = 0 \\ \rho_2' = 2\rho_2 \\ \rho_3' = 0 \\ \rho_4' = 2\rho_4 \end{cases} \quad \pi_7 \equiv \begin{cases} \rho_1' = 2\rho_1 \\ \rho_2' = 0 \\ \rho_3' = 2\rho_3 \\ \rho_4' = 0 \end{cases} \quad \pi_8 \equiv \begin{cases} \rho_1' = 0 \\ \rho_2' = \rho_2 \\ \rho_3' = 0 \\ \rho_4' = \rho_4 \end{cases} \quad \pi_9 \equiv \begin{cases} \rho_1' = 0 \\ \rho_2' = 0 \\ \rho_3' = 0 \\ \rho_4' = 0 \end{cases}$$

delle quali π_1 e π_5 sono identiche, e $\pi_3, \pi_6, \pi_7, \pi_8, \pi_9$ sono degeneri; esse corrispondono ai nove numeri dell'algebra.

I punti uniti della generica proiettività (*) si hanno in corrispondenza dei valori delle ρ_i pei quali si ha: $\rho_1' : \rho_2' : \rho_3' : \rho_4' = \rho_1 : \rho_2 : \rho_3 : \rho_4$ e pertanto, escludendo l'identità, si hanno due quaterne di punti uniti, e precisamente i punti:

$$P_1(1,0,0,0) \quad , \quad P_3(0,0,1,0) \quad , \quad P_8(0,1,1,0) \quad , \quad P_{17}(1,0,2,0)$$
$$P_2(0,1,0,0) \quad , \quad P_9(0,1,0,1) \quad , \quad P_{20}(0,1,0,2) \quad , \quad P_4(0,0,0,1)$$

che costituiscono due rette unite.

Se $\overline{P}\,(\overline{\rho_1}, \overline{\rho_2}, \overline{\rho_3}, \overline{\rho_4})$ è un punto di S_3, l'omologo per le (*) è $\overline{P}'(x\overline{\rho_1}, t\overline{\rho_2}, x\overline{\rho_3}, t\overline{\rho_4})$. Al variare di x e t nel corpo finito $C[3]$ $\overline{P}'$ descrive la varietà invariante minima del gruppo e si riconosce agevolmente che tale varietà è la retta passante per $\overline{P}$ ed appoggiantesi alle rette unite. Al variare di $\overline{P}$ si hanno così 16 rette, tutte appoggiate a due rette sghembe, ad ognuna delle quali possiamo far corrispondere una delle coppie (α_i, α_j). Possiamo quindi affermare che *la totalità delle varietà invarianti minime del gruppo equivalente all'algebra A, generate dai punti generici dell'* S_3, *costituisce una congruenza lineare di rette dell'* S_3 *del* $C[3]$ *che fornisce una prima rappresentazione, in tale* S_3, *dell'* S_1 *proiettivo legato all'algebra A definita nel corpo* $C[3]$.

La definizione di questo S_1 rientra come caso particolare nella definizione generale di S_r ipercomplesso data dal prof. Spampinato.

Petrografia chimica dei tufi flegrei: 1) il tufo giallo
Nota prima (con 14 nuove analisi)

Nota del socio ordinario **Antonio Scherillo**

(Adunanza del dì 2 dicembre 1950)

Sunto. - Vengono studiati dal punto di vista chimico-petrografico alcuni tufi del secondo periodo flegreo (tufi gialli e grigi di S. Stefano al Vomero, tufi gialli di Mergellina, M. Gauro e dello scoglio del Lazzaretto) e alcune pomici e scorie incluse.

Non si può certo dire che sui tufi flegrei manchino lavori così generali come particolari, sia dal punto di vista geologico e petrografico che tecnico. Mi limito a ricordare tra i lavori di carattere geomineralogico quelli di De Lorenzo, Scacchi, Zambonini, D' Erasmo e tra quelli di carattere tecnico i lavori di Dell' Erba e Penta. L'elenco degli autori dovrebbe certo essere più lungo, ma, nel corso del lavoro, avrò occasione di fare diverse citazioni bibliografiche.

Manca invece sui nostri tufi un lavoro petrografico d' insieme, e, a questo proposito, credo di dover avvertire che io sono un fautore dell' indirizzo chimico della petrografia, specialmente quando si tratta di studiare delle rocce come i tufi per le quali l' esame al microscopio dà solo magri risultati. Basta esaminare la raccolta delle analisi chimiche dei prodotti flegrei per notare che le analisi dei tufi, che pure rappresentano i materiali di gran lunga preponderanti nella regione, sono assolutamente subordinate in confronto a quelle delle lave e dei proietti vulcanici, forse per la solita tendenza dei petrografi a studiare a preferenza i prodotti meno comuni. In particolare sono deficienti le analisi dei nostri tufi gialli, cioè proprio di quelle rocce che costituiscono l' ossatura dei colli flegrei, ed è probabile che la loro grande uniformità, almeno apparente, e il fatto che si tratta indubbiamente di tufi alcalitrachitici (la definizione va intesa in senso largo), abbiano contribuito a renderli poco interessanti ai petrografi e quindi a farne trascurare lo studio.

Forse solo chi vive a Napoli e ama profondamente questa città è in grado di intraprendere tale studio, perchè allora lo interessano tutte le rocce della zona di Napoli, almeno per la loro provenienza, e in particolare il tufo giallo col quale e sul quale è costruita tanta parte della città e che, con le alte pareti giallastre dei numerosi tagli e fronti di cava, in cui si aprono ampie grotte, e con i dirupi a picco sul mare di Capo Posillipo Coroglio e Nisida, conferisce un aspetto così caratteristico e indimenticabile al paesaggio flegreo.

Per tale ragione, e perchè inoltre mi trovo nella condizione fortunata di non aver necessità che i miei studi portino a risultati nuovi o brillanti nè che siano rapidamente conclusi, mi sono proposto lo studio sistematico dei tufi flegrei caratteristici, cominciando (dato che il tufo campano è ormai abbastanza conosciuto dopo i lavori di Zambonini [1]) dal tufo giallo, per continuare col tufo grigio del terzo periodo.

A tale studio petrografico il presente lavoro non rappresenta che un primo contributo, perchè, prima di poter trarre qualche conclusione generale, sarà necessario l'esame dei tufi gialli di diverse località. Infatti in questo lavoro studio quasi esclusivamente tufi provenienti dalla zona compresa tra Castel S. Elmo, Villanova, Mergellina, cioè, in altre parole, dalla collina alle spalle della Riviera di Chiaia. Qualche analisi di tufi gialli di altra provenienza l'ho compiuta a scopo di confronto. Inoltre alcune delle 14 analisi chimiche (che tutte ho eseguito io personalmente) non si riferiscono a tufi, ma bensì a pomici e a proietti lavici: queste si sono rese necessarie per poter abbozzare alcune conclusioni, certo sommarie e forse provvisorie.

Ho deplorato poco sopra la tendenza dei mineralogisti a studiare i materiali più rari, piuttosto che i più comuni, ma, effettivamente, è ben difficile poter vincere la tentazione di dar la preferenza e la precedenza nello studio a ciò che esce in qualche modo dalla normalità, tanto è vero che lo spunto a questo lavoro me l'ha dato una varietà del tufo flegreo del secondo periodo, già nota e descritta, ma che io osservavo per la prima volta: quella varietà cioè che, invece che gialla, è grigio azzurrognola.

Nel dicembre 1948 mi sono recato col collega e amico D'Erasmo a compiere un sopraluogo alla galleria che l'Acquedotto di Napoli esegue nella zona di S. Stefano al Vomero in prossimità del serbatoio sotterraneo. Sulle pareti di questa galleria, che è aperta nel « tufo giallo », si osservano alcune zone di colore grigio azzurrognolo; ma, mentre il limite tra parti gialle e grige è nettissimo, tale limite non corrisponde a nessuna soluzione di continuità della roccia, la quale costituisce, nel modo più evidente, una massa unica. Le parti grigio-azzurrastre rappresentano quindi non degli inclusi, ma i nuclei residui della roccia colla tinta originaria, e infatti, dove è attraversato da fessure, il tufo è tutto intorno ingiallito.

Il tufo giallo doveva quindi avere in origine un colore grigio azzurrastro. Tale tinta è però stata certo di brevissima durata, nelle parti super-

---

[1]) Zambonini F., *Il tufo pipernoide della Campania e i suoi minerali.* Memorie descr. Carta Geol. d'Italia, Vol. VII. Roma, 1918. — Id. *Ricerche chimiche su materiali vulcanici della Campania. Composizione chimica del tufo campano di Parete.* Boll. Soc. Geol. It., vol. 49. Roma, 1930.

ficiali specialmente; basta esporre all'aria i campioni grigi perchè questi, dopo pochi mesi, acquistino un colore giallo quasi identico a quello del tufo ordinario. Del resto la tinta grigia per il tufo del secondo periodo flegreo è una rarità: di solito anche negli scavi a notevole profondità si trova che il tufo conserva la sua tinta gialla.

La singolarità della tinta del tufo mi ha spinto a studiare questa varietà, e, contemporaneamente, anche la gialla per confronto. Così è nato il presente lavoro.

Questo tufo grigio azzurrastro di S. Stefano al Vomero è stato segnalato e descritto dall'ing. M. Guadagno circa 25 anni fa [1], e, molto recentemente, P. Nicotera [2] rendeva noto che tale tufo è stato pure rinvenuto in un pozzo scavato dalla medesima società dell'Acquedotto nella zona del Forte Ricciardi, sempre nella collina del Vomero.

Poco dopo la pubblicazione di Guadagno, Salvatore e Friedlaender [3] segnalavano l'esistenza di un tufo del tutto simile, al Vomero, in Via Sanfelice, alle spalle della villa « La Santarella ». Su questo lavoro dovrò tornare tra poco, ma qui voglio ricordare che i due autori parlano, secondo me impropriamente, non di « tufo grigio azzurrastro » ma di « tufo verde ». Ormai nei tufi di questa zona cittadina, nei quali sono stati fatti ampi tagli la tinta è scomparsa, ma da quanto ho potuto osservare a S. Stefano, credo che la tinta sia stata piuttosto grigia che verde. Inoltre quando si parla di « tufo verde » si intende senz'altro il tufo verde di Ischia. Ma questo, anche se esposto alle intemperie, non perde la sua tinta che, secondo Rittmann e Salvatore [4], sarebbe dovuta alla presenza di un minerale glauconitico. Anche gli inclusi di tufo verde nel tufo giallo conservano il loro colore. È bene quindi non confondere questa varietà grigio azzurrastra col tufo verde.

Gli studi di Guadagno, e specialmente di D'Erasmo [5], sulla stratigrafia che risulta dall'esame delle perforazioni dei pozzi in Napoli e dintorni, hanno condotto a stabilire la seguente successione nei locali materiali flegrei, fino al tufo giallo.

---

[1]) Guadagno M., *Il tufo trachitico ossidianico di S. Stefano al Vomero (Napoli).* Boll. Soc. Nat. in Napoli, vol. 37. Napoli, 1926.

[2]) Nicotera P., *Contributo alla conoscenza del tufo trachitico della collina del Vomero (Napoli).* Ibidem, vol. 58. Napoli, 1949

[3]) Salvatore E., Friedlaender I., *Contributo allo studio del tufo napoletano: Su una varietà verde.* Zeit. für Vulk., vol. 10. Berlino, 1926-27.

[4]) Rittmann A., Salvatore E., *Contributo allo studio dei tufi verdi della regione flegrea.* Zeit. für Vulk., vol. 11. Berlino, 1927-28.

[5]) Guadagno M., *Op. cit.* — *Notizie sul pozzo artesiano recentemente trivellato nella Piazza di S. Maria la Fede in Napoli.* Boll. Soc. Nat. in Napoli, vol. 30. Napoli, 1925 — D'Erasmo G., *Studio geologico dei pozzi profondi della Campania* Boll. Soc. Nat. in Napoli, vol. 43. Napoli, 1931.

1) Banchi di lapilli, pomici, pozzolane e ceneri più o meno alterate, costituenti un tufo trachitico di colore generalmente bigio chiaro o grigio verdastro, tendente a passare al giallo per successiva ossidazione. Questa formazione è l'equivalente del « tufo campano ».

2) Banchi di tufo verdognolo o verde chiaro che, passando spesso a giallo chiaro o a grigio giallastro, non appare distinto nettamente dal tufo giallo paglierino sovrastante. Questo tufo verdino manca di inclusi ossidianici, ha poche pomici, per lo più argentine, e contiene foraminiferi e conchiglie di molluschi marini.

3) Tufo giallo.

Esiste dunque la possibilità che frammenti dei tufi sottostanti si trovino inglobati nel tufo giallo. Questo però non è il caso del tufo di S. Stefano, dove le parti gialle e le grigie non rappresentano, come abbiamo veduto, che due varietà di una stessa roccia.

Forse al tufo grigio di S. Stefano corrisponde il « tufo ferrigno » di cui parla dell'Erba, ma sull'argomento non posso dire niente; comunque le proprietà tecniche dei due tufi appaiono diverse [1]).

Il tufo di S. Stefano è abbastanza compatto (e le varietà grigie lo sono più delle gialle) ed è ricco di piccoli inclusi uniformemente distribuiti. Si tratta di pomici, che di solito hanno 1 o 2 mm. di diametro e di rado raggiungono 1 cm., di frammenti di ossidiana, di scorie o di lave microcristalline, sempre di piccole dimensioni, oppure (ma questi sono quanto mai scarsi) di frammenti di cristalli di felspato, e pirosseno. Dove il tufo è ingiallito, lo sono pure le pomici, dove è grigio queste sono grigio azzurrastre. I frammenti lavici e le scorie conservano invece la loro tinta grigia o nerastra. Ho detto che le parti grigie del tufo ingialliscono rapidamente: conservano però, almeno per vari anni, un tono avana e una tinta un po' più scura.

La massa fondamentale del tufo è compatta e niente vi si distingue ad occhio nudo.

Osservata al microscopio, la massa appare costituita da un impasto di ceneri e di minutissime pomici, con qualche frammento di cristalli di felspato e di pirosseno. Il colore appare in complesso giallo verdastro chiaro, sia per le parti di tufo grigio che per quelle grigio azzurrognole.

La massa ingloba inclusi lavici, scorie, pomici, frammenti di cristalli di dimensioni maggiori. Il vetro delle ossidiane, che talora sono ricche di inclusioni gassose, si presenta colorato in giallastro chiaro, mentre quello di alcune scorie può anche apparire giallo rossastro intenso e altre volte è nero, opaco anche in sezione sottile. Il bordo, sia delle ossidiane che delle scorie e delle pomici, è segnato, come ha fatto rilevare Guadagno, da un orlo isotropo, intensamente colorato in bruno e lo stesso accade per le pareti dei vacuoli e dei canalicoli delle scorie e delle pomici, anche per

[1]) Dell'Erba L., *Il tufo giallo napolitano*. Napoli, 1923. — Nicotera P., *op. cit.*

quelle più minute della massa fondamentale. Il lume di questi vacuoli e canalicoli è talora riempito da una sostanza perfettamente incolora, trasparente, otticamente isotropa, con indice di rifrazione nettamente inferiore a quello del balsamo. Penso che si tratti di una sostanza colloidale, prodottasi nella diagenesi; forse opale. Altre volte le pareti delle cavità sono tappezzate da cristallini aciculari, di cui non è stato possibile accertare la birifrazione (forse si tratta di zeoliti), altre volte ancora di felspati.

Nella massa si trovano inclusi, come ho detto, frammenti di cristalli di felspato di dimensioni abbastanza considerevoli. Si tratta per lo più di sanidino colla caratteristica geminazione sec. Carlsbad, ma vi è anche qualche plagioclasio basico riconoscibile per la rifrazione e birifrazione maggiori. Si osservano pure frammenti di pirosseno, verde chiaro, non pleocroico, mentre la biotite sembra estremamente rara.

I tufi contengono sempre della calcite, ma questa non è uniformemente distribuita, bensì si trova specialmente nella cavità di alcune singole scorie e pomici.

Ecco i risultati delle analisi dei tufi di S. Stefano:

	I	II	III	IV
SiO_2	50,69	50,23	50,98	50,75
TiO_2	0,20	0,23	0,23	0,25
ZrO_2	0,09	0,05	0,04	0,04
Al_2O_3	16,02	16,38	16,42	16,49
Fe_2O_3	3,55	4,76	4,24	4,57
FeO	1,42	0,58	1,12	0,49
MnO	0,10	0,10	0,10	0,12
MgO	1,35	1,42	1,46	1,05
CaO	3,55	3,88	3,80	3,42
BaO	0,08	0,07	0,10	0,11
K_2O	5,64	6,10	5,85	6,29
Na_2O	4,00	3,55	3,36	3,52
P_2O_5	0,16	0,16	0,16	0,12
SO_3	0,09	0,11	0,09	0,13
Cl	0,08	0,07	0,05	0,06
CO_2	0,74	0,88	1,12	0,44
H_2O^-	4,12	3,64	3,07	4,54
H_2O^+	7,98	7,75	8,61	7,94
	99,86	99,96	100,80	100,33

I. Tufo S. Stefano, Vomero. Campione *a*, parte grigia (an. Scherillo)
II. Ibid. Campione *a*, parte gialla (an. Scherillo)
III. Ibid. Campione *b*, parte grigia, un po' ingiallita (an. Scherillo)
IV. Ibid. Campione *b*, parte gialla (an. Scherillo).

Da queste analisi, dedotta da ciascuna la quantità di $CaCO_3$ corrispondente a CO_2, si calcolano i seguenti valori di Niggli:

	si	al	fm.	c.	alc.	k	mg	$\frac{al}{c+alc.}$	si°
I.	197	37	23	11	29	0.49	0.36	0.92	0.91
II.	192	37	23 ½	11 ½	28	0.53	0.34	0.94	0.91
III.	200	38	24	10 ½	27 ½	0.53	0.33	1.00	0.94
IV.	198	38	21 ½	11 ½	29	0.55	0.28	0.91	0.91

Trattandosi di rocce piroclastiche non perfettamente fresche, non è possibile stabilirne senz'altro il chimismo.

Per adesso possiamo stabilire, e nel modo più sicuro, che i « tufi gialli » e i « tufi grigio-azzurrastri » hanno una composizione chimica praticamente identica. I secondi non differiscono di primi che per un tenore di FeO più alto e uno di Fe_2O_3 più basso.

Il tufo giallo e il « verde » della Santarella al Vomero sono stati analizzati da Salvatore [1]), ma, sebbene tali tufi appaiano, per struttura e composizione mineralogica analoghi a quelli di S. Stefano, i risultati delle analisi chimiche di tali tufi appaiono abbastanza diversi da quelli riportati sopra. Ad ogni modo riporto anche le due analisi di Salvatore che finora rappresentavano le sole analisi recenti di tufi flegrei del secondo periodo, e sulle quali si è fondato Rittmann nel suo studio sul tufo napoletano [2]).

	a	b
SiO_2	49.04	50.63
TiO_2	0.54	0.38
Al_2O_3	18.92	19.86
Fe_2O_3	4.09	3.92
FeO	1.45	0.76
MnO	0.11	0.10
MgO	1.93	2.83
CaO	4.21	4.06
K_2O	2.54	3.41
Na_2O	5.91	4.37
P_2O_5	0.19	0.22
Cl	—	tr
CO_2	0.49	0.43
H_2O^-	7.38	6 01
H_2O^+	3.13	3.18
	99.93	100.16

[1]) Salvatore E. e Friedlaender I., *Op. cit.*

[2]) Rittmann A., *Beitrag zur Kenntnis des neapolitanischen Tuffs.* Zeit. für Vulk., vol. 10. Berlino, 1926-27.

a) Tufo della Santarella (Vomero), parte « verde » (an. Salvatore)
b) Tufo della Santarella (Vomero), parte « gialla » (an. Salvatore)

	si	al	fm	c	alc	k	mg	$\frac{al}{c+alc}$	si⁰
a)	162	37	24	15	24	0.22	0.40	0.95	0.87
b)	167	38 ½	26	14 ½	21	0.34	0.54	1.08	0.91

Effettivamente i risultati di queste analisi lasciano un po' incerti. In primo luogo la composizione dei tufi appare un po' troppo oscillante, trattandosi di due parti, diversamente colorate, di uno stesso campione. In *a* K_2O appare un po' troppo subordinato a Na_2O, mentre in *b* il valore di MgO è inspiegabilmente alto; i tenori di H_2O^+ e H_2O^- si direbbero scambiati in ambedue le analisi. Con tutto ciò mi mancano però elementi sicuri per infirmare il valore di queste due analisi.

Salvatore a proposito del tufo della Santarella ha affacciato l'ipotesi che non sia il tufo giallo che derivi dal « verde » per ossidazione, ma, al contrario, che sia questo che derivi da quello in seguito a riduzione secondaria di Fe_2O_3. A me, (e così pure a Guadagno) è apparsa più attendibile, in base a quanto si può osservare nella galleria di S. Stefano, la prima ipotesi, ma neppure quest'ultima è da scartare del tutto. Infatti, secondo le mie analisi, i tufi grigi, salvo che per il rapporto $FeO : Fe_2O_3$ non sembrano affatto più freschi dei gialli. Pure la constatazione che le zone grige sono molto localizzate, perchè in genere il tufo si presenta giallo anche nelle zone profonde, consiglia a non rifiutare l'ipotesi di Salvatore.

Dati i risultati dell'analisi di Salvatore, mi sono preoccupato di stabilire se la composizione degli altri tufi della collina del Vomero si accosti o no a quella dei tufi di S. Stefano. Ma, prima di tutto, ho voluto analizzare un campione del tufo della Santarella, che era stato a suo tempo gentilmente donato all'Istituto di Mineralogia dal dott. Salvatore. Il tufo concorda perfettamente con quello descritto da questo autore e da Friedleander, salvo che è ormai completamente ingiallito; la parte che in origine era grigia è però ancora ben riconoscibile per la sua tinta avana: è su questa che ho eseguito l'analisi.

Ho inoltre analizzato un tufo raccolto qualche decina di metri più in basso, cioè sul fianco, tagliato nella collina, di via Luigia Sanfelice, dove questa terminava fino al 1946. Tale tufo è giallo chiaro, non molto coerente, ricco di piccole pomici farinose, giallastro. L'altro tufo analizzato proviene da Via Orazio, sopra Mergellina, dal taglio dietro Villa Lia. A queste analisi aggiungo quella di una piccola scoria nera, del tufo di via Sanfelice: questa scoria era costituita da una sostanza nera, opaca, e non mostrava alcun cristallo.

	V	VI	VII	VIII
SiO_2	50.30	49.53	49.69	58.11
TiO_2	0.23	0.25	0.23	0.19
ZrO_2	0.02	0.03	0.04	0.03
Al_2O_3	16.10	16.41	16.27	18.64
Fe_2O_3	4 38	4.27	5.19	2.83
FeO	0 81	0.45	0.29	0.90
MnO	0.08	0.11	0.10	0.05
MgO	1.59	1.29	1.39	0 67
CaO	3 75	3 11	3.84	3.97
BaO	0.04	0.16	0.13	0.05
K_2O	6.00	7.37	5.66	5.73
Na_2O	3.08	2.71	3.03	6.00
P_2O_5	0.16	0.18	0 21	0.13
SO_3	0.09	0 08	0.07	0.01
Cl	0.11	0.09	0.04	0.18
CO_2	0 63	0.66	0.84	ass.
H_2O^-	5.36	5.02	3 64	0.46
H_2O^+	7.86	8. 11	9.67	2.27
	100.59	99.83	100 33	100.24

V. Tufo grigio, ingiallito. Santarella, Vomero (an. Scherillo)
VI. Tufo giallo. Via Sanfelice, Vomero (an. Scherillo)
VII. Tufo giallo. Villa Lia. Via Orazio (an. Scherillo)
VIII. Scoria nera nel tufo giallo di via Sanfelice, Vomero (an. Scherillo)

I relativi valori di Niggli, una volta detratto $CaCO_3$, divengono.

	si	al	fm	c	alc.	k	mg	$\frac{al}{c+alc}$	si°
V.	194	36 ½	24 ½	12 ½	26 ½	0 56	0 37	0.93	0.94
VI.	198	39	22	9 ½	29 ½	0.64	0.34	1.00	0.91
VII.	195	38	24	12	26	0.55	0 33	1.00	0.96
VIII.	203	38 ½	13 ½	15	33	0.39	0.26	0 80	0 87

Tipo magmatico della scoria: kalifoyaitico.

È evidente che la composizione dei tufi del secondo periodo flegreo nel tratto Mergellina-Sant' Elmo è poco variabile e assai prossima, — anche per il tufo della Santarella — a quella del tufo di S. Stefano. Bisogna concludere che i campioni analizzati da Salvatore non corrispondevano al tipo medio della roccia e perciò non ne terremo conto nella discussione che segue.

Si tratta ora di riconoscere il tipo petrografico di questi tufi e quindi

di risalire nei limiti del possibile alla composizione originaria. Per tale scopo appunto ho eseguito l'analisi della scoria riportata in VIII.

La composizione chimica della scoria rientra fra quelle delle comuni lave flegree di cui riporto alcuni esempi.

	c	d	e	f
SiO_2	60.33	59.88	57.30	56.49
TiO_2	0.43	0.48	0.55	0.76
Al_2O_3	18.27	20.93	17.92	18.35
Fe_2O_3	2.84	2.31	4.94	5.90
FeO	1.29	1.25	0.80	0.70
MnO	—	0.23	0.23	0.07
MgO	0.38	0.51	0.92	0.58
CaO	1.15	1.12	4.52	3.75
K O	7.30	6.76	8.98	7.50
Na_2O	7.15	5.24	3.60	5.10
P_2O_5	0.04	0.03	0.14	0.01
Cl	0.43	0.22	0.19	—
H_2O^-	—	0.12	0.11	0.34
H_2O^+	0.56	0.23	0.42	0.63
	100.17	100.31	100.36	100.18

c Trachite fonolitica, M. Nuovo (an. Washington) [1]
d Trachite plagioclasica vitrofirica, Rione Amedeo, Napoli (an. Narici) [2]
e Trachite plagioclasica. M. Olibano, Pozzuoli (an. Narici) [2]
f Trachite. M. Spina, Agnano (an. Sersale) [3].

Valori di Niggli:

	si	al	fm	c	alc	k	mg	$\frac{al}{c+alc}$	si°
c)	220	39	14	4 1/2	42 1/2	0.40	0.16	0.83	0.82
d)	217	44 1/2	13	8 1/2	34	0.46	0.21	1.04	0.92
e)	188	31 1/2	19 1/2	15 1/2	30 1/2	0.62	0.25	0.96	0.88
f)	185	35 1/2	19 1/2	13	32	0.49	0.15	0.79	0.81

[1]) Washington H. S. *Chimical analyses of igneous rocks*. pag. 273. Washington, 1917.

[2]) Narici E. *Contributo alla petrografia chimica della provincia magmatica campana e del M. Vulture*. Zeit. für Vulk., vol. 14. Berlino, 1931-32.

[3]) Vighi L. *La cupola lavica del M. Spina nei Campi Flegrei*. Rend. Acc. Sc. Fisiche e Matem., Serie 4ª, vol. 14. Napoli, 1945.

Tipo magmatico:

c: kalifoyaitico; *d*, *f*: leucosienitico; *e*: leucosommaitico.

I valori di Niggli della scoria si collocano abbastanza bene tra quelli di *d* ed *e*: ciò che dimostra che non si tratta di un proietto di composizione chimica particolare. Supponendo ora che tanto la scoria che i tufi siano il prodotto dello stesso magma e che perciò abbiano avuto in origine una composizione chimica abbastanza simile (i pochi confronti che sono stati fatti finora tra scorie e ceneri coeve del Vesuvio confermerebbero che la composizione di tali prodotti è abbastanza prossima), la diagenesi avrebbe prodotto nei tufi essenzialmente una perdita di alcali e di calcio, con aumento contemporaneo di *al*: (*c* + *alc*) e di si^0, mentre aumentano anche ferro e magnesio. Ciò significa che nel tufo si è avuta una certa argillificazione, tuttavia non molto avanzata: gli alcali — e specialmente K_2O — sono ancora, per dei tufi, abbondantissimi, e il rapporto *al*: (*c* + *alc*) o è inferiore a 1. o uguale a 1. Ben maggiore argillificazione ho notato, in miei precedenti studi, nei tufi gialli dei Vulcani Sabatini.

Del resto il carattere stesso della roccia col suo detrito polveroso, ma non fangoso, mostra che l'argillificazione è poco progredita. Non riesco perciò a spiegarmi le cause dell'elevato tenore di H_2O dei tufi.

Nel tufo III l'eliminazione dell'acqua (in totale 11,68 %) avviene nel seguente modo:

fino a 110°: 3,07 %, da 110° a 200°: 4,96 %, sopra 200°: 3,65 %.

Concludendo, possiamo dire che il magma dei tufi del secondo periodo flegreo della collina del Vomero è kalifoyaitico.

Proseguendo il mio studio ho voluto approfondire le ricerche sulla corrispondenza nella composizione chimica tra tufi e inclusi lavici, e sopratutto tra tufi e pomici, che sono certo gli inclusi più frequenti. Ho cercato perciò dei tufi che non includessero le solite pomici gialle disfatte, ma pomici il più possibile fresche.

Il mio amico prof. Parascandola mi ha fornito campioni dei tufi gialli che appunto contengono pomici ancora grigie, per quanto circondate da un bordo giallastro: tali tufi provengono da M. Gauro e dallo scoglio del Lazzaretto tra Nisida e Coroglio.

Il tufo di M. Gauro è compatto, di color giallo chiaro con piccole pomici di color avana e frammenti di ossidiana. Le pomici grigie sono quelle di maggiori dimensioni (qualche cm. di diametro). Questo tufo si trova nell'interno del cratere a destra di chi entra dalla Porta di Campiglione.

Il tufo dello scoglio del Lazzaretto è poco coerente, ricco di piccole pomici ingiallite. Anche qui solo le pomici di dimensioni maggiori sono rimaste grigie. Il tufo contiene inclusi di tufo verde, che hanno conservato la loro tinta, e qualche incluso lavico. È notevole in questo tufo e nelle relative pomici l'alto contenuto di Cl; questo è dovuto, secondo me, alla

presenza di NaCl di origine marina: infatti il tufo è stato raccolto a soli 4 metri del livello marino, ed era esposto agli spruzzi delle onde.

	IX	X	XI	XII
SiO_2	52.07	57.50	54.46	52.45
TiO_2	0.25	0.23	0.25	0.23
ZrO_2	0.06	0.07	0.06	0.10
Al_2O_3	16.36	16.93	16.56	16.02
Fe_2O_3	3.95	2.75	3.95	3.05
FeO	0.31	2.11	0.31	1.20
MnO	0.10	0.10	0.10	nd.
MgO	1.10	0.84	0.82	0.76
CaO	2.36	2.94	2.35	4.71
BaO	0,04	0.08	0.04	0.08
K_2O	6.01	6.36	6.14	4.20
Na_2O	3.42	4.20	5.18	6.25
P_2O_5	0.06	0.16	0.08	0.12
SO_3	0.10	0,05	0 12	0.18
Cl	0.03	0.08	0.88	1.13
CO_2	0.13	tr	0.88	1.45
H_2O^-	5.26	0.25	3.24	2.76
H_2O^+	8.99	5.14	4.48	5.38
	100.60	99.81	99.90	100.07
O = Cl			0.20	0.25
			99.70	99.82

IX Tufo giallo, M. Gauro (an. Scherillo).
X Pomice grigia nel tufo giallo. M. Gauro (an. Scherillo).
XI Tufo giallo dello Scoglio del Lazzaretto. Nisida (an. Scherillo).
XII Pomice grigia nel tufo dello Scoglio del Lazzaretto (an. Scherillo).

Valori di Niggli:

	si	al	fm	c	alc	k	mg	$\frac{al}{c+al}$	si^0
IX	217	40	20	10	30	0.54	0.33	1.00	0.98
X	218	37 1/2	19	11 1/2	31	0.50	0.24	0.88	0.97
XI	228	41	19	5 1/2	34 1/2	0.47	0.28	1.02	0.96
XII	212	38	18	12 1/2	31 1/2	0.35	0.25	0.89	0.94

Per il calcolo dei valori di Niggli per le analisi XI e XII è stato sottratto oltre alla quantità calcolata di $CaCO_3$, anche quella di NaCl.

Tufo e pomici di M. Gauro presentano grande analogia tra loro e così pure con i tufi di S. Stefano.

Le pomici del tufo dello Scoglio del Lazzaretto, presentano anch'esse molto analogia coi tufi di S. Stefano, ma i tufi sembrerebbero invece di un tipo diverso: la composizione di questi tufi accenna piuttosto a quella delle trachiti più acide, quali sono p. e. le trachiti del Rione Amedeo (an. *d*) e di M. Nuovo (an. *c*). Questo è dunque un esempio di tufi e pomici incluse con composizione alquanto diversa. Tale esempio ci insegna a procedere con grande cautela in questi tentativi di ricostruire la composizione originaria dei tufi servendosi di quella degli inclusi caratteristici, e sopratutto a non limitarsi mai all'analisi del solo incluso.

Ad ogni modo, poichè negli studi sui tufi dovrò ricorrere più volte all'analisi delle pomici, ho pensato di analizzare, a scopo di riferimento, alcune tipiche pomici flegree, anche se appartenenti al terzo periodo. Riporto l'analisi di una pomice grigia chiara di grandi dimensioni (5-6 cm. di diametro medio) perfettamente fresca di M. Nuovo, raccolta dal prof. Parascandola, e di una pomice grigia da me raccolta in via Orazio, presso la Stazione mediana della IV funicolare, appartenente a quei banchi di pomici che caratterizzano gli strati più profondi dei tufi grigi del terzo periodo.

	XIII	XIV
SiO_2	57,69	55,39
TiO_2	0,23	0,32
ZrO_2	0,11	0.09
Al_2O_3	19,90	18,46
Fe_2O_3	2,24	2,53
FeO	1,73	3,08
MnO	0,20	0,10
MgO	0,61	1.48
CaO	2,45	4,48
BaO	0,04	0,12
K_2O	8,11	6.73
Na_2O	5,09	4,03
P_2O_5	0,08	0,16
SO_3	0.09	0,03
Cl	0,05	0.03
CO_2	ass.	0.12
H_2O^-	0,28	0,14
H_2O^+	0.96	2,76
	99.92	100,35

XIII) Pomice M. Nuovo (an. Scherillo)

XIV) Pomice nel tufo grigio, Via Orazio (an. Scherillo)

Valori di Niggli

	si	al	fm	c	alc	k	mg	$\frac{al}{c+alc}$	si"
XIII	202	41	15	9	35	0.51	0.21	0.93	0.81
XIV	180	35 1/2	23	15	26 1/2	0.53	0.33	0.85	0.87

Tipo magmatico: XIII) granosienitico XIV. leucosommaitico.

Queste sono le analisi di pomici e lapilli della regione flegrea che ho trovato nella letteratura:

	g	h	l	m
SiO_2	58.35	56.27	56.74	55.23
TiO_2	0.30	—	—	—
Al_2O_3	19.83	18.67	18.74	19.61
Fe_2O_3	0.98	5.74	3.84	4.33
FeO	2.37	1.58	2.87	2.97
MgO	0.90	1.44	2.00	2.25
CaO	3.67	4.47	4.63	5.32
K_2O	9.10	5.03	7.18	6.25
Na_2O	3.59	4.65	4.36	3.98
P_2O_5	tr.	—		
Cl	—		0.22	0.74
H_2O^-	—	—	—	—
H_2O^+	0.96	1.77	0.44	0.24
	100.05	99.62	101.02	100.49

g) Pomice vulsinitica, Astroni (an. Riva) [1]
h) Pomice trachitica. Concola, Fondo Riccio (an. Manasse) [2].
l) Lapilli trachitici. Concola, Fondo Riccio (an. Manasse) [2].
m) Lapilli trachitici. Moscaglione (an. Manasse) [2]

Tra i valori di Niggli di questi materiali piroclastici del terzo periodo flegreo ho inserito per confronto anche quelli delle due pomici precedenti:

[1] De Lorenzo G. e Riva C., *Il cratere di Astroni nei Campi Flegrei*. Atti R. Acc. Scienze Fisiche e Mat., serie 2ª, vol. 11. Napoli, 1902.

[2] Washington H. S., *Chemical analyses of igneous rocks*, pag. 143. Washington, 1917. — De Stefani C., *Die Phlaegräischer Felder bei Neapel*. Petermanns Mitt., Ergänzungsh. n. 156. Gotha, 1907.

	si	al	fm	c	alc	k	mg	$\frac{al}{c+alc}$	si"
XIII)	202	41	15	9	35	0.51	0.21	0.93	0.84
g)	201	40	14	14	32	0.63	0.33	0.87	6.90
XIV)	180	35 ½	23	15	26 ½	0.53	0.31	0.85	0.87
h)	180	35	25	15 ½	24 ½	0.41	0.28	0.85	0.91
l)	172	33 ½	25	15	26 ½	0.52	0.38	0.81	0.83
m)	164	34	25 ½	17	23 ½	0.51	0.32	0.84	0.84

Tipo magmatico: *g*: granodioritico; *h*: leucosommaitico; *l*: id.; *m*: sienitico monzonitico.

Per quanto la variazione dei valori sia un po' oscillante, si vede abbastanza chiaramente quale è l'andamento della differenziazione. È notevole che le analisi XIV e *h* diano dei valori di Niggli quasi uguali. Questo, secondo me, è un risultato importante, perchè dimostra che ci sono materiali che sono largamente diffusi e sono proprio questi che mi interessano di più.

Nessuna delle pomici dei tufi gialli è abbastanza fresca per poter essere inserita, con significato, nel diagramma. La scoria di via Sanfelice vi si colloca abbastanza bene (salvo che per il valore di *al*) tra *g* e *XIII*. Spero però di poter esser tanto fortunato da trovare nel tufo giallo altri inclusi utili ai fini della determinazione del tipo magmatico. Una volta accertato questo, si potrà vedere qual'è l'effetto della diagenesi sulla composizione chimica dei tufi.

Per questo però sono necessarie numerose altre analisi. Sui risultati delle mie ricerche chimico-petrografiche spero di poter riferire a questa Accademia tra non moltissimo tempo.

Processo verbale dell' adunanza del dì 7 gennaio 1950.

Presiede il presidente De Lorenzo, segretario il socio Miranda. Assistono i soci ordinari residenti Bakunin, Colamonico, De Dominicis, De Lorenzo, Diamare, Malquori, Miranda, Nobile, Pierantoni, Scherillo, Spampinato.

Il segretario legge il processo verbale dell' adunanza del dì 3 dicembre 1949, che è approvato. Indi comunica che il 29 dicembre scorso, in applicazione delle norme sancite dal nuovo Statuto, si è riunito il Consiglio generale della Società, che ha proceduto, tra l'altro, all' approvazione degli ultimi bilanci consuntivi 1948 e 1949 e all' approvazione anche del bilancio preventivo per il 1950. Il segretario riferisce i dati principali relativi a tali bilanci e comunica altresì le altre deliberazioni adottate, fra cui quelle relative alla prossima adunanza plenaria prevista dall' art. 15 dello Statuto.

Il segretario presenta, a nome del socio Caccioppoli, una nota del prof. Mario Giovanardi dal titolo « *Il metodo della proiezione isometrica* ». Il presidente nomina la Commissione composta dai soci Caccioppoli, Spampinato e Miranda, perchè riferisca in una prossima tornata.

Il socio Spampinato presenta una nota del prof. A. Fadini dal titolo *La prima rappresentazione degli* S_4 *proiettivi legati a due algebre doppie definite nel corpo* $C(2)$. — Il presidente incarica la Commissione composta dai soci Spampinato, Caccioppoli e Miranda di riferire nella prossima adunanza.

Processo verbale dell' adunanza del dì 4 febbraio 1950.

Assistono all' adunanza il presidente De Lorenzo ed i soci ordinari residenti Bakunin, Carnera, Colamonico, De Dominicis, D' Erasmo, Giordani, Imbò, Malquori, Miranda, Nobile, Pierantoni, Salfi, Scherillo e Spampinato. Segretario il socio D' Erasmo.

Il segretario legge il processo verbale dell' adunanza 7 gennaio, che è approvato, e presenta il volume 1949 del Rendiconto, del quale è stata recentemente ultimata la stampa. Indi comunica: 1°) l'invito del Comitato Organizzatore del Congresso Internazionale dei Matematici a partecipare alle riunioni che avranno luogo a Cambridge, Mass., dal 30 agosto al 6 settembre 1950. — L' Accademia aderisce, designando quale proprio delegato al Congresso il consocio prof. Mauro Picone;

2°) la lettera 20 gennaio del segretario redattore del *Bulletin de sciences mathématiques* di Parigi, che chiede il cambio col Rendiconto. — L' Accademia aderisce a tale desiderio, stabilendo il cambio del Rendiconto a cominciare dall' anno 1943;

3°) le ministeriali 16 gennaio, con le quali si comunica l'avvenuta

approvazione, con decreto 8 dicembre 1949 del Capo dello Stato, delle nomine dei proff. De Lorenzo e Giordani rispettivamente a presidente e vicepresidente dell'Accademia, nonchè dei proff. Salfi, Imbò e Scherillo a soci ordinari residenti nella sezione di Scienze naturali e dei proff. Nobile e Miranda a soci ordinari residenti nella sezione di Scienze matematiche.

Il socio Spampinato, tanto in nome proprio che dei colleghi Caccioppoli e Miranda, legge le relazioni sulla nota del prof. Mario Giovanardi, *Il metodo della proiezione isometrica*, e su quella del dott. Angelo Fadini, *La prima rappresentazione degli S_4 proiettivi legati a due algebre doppie definite nel corpo $C[2]$*, con la proposta che siano entrambe accolte per la stampa nel Rendiconto. — L'Accademia, unanime, approva.

Il socio Miranda presenta, per il Rendiconto, una nota del dott. Federico Cafiero, *Sul fenomeno di Peano nelle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine*. Il presidente nomina la Commissione costituita dai soci Miranda, Caccioppoli e Spampinato con l'incarico di riferire nella prossima tornata.

Il socio Salfi presenta, per lo stesso periodico, una nota dei proff. B. De Lerma e G. Arpino dal titolo *Ricerche di spettrografie di fluorescenza sul siero di sangue umano normale*. Il presidente dà incarico alla Commissione Salfi, Pierantoni e Imbò di riferire nella ventura adunanza.

Il socio Malquori presenta una nota del dott. Riccardo Sersale sopra *Indagini intorno ad un caolino proveniente dal tenimento di Serrenti (Cagliari)*. Viene incaricata di riferire su di essa la Commissione composta dai soci Malquori, Giordani e Bakunin.

Il presidente De Lorenzo presenta, per il Rendiconto, una sua nota dal titolo *Le teorie di Einstein*, e ne discorre.

Indi l'Accademia si riunisce in seduta privata, per discutere questioni amministrative.

Processo verbale dell'adunanza del dì 4 marzo 1950.

L'adunanza è presieduta dal presidente De Lorenzo, essendo presenti i soci ordinari residenti Bakunin, Carnera, Colamonico, De Dominicis, D'Erasmo (segretario), Diamare, Imbò, Malquori, Nobile, Pierantoni, Salfi, Scherillo e Spampinato.

Il segretario dà lettura del processo verbale dell'adunanza 4 febbraio, che è approvato. Indi comunica la lettera del consocio Picone, che ha accettato l'incarico di rappresentare l'Accademia delle Scienze di Napoli al prossimo Congresso Internazionale dei Matematici.

Il socio Salfi, tanto in nome proprio che dei colleghi Pierantoni e Imbò, legge la relazione sulla nota dei proff. Baldassarre De Lerma e Gennaro Arpino dal titolo *Ricerche di spettrofotometria di fluorescenza sul siero*

di sangue umano normale, proponendo che venga accolta per la stampa nel Rendiconto. — L' Accademia, unanime, approva.

Il socio Malquori dà lettura della relazione della Commissione Bakunin, Giordani, Malquori sulla nota del dott. Riccardo Sersale: *Indagini intorno ad un caolino proveniente dal tenimento di Serrenti (Cagliari)*, con la proposta di inserzione nel Rendiconto. — L' Accademia approva alla unanimità.

Il socio Spampinato riferisce, anche a nome dei soci Caccioppoli e Miranda, sulla nota presentata dal dott. Federico Cafiero « *Sul fenomeno di Peano nelle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine* », proponendone l' accoglimento per la stampa nel medesimo periodico. — La proposta è accolta alla unanimità.

Il socio Spampinato presenta per il Rendiconto una sua nota VI dal titolo *Nozioni introduttive alla teoria delle ipersuperficie algebriche di indice n dell'* S_r *proiettivo complesso.*

Indi l' Accademia discute di affari interni.

Processo verbale dell' adunanza del dì 1° aprile 1950.

All' adunanza, presieduta dal presidente De Lorenzo, assistono i soci ordinari Bakunin, Carnera, De Dominicis, D' Erasmo, Diamare, Imbò, Malquori, Miranda, Nobile, Pierantoni, Scherillo e Spampinato Segretario il socio D' Erasmo.

Il segretario comunica: 1°) la lettera del Comune di Bevagna relativa alle onoranze che verranno prossimamente tributate alla memoria del compianto socio Filippo Silvestri. L' Accademia delibera di dare la sua cordiale adesione e stabilisce che sia inviato al Comitato per le onoranze un contributo di lire diecimila;

2°) l' invito dell' Accademia tedesca delle Scienze di Berlino a partecipare alla celebrazione, fissata per il 10 luglio venturo, del 250° anniversario della sua fondazione. — L' Accademia aderisce, beneaugurando.

Il segretario presenta quindi il nuovo Annuario 1950 della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli, di cui è stata recentemente ultimata la stampa, e ne discorre.

Il socio Spampinato presenta una sua nota dal titolo « *Corpovarietà e varietà algebriche ed iperalgebriche di un* S_r *ipercomplesso* » perchè venga stampata nel Rendiconto. Presenta poi, per il medesimo periodico, una nota del dott. Angelo Fadini sopra « *Le corpoproiettività dell'* S_1 *proiettivo legato all' algebra A* ». Il presidente nomina la Commissione composta dai soci Spampinato, Miranda e Caccioppoli, con l' incarico di riferire in una prossima tornata.

Il socio Malquori presenta una nota del dott. Riccardo Sersale dal

titolo « *Gli esami metallografico e termodilatometrico nella valutazione della qualità dei tubi di ghisa centrifugati* » perchè venga pubblicato nel Rendiconto. Il presidente dà l'incarico di riferire su questo lavoro alla Commissione costituita dai soci Bakunin, Giordani e Malquori.

Il socio Imbò presenta, per il Rendiconto, una sua nota intitolata *Manifestazioni effusive subterminali della primavera del 1942 e fenomeni termici attuali interessanti la medesima zona del versante meridionale vesuviano.*

Processo verbale dell'adunanza del dì 6 maggio 1950.

Assistono all'adunanza, presieduta dal presidente De Lorenzo, i soci ordinari residenti Bakunin, Carnera, Carrelli, Colamonico, De Dominicis, D'Erasmo (segretario). Diamare, Giordani, Imbò, Malquori, Miranda, Nobile, Pierantoni, Salfi, Scherillo, Spampinato e il socio ordinario non residente Picone.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 1° aprile, che è approvato. Indi comunica:

1) la lettera 30 marzo della Biblioteca dell'Accademia delle Scienze dell'Unione Repubbliche Sovietiche di Mosca, che chiede l'invio del Rendiconto accademico in cambio di quello dell'Accademia delle Scienze della URSS. — L'Accademia delibera l'invio del Rendiconto dal 1945 in poi;

2) la lettera del *Science Museum* di Londra, che chiede il volume degli Atti. — L'Accademia stabilisce d'inviare il 2° volume della III serie, pubblicato nel 1946;

3) la ministeriale 3 aprile, n. 2007, con la quale si comunica essere in corso di approvazione lo schema di provvedimento che modifica lo Statuto della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti, secondo le proposte fatte nell'adunanza plenaria del 30 gennaio scorso;

4) la ministeriale 4 maggio, n. 5563, con la quale si accompagna copia del decreto presidenziale 8 dicembre 1949, relativo alla nomina a soci residenti dei proff. Imbò, Miranda, Nobile, Salfi e Scherillo;

5) la lettera relativa alle onoranze a Francesco Severi, tributategli in Roma in fine di aprile, alle quali l'Accademia ha aderito, facendosi rappresentare dai soci Picone e Signorini.

Il socio Colamonico presenta ed offre in omaggio due volumi recentemente pubblicati dal Centro Studi di Geografia economica da lui diretto, che fa capo al Consiglio Nazionale delle Ricerche, e ne discorre. — Il presidente, a nome dell'Accademia, ringrazia.

La Commissione Spampinato, Miranda e Caccioppoli riferisce sulla nota del dott. Angelo Fadini sopra *Le corpoproiettività dell'* S_4 *proiettivo legato*

all' algebra A, proponendone la inserzione nel Rendiconto. — L'Accademia unanime approva.

Pure a voti unanimi e approvata la proposta, fatta dalla Commissione Bakunin, Giordani e Malquori, di accogliere nel medesimo periodico, con le limitazioni in vigore, la nota del dott. Riccardo Sersale su *Gli esami metallografico e termodilatometrico nella valutazione della qualità dei tubi di ghisa centrifugati*.

Il socio Colamonico presenta per il Rendiconto una nota del dott. Cristofaro Mennella *Sulla scelta della distribuzione udometrica annuale per Napoli Capodimonte*. Il presidente nomina la Commissione composta dai soci Colamonico, Carnera e Imbò con l'incarico di riferire in una prossima adunanza.

Il socio Picone presenta una nota del dott. Gaetano Fichera *Sulla maggiorazione dell' errore di approssimazione nei procedimenti di integrazione numerica delle equazioni della Fisica matematica*. Viene incaricata di riferire su di essa la Commissione Picone, Miranda e Caccioppoli.

Il socio Miranda presenta due note del dott. Federico Cafiero dal titolo: *Sul fenomeno di Peano nelle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine* e *Sulla classe delle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine, i cui punti di Peano costituiscono un insieme di misura lebesguiana nulla*. Il presidente dà incarico di riferire sulle due note alla Commissione costituita dai soci Miranda, Caccioppoli e Spampinato.

Quindi l'Accademia si riunisce in seduta privata per discutere le proposte di nomina di nuovi soci nelle diverse categorie.

Processo verbale dell' adunanza del dì 3 giugno 1950.

L'adunanza è presieduta dal presidente De Lorenzo, essendo presenti i soci ordinari residenti Bakunin, Caccioppoli, Colamonico, De Dominicis, D'Erasmo, Diamare, Imbò, Malquori, Miranda, Nobile, Salfi, Scherillo e Spampinato. Segretario il socio D'Erasmo.

Il segretario dà lettura del processo verbale dell'adunanza 6 maggio, che è approvato.

Il presidente informa i colleghi sul discorso tenuto nello scorso maggio al Senato dal prof Guido Castelnuovo, presidente dell'Accademia dei Lincei a proposito della necessità di aumentare nel bilancio del Ministero dell'Istruzione i contributi statali per il funzionamento delle principali Accademie e Istituti culturali italiani; ed aggiunge che, avendo con rammarico rilevato come fra le principali Accademie italiane che abbiano gloriose tradizioni sia stata dimenticata la ex Società Reale di Napoli due volte secolare, egli non ha mancato di far notare tale omissione al sen. Castelnuovo, il quale ha promesso tutto il suo interessamento.

Il segretario dà lettura della lettera 30 maggio del consocio Carnera, con la quale egli scusa l'assenza dall'adunanza odierna ed informa i colleghi che parteciperà direttamente alle cerimonie celebrative del 250° anniversario della fondazione dell'Accademia Tedesca delle Scienze di Berlino, fissate per il prossimo luglio. — L'Accademia, la quale ha già dato la sua cordiale adesione a tale celebrazione, decide di pregare il socio Carnera perchè voglia rappresentare la Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti di Napoli a quella manifestazione.

Il Segretario presenta, a nome dello stesso socio Carnera, una memoria del prof. Eugenio Guerrieri dal titolo *Catalogo di 750 stelle zenitali per Capodimonte da osservazioni al Cerchio meridiano di Repsold*, destinata alla inserzione nel nuovo volume degli Atti accademici. — Il presidente nomina la Commissione composta dai soci Carnera, Nobile e D'Erasmo, con l'incarico di riferire in una prossima adunanza anche per la parte finanziaria.

La Commissione Colamonico, Carnera, Imbò, incaricata di riferire sulla nota del dott. Cristofaro Mennella, *Sulla scelta della distribuzione udometrica annuale per Napoli Capodimonte*, ne propone l'inserzione nel Rendiconto. — L'Accademia unanime approva.

Uguale proposta di accoglimento per la stampa nel Rendiconto avanza la Commissione Picone, Miranda e Caccioppoli, nel riferire sulla nota del dott. Gaetano Fichera, *Sulla maggiorazione dell'errore di approssimazione nei procedimenti di integrazione numerica delle equazioni della Fisica matematica*. È approvata alla unanimità.

Analogamente l'Accademia accoglie la proposta della Commissione Miranda, Caccioppoli e Spampinato, relativa alla stampa delle due note presentate nella precedente adunanza dal dott. Federico Cafiero dal titolo *Sul fenomeno di Peano nelle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine* e *Sulla classe delle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine, i cui punti di Peano costituiscono un insieme di misura lebesguiana nulla*.

Il socio D'Erasmo presenta, per il Rendiconto, una nota della dott. Maria Moncharmont Zei *Sopra una nuova specie di Eurinodelphis della pietra leccese*, corredata da una tavola e da cinque figure intercalate, e una nota del dott. Vincenzo Minieri dal titolo *La terrazza della Starza nei Campi Flegrei*, con due figure intercalate. — Il presidente nomina la Commissione costituita dai soci D'Erasmo, De Lorenzo e Scherillo, con l'incarico di riferire in una prossima tornata.

Il socio Nobile presenta una nota del dott. Donato Greco *Sulla convergenza degli sviluppi in serie di autosoluzioni associati ad un problema ai limiti relativo ad un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine*. — È incaricata di riferire su di essa la commissione Nobile, Miranda e Caccioppoli.

Il socio Malquori presenta due note del dott. Riccardo Sersale dal titolo: *Indagini sulla dilatazione reversibile di alcune roccce silice* e *La disidratazione delle bauxiti.* — Il presidente dà incarico di riferire alla Commissione Malquori, Scherillo e Bakunin.

Il socio Spampinato presenta, per lo stesso periodico, una nota del dott. Pio Balsimelli sopra *Le corpoproiettività dell'* S_1 *biduate nelle tre rappresentazioni complesse.* — È nominata la Commissione Spampinato, Miranda e Caccioppoli perche riferisca nella prossima adunanza.

Constatato che il numero dei soci ordinari presenti supera i due terzi prescritti dall'ultimo comma dell'art. 11 dello Statuto per la validità delle votazioni ai posti di socio vacanti, si passa alle elezioni.

Il presidente comunica che la sezione di Scienze naturali, riunitasi il 6 maggio scorso, ha deciso alla unanimità di proporre all'approvazione della Classe, per la nomina all'unico posto vacante nella categoria di *socio ordinario non residente*, il nome del prof. Luigi Lombardi, decano fra i corrispondenti nazionali della medesima sezione.

Il segretario legge il parere motivato sopra i requisiti scientifici del candidato proposto ed il presidente chiede ai soci ordinari presenti alla adunanza se abbiano a proporre altri nomi. Non essendo stata fatta da alcuno altra proposta, il candidato predetto è ammesso a votazione a scrutinio segreto, ottenendo 14 voti favorevoli sopra 14 soci presenti e votanti.

Il presidente proclama quindi eletto socio nazionale ordinario non residente nella Sezione di Scienze naturali il prof. Luigi Lombardi, avvertendo che, a norma dell'art. 14 dello Statuto, l'elezione verrà comunicata al Ministero della Pubblica Istruzione per l'approvazione del Capo dello Stato.

Si passa quindi alle proposte di nomina per soci corrispondenti nazionali.

Il presidente comunica che furono proposti alla unanimità, per la nomina a soci corrispondenti, nell'adunanza del 6 maggio, dalla Sezione di Scienze naturali i candidati seguenti:

1) Catalano Giuseppe, 2) Beretta Ugo, 3) Orrù Antonietta, 4) Montalenti Giuseppe, 5) Jacopetti Mario, 6) Panizzi Luigi;

e dalla Sezione di Scienze matematiche i candidati appresso elencati:

1) Colucci Antonio, 2) Galli Adriano, 3) Scorza Dragoni Giuseppe, 4) Tolotti Carlo, 5) Zappa Guido.

Vengono letti i pareri motivati sopra i requisiti scientifici di ciascuno dei candidati proposti, e non avendo alcuno dei presenti chiesto, a domanda del presidente, di integrare la lista con altri nomi, vengono ammessi a votazione, per scrutinio segreto, tutti i candidati innanzi elencati.

La votazione ha dato il risultato appresso indicato:

A) *per la nomina a socio corrispondente nella Sezione di Scienze naturali:*

1) Catalano Giuseppe: 13 voti favorevoli e 1 contrario su 14 votanti;
2) Beretta Ugo: 14 voti favorevoli su 14 votanti;
3) Orrù Antonietta: 12 voti favorevoli, 1 contrario e 1 astenuto;
4) Montalenti Giuseppe: 14 voti favorevoli su 14 votanti;
5) Jacopetti Mario: 14 voti favorevoli su 14 votanti;
6) Panizzi Luigi: 14 voti favorevoli su 14 votanti.

B) *per la nomina a socio corrispondente nella Sezione di Scienze matematiche:*

1) Colucci Antonio: 14 voti favorevoli su 14 votanti;
2) Galli Adriano: 13 voti favorevoli ed 1 contrario;
3) Scorza Dragoni Giuseppe: 14 voti favorevoli su 14 votanti;
4) Tolotti Carlo: 14 voti favorevoli su 14 votanti;
5) Zappa Guido: 14 voti favorevoli su 14 votanti.

Il presidente proclama pertanto eletti soci corrispondenti nella Sezione di Scienze naturali i proff. Catalano Giuseppe, Beretta Ugo, Orrù Antonietta, Montalenti Giuseppe, Jacopetti Mario e Panizzi Luigi, e soci corrispondenti nella Sezione di Scienze matematiche i proff. Colucci Antonio, Galli Adriano, Scorza Dragoni Giuseppe, Tolotti Carlo e Zappa Guido.

Redatto, letto ed approvato seduta stante il presente processo verbale, l'adunanza è tolta alle ore 13.

Processo verbale dell'adunanza del dì 4 novembre 1950.

Assistono all'adunanza, presieduta dal presidente De Lorenzo, i soci ordinari residenti Bakunin, De Dominicis, D'Erasmo (Segretario), Giordani, Imbò, Malquori, Miranda, Nobile, Pierantoni, Salfi, Scherillo, Spampinato, ed i soci corrispondenti nazionali Beretta, Galli, Jacopetti, Orrù, Tolotti e Zappa.

Il segretario legge la lettera del prof. Luigi Lombardi, che ringrazia l'Accademia per la nomina a socio ordinario non residente, e quelle dei proff. Catalano, Beretta, Orrù, Montalenti, Jacopetti, Panizzi, Colucci, Galli, Scorza, Tolotti, Zappa, che esprimono la loro riconoscenza per la nomina a socio corrispondente.

Partecipa, poi, che durante le ferie estive fu presentata dal presidente De Lorenzo una nota su *Le mosche in descrizioni antiche e moderne*, la quale è stata inserita sul Rendiconto.

Indi comunica che con Decreto Presidenziale 11 giugno 1950, n. 655, pubblicato nella Gazzetta Ufficiale del dì 4 settembre, sono state approvate le modifiche allo Statuto deliberate dalla Società Nazionale di Scienze,

Lettere ed Arti nell'adunanza plenaria del 30 gennaio u. s., e che alle onoranze alla memoria di Filippo Silvestri, che ebbero luogo in Bevagna nello scorso settembre, l'Accademia fu rappresentata dal socio De Dominicis.

Presenta quindi il calendario delle tornate ordinarie per l'anno 1951, fissato, in base alle norme consuete, come segue: Gennaio 13, Febbraio 3, Marzo 3, Aprile 7, Maggio 5, Giugno 2, Novembre 3, Dicembre 1.

La Commissione Carnera, Nobile e D'Erasmo, incaricata di riferire sulla memoria del prof. Eugenio Guerrieri, *Catalogo di 750 stelle zenitali per Capodimonte da osservazioni meridiane al cerchio di Repsold*, ne propone l'integrale accoglimento nel nuovo volume degli Atti, con il contributo di L. 100.000 offerto dall'Osservatorio Astronomico di Capodimonte per le spese di composizione, carta e stampa (comprese 400 copie di estratti).

Il socio D'Erasmo, tanto in nome proprio che dei consoci De Lorenzo e Scherillo, legge la relazione sulle note della dott. Maria Moncharmont Zei, *Sopra una nuova specie di Eurhinodelphis della pietra leccese*, e del dott. Vincenzo Minieri, su *La Terrazza della Starza nei Campi Flegrei*, con la proposta di accoglierle entrambe per la stampa nel Rendiconto, lasciando a carico degli autori la esecuzione delle figure.

Analoga proposta di accoglimento nel Rendiconto fanno la Commissione Nobile, Miranda e Caccioppoli per la nota del dott. Donato Greco, *Sulla convergenza degli sviluppi in serie di autosoluzioni associati ad un problema ai limiti relativo ad un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine*; la Commissione Spampinato, Miranda e Caccioppoli per la nota del dott. Pio Balsimelli, sopra *Le corpoproiettività dell'* S_1 *biduale nelle tre rappresentazioni complesse*; e la Commissione Malquori, Bakunin e Scherillo per le due note del dott. Riccardo Sersale. *Indagini sulla dilatazione reversibile di alcune rocce silicee* e *La disidratazione delle bauxiti*. — Con distinte votazioni tutte le proposte predette sono accolte all'unanimità dall'Accademia.

Il presidente De Lorenzo presenta, per il Rendiconto, una sua nota dal titolo *L'India nelle lettere di Pietro Della Valle*, e ne discorre.

Il socio D'Erasmo presenta una sua nota *Sopra un teschio di Bos taurus primigenius Bojanus recentemente rinvenuto a Pignataro Interamna*.

Il Segretario presenta, a nome del socio corrispondente Ippolito, una nota dell'ing. Andrea Russo Spena, *Su alcune proprietà caratteristiche delle reti*. Il presidente nomina la Commissione Ippolito, Miranda e Galli con l'incarico di riferire in una prossima adunanza.

Il socio corrispondente Galli presenta, per l'inserzione nel Rendiconto, tre note: una del dott. Vincenzo Franciosi: *Sulla caduta di spinta per sforzo normale negli archi sottili ribassati*, e due dell'ing. Elio Giangreco, *Vibrazioni libere e forzate di un corpo rigido in un mezzo elastico con una applicazione all'asismica*, e *Instabilità nell'equilibrio delle strutture scato-*

lari. E dato l'incarico di riferire sulle tre note alla Commissione Galli, Miranda e Tolotti.

Il socio Spampinato presenta, per lo stesso periodico, una sua nota *Sulle rappresentazioni complesse di una corpovarietà algebrica o iperalgebrica e delle trasformazioni corpobirazionali di un* S_r *legato ad una qualunque algebra complessa*, ed una nota del dott. Angelo Fadini, *La Riemanniana del piano triduale*. Per quest'ultima il presidente nomina la Commissione Spampinato, Miranda e Zappa perchè riferisca in altra tornata.

Si passa quindi, secondo l'ordine del giorno, alla votazione a scrutinio segreto per la carica di vice-presidente dell'Accademia di Scienze fisiche e matematiche per l'anno 1951:

Soci ordinari presenti e votanti 13:

prof. Maria Bakunin, voti dodici;

» Giuseppe De Lorenzo, voti uno.

Annunziando il risultato di tale votazione il presidente avverte che, a norma dell'articolo 14 dello Statuto, esso verrà comunicato al Ministero della Pubblica Istruzione per l'approvazione del Capo dello Stato.

Processo verbale dell'adunanza del dì 2 dicembre 1950.

Presidenza del prof. De Lorenzo. Sono presenti i soci ordinari residenti Bakunin, Caccioppoli, Carnera, D'Erasmo (segretario), Diamare, Giordani, Imbò, Malquori, Miranda, Nobile, Pierantoni, Scherillo e Spampinato, ed i corrispondenti nazionali Beretta, Catalano, Colucci, Orrù, Panizzi, Tolotti e Zappa.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza del dì 4 novembre, che è approvato. Indi comunica la lettera del Sindaco di Ancona, relativa alla commemorazione di Vito Volterra, che già fece parte dell'Accademia in qualità di socio corrispondente della sezione di Scienze matematiche, ed informa di aver già inviato la cordiale adesione del Sodalizio alla cerimonia, ch'ebbe luogo il 25 novembre scorso.

Indi presenta la memoria di E. Guerrieri, *Catalogo di 750 stelle zenitali per Capodimonte* ecc., di cui è stata recentemente ultimata la stampa nel nuovo volume degli Atti.

Legge infine la lettera 14 novembre dell'Accademia Serba delle Scienze, con sede a Belgrado, che chiede il cambio delle pubblicazioni. — L'Accademia stabilisce di accordare il cambio del Rendiconto a cominciare dall'anno 1948.

Il socio Diamare annunzia, con commosse parole, la scomparsa del socio ordinario non residente Biagio Longo, avvenuta in Roma il 29 novembre ed a lui comunicata telegraficamente il giorno successivo. Associandosi al

vivo rimpianto di tutti i consoci per tale perdita, egli, che lo ebbe collega a Siena, a Pisa ed a Napoli e fu legato a Lui da fraterna amicizia, ne pone in rilievo la grande attività didattica e l'opera instancabile spiegata in vantaggio degli Istituti con tanto amore diretti nei vari Atenei, in attesa che altri, più competente di lui, possa illustrarne i meriti scientifici nel campo botanico. — Il presidente, a nome dell'Accademia, si associa al lutto per il collega scomparso, e prega il prof. Catalano di volerne leggere la commemorazione in altra adunanza. — Il socio Catalano accetta e ringrazia.

La Commissione Miranda, Galli e Tolotti riferisce sulle due note del dott. E. Giangreco dal titolo *Vibrazioni libere e forzate di un corpo rigido in un mezzo elastico con un' applicazione all' asismica* e *Sull' instabilità dell'equilibrio delle strutture scatolari*, nonchè sulla nota del dott. V. Franciosi *Sulla caduta di spinta per sforzo normale negli archi sottili ribassati*, proponendone l'accoglimento per la stampa nel Rendiconto. — L'Accademia unanime approva.

La Commissione Spampinato, Miranda e Zappa è del parere che possa essere accolta nel medesimo periodico la nota del dott. A. Fadini, *La riemanniana del piano triduale*; e dello stesso avviso è la Commissione Miranda, Ippolito e Galli per la nota del prof. Andrea Russo Spena, *Su alcune proprietà caratteristiche delle reti*. — Con due distinte votazioni l'Accademia approva all'unanimità le proposte suddette.

Il socio Scherillo presenta, per il Rendiconto, una sua nota dal titolo *Petrografia chimica dei tufi flegrei:* 1) *Il tufo giallo. Nota prima.*

Il socio corrispondente Zappa presenta, per lo stesso periodico, una sua nota *Sui gruppi p-supersolubili.*

Il socio Spampinato presenta una nota del dott. Angelo Fadini su *La prima rappresentazione dell' S_4 proiettivo legato ad una algebra doppia definita nel corpo $C[3]$*. — Il presidente nomina la Commissione Spampinato, Miranda e Zappa con l'incarico di riferire in una prossima adunanza.

Il socio Picone presenta, per la inserzione nel volume degli Atti, una memoria di Maria Josepha de Schwarz sulla *Determinazione delle frequenze e delle linee nodali di una membrana ellittica oscillante con contorno fisso*. — Viene incaricata di riferire su di essa, in altra adunanza, la Commissione composta dai soci Picone, Miranda e D'Erasmo.

Lo stesso socio Picone presenta infine, per il Rendiconto, una nota di Maria Bernabini, *Sull' integrazione delle equazioni dell' elasticità piana in coordinate curvilinee*. — Il presidente incarica di riferire su di essa la Commissione Picone, Miranda e Tolotti.